І. О. ПРУСОВ, Ж. В. СТАРОВОЙТЕНКО

ПРУЖНА РІВНОВАГА СКЛАДЕНОЇ СМУГИ

Розглянемо смугу, складену з двох спаяних по прямій L_0 (рис. 1) смуг, одна з яких займає область $-h_1 < y < 0$ (S_1^-), а друга — область $0 < y < h_2$ (S_2^+). Пружні постійні матеріалу цих смуг μ_j і $\varkappa_j$ $(j = 1, 2)$.

Потрібно знайти напружений стан у розглядуваній неоднорідній смузі в залежності від дії зовнішнього навантаження на прямих L_j, зосереджених сил (X_k^j, Y_k^j) та зосереджених моментів M_k^j, прикладених відповідно в точках $a_k^{(j)}$ і $b_k^{(j)}$, які належать області S_1^-, якщо $j = 1$, або S_2^+, якщо $j = 2$ $(k = 1, 2, \ldots N)$.

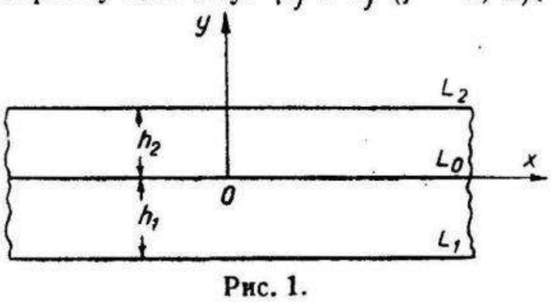

Рис. 1.

Розв'язок аналогічної задачі для складеної смуги, навантаженої лише по лінії спаю, іншим методом одержаний в праці [2].

Деякі задачі для смуги з підкріплюючими пружними лінійними елементами розглянуті в праці [3]. Метод розв'язку даної задачі аналогічний [5].

Позначимо через $\Phi_j(z)$ та $\Psi_j(z)$ функції Колосова—Мусхелішвілі, за допомогою яких визначається напружений стан в S_1^- (при $j = 1$), та S_2^+ (при $j = 2$). Поширивши відомим чином [1] функцію $\Phi_1(z)$ на область $0 < y < h_1$ (S_1^+), а функцію $\Phi_2(z)$ на область $-h_2 < y < 0$ (S_2^-), знайдемо, що напружено-деформований стан в S_1^- та S_2^+ визначається формулами

$$X_x + Y_y = 2\left[\Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)}\right], \tag{1}$$

$$Y_y - iX_y = \Phi_j(z) - \Phi_j(\overline{z}) + (z - \overline{z})\,\overline{\Phi_j'(z)}, \tag{2}$$

$$2\mu_j\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \varkappa_j\Phi_j(z) + \Phi_j(\overline{z}) - (z - \overline{z})\,\overline{\Phi_j'(z)} \tag{3}$$

за допомогою функції $\Phi_1(z)$, визначеної в S_1^- і S_1^+, та функції $\Phi_2(z)$, визначеної в S_2^+ і S_2^-.

Функції $\Phi_j(z)$ мають такі особливості:

$$\Phi_j(z) = -\frac{1}{2\pi}\left(\sum_k \frac{X_k^{(j)} + iY_k^{(j)}}{1 + \varkappa_j}\cdot\frac{1}{z - a_k^{(j)}}\right), \tag{4}$$

в S_1^-, якщо $j=1$, і в S_2^+, якщо $j=2$;

$$\Phi_j(z)=\frac{1}{2\pi}\sum_k\left[\frac{X_k^{(j)}-iY_k^{(j)}}{1+\varkappa_j}\cdot\frac{a_k^{(j)}-\overline{a}_k^{(j)}}{(z-\overline{a}_k^{(j)})^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\varkappa_j(X_k^{(j)}+iY_k^{(j)})}{(1+\varkappa_j)(z-\overline{a}_k^{(j)})}-\frac{iM_k^{(j)}}{(z-\overline{b}_k^{(j)})^2}\right] \tag{5}$$

в S_1^+, якщо $j=1$, і в S_2^-, якщо $j=2$. При умові, що $\lim\limits_{z\to t}(z-\overline{z})\Phi_j'(z)=0$ на L_0, за винятком, можливо, скінченного числа точок t, граничні умови задачі на основі (2) і (3) набирають вигляду

$$[\Phi_2(t)+\Phi_1(t)]^+-[\Phi_2(t)+\Phi_1(t)]^-=0 \text{ на } L_0, \tag{6}$$

$$(\Phi_2(t)-r_1\Phi_1(t)]^++r_2[\Phi_2(t)-r_1\Phi_1(t)]^-=0 \text{ на } L_0, \tag{7}$$

$$\Phi_j(t)-\Phi_j(\overline{t})+2ih_j(-1)^j\,\overline{\Phi_j'(t)}=f_j(x) \text{ на } L_j (j=1,2), \tag{8}$$

де $r_1=\frac{1+\varkappa_1}{r(1+\varkappa_2)}$, $r_2=\frac{r+\varkappa_1}{1+r\varkappa_2}$, $r=\mu_1/\mu_2$, $f_j(x)=Y_y-iX_y$ — відомі функції на L_j, згідно з припущенням, абсолютно інтегровані в інтервалі $(-\infty,+\infty)$ і задовольняють умови Діріхле на будь-якому кінцевому інтервалі змінної x. Значками $+$ та $-$ зверху квадратних дужок (6) і (7) позначені граничні значення функцій на L_0 із сторони S_j^+ і S_j^-.

Приймемо, що зовнішнє навантаження на L_1, L_2 і зосереджені навантаження статично зрівноважуються. Внаслідок цього функції $\Phi_j(z)\to 0$ при $|z|\to\infty$.

Позначимо праві частини (4) та (5) через $R_j(z)$ та $R_{0j}(z)$. У відповідності з (4) та (5) граничні умови (6) і (7) тотожно задовольняються, якщо покласти

$$\Phi_1(z)=R_1(z)+\frac{a}{r_2}R_2(z)+\frac{b}{r_2}R_{01}(z)+I_A(z)+$$
$$+\frac{b}{r_2}I_B(z)+\frac{a}{r_2}I_D(z) \quad \text{в } S_1^-,$$

$$\Phi_1(z)=dR_1(z)+R_{01}(z)+aR_{02}(z)+dI_A(z)+I_B(z)+aI_C(z) \text{ в } S_1^+.$$

$$\Phi_2(z)=ar_1R_1(z)+R_2(z)-bR_{02}(z)+ar_1I_A(z)-bI_C(z)+I_D(z) \text{ в } S_2^+, \tag{9}$$

$$\Phi_2(z)=-\frac{d}{r_2}R_2(z)+\frac{ar_1}{r_2}R_{01}(z)+R_{02}(z)+\frac{ar_1}{r_2}I_B(z)+$$
$$+I_C(z)-\frac{d}{r_2}I_D(z) \quad \text{в } S_2^-,$$

де

$$\frac{1+r_2}{1+r_1}=a;\quad \frac{r_2-r_1}{1+r_1}=b;\quad \frac{1-r_1r_2}{1+r_1}=d,$$

$$I_A(z)=\int_0^\infty A(\alpha)\,e^{i\alpha(z+ih_1)}\,d\alpha;\quad I_B(z)=\int_0^\infty B(\alpha)\,e^{-i\alpha(z-ih_1)}\,d\alpha;$$

$$I_C(z) = \int_0^\infty C(\alpha)\, e^{i\alpha(z+ih_2)}\, d\alpha; \quad I_D(z) = \int_0^\infty D(\alpha)\, e^{-i\alpha(z-ih_2)}\, d\alpha.$$

$A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$ — невідомі, взагалі комплекснозначні функції від дійсної змінної α.

Для визначення функцій $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$ використаємо формули (8) і (9). Тоді, якщо представимо інтегралами Лапласа функції

$$\frac{1}{(t_j - z_0)^n} = \frac{(-i)^n}{(n-1)!}\int_0^\infty \alpha^{n-1} e^{i\alpha(t_j - z_0)} d\alpha, \qquad (Im\, t > Im\, z_0),$$

$$\frac{1}{(t_j - z_0)^n} = \frac{i^n}{(n-1)!}\int_0^\infty \alpha^{n-1} e^{-i\alpha(t_j - z_0)} d\alpha, \qquad (Im\, t < Im\, z_0),$$

$$f_j(x) = \int_0^\infty [F_j(\alpha)\, e^{-i\alpha x} + F_j(-\alpha)\, e^{i\alpha x}]\, d\alpha, \tag{10}$$

де $F_j(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_j(x)\, e^{i\alpha x}\, dx$, $t_j = x + (-1)^j \cdot i\, h_j$, $(j = 1,2)$, z_0 — яка-небудь точка із точок a_k^j, b_k^j, $\bar{a}_k^j$, $\bar{b}_k^j$ і прирівняємо в підінтегральному виразі коефіцієнти при $e^{i\alpha x}$ і $e^{-i\alpha x}$ окремо, одержимо систему чотирьох рівнянь:

$$
\begin{aligned}
&(1 - de^{-2\alpha h_1})\, A(\alpha) + \frac{2\alpha h_1 b}{r_2} e^{-2\alpha h_1} \bar{B}(\alpha) - a e^{-\alpha(h_1+h_2)} C(\alpha) + \\
&\qquad + \frac{2\alpha h_1 a}{r_2} e^{-\alpha(h_1+h_2)} \bar{D}(\alpha) = k_1(\alpha); \\
&-2\alpha h_1 A(\alpha) + \left(\frac{b}{r_2} e^{-2\alpha h_1} - 1\right) \bar{B}(\alpha) + \frac{a}{r_2} e^{-\alpha(h_1+h_2)} \bar{D}(\alpha) = k_2(\alpha); \\
&a r_1 e^{-\alpha(h_1+h_2)} A(\alpha) - (b e^{-2\alpha h_2} + 1)\, C(\alpha) - 2\alpha h_2 \bar{D}(\alpha) = k_3(\alpha); \\
&2\alpha h_2 a r_1 e^{-\alpha(h_1+h_2)} A(\alpha) - \frac{a r_1}{r_2} e^{-\alpha(h_1+h_2)} \bar{B}(\alpha) - 2\alpha h_2 b e^{-2\alpha h_2} C(\alpha) + \\
&\qquad + \left[1 + \frac{de^{-2\alpha h_2}}{r_2}\right] \bar{D}(\alpha) = k_4(\alpha),
\end{aligned}
\tag{11}
$$

де

$$k_1(\alpha) = -\sum_{k=1}^{N} \Big\{ \Big[-id \cdot p_k^{(1)} + \frac{2\alpha h_1 b}{r_2}(p_k^{(1)} \alpha (a_k^{(1)} - \bar{a}_k^{(1)}) + i\varkappa_1 \bar{p}_k^{(1)})\Big] e^{-\alpha\left(h_1 + i a_k^{(1)}\right)} +$$

$$+ [\bar{p}_k^{(1)} (a_k^{(1)} - \bar{a}_k^{(1)} + 2ih_1)\alpha - i\varkappa_1 p_k^{(1)}]\, e^{-\alpha(h_1 + i\bar{a}_k^{(1)})} + a\Big[\bar{p}_k^{(2)} (a_k^{(2)} - \bar{a}_k^{(2)} +$$

$$+ 2\frac{ih_1}{r_2}\Big)\alpha - i\varkappa_2 p_k^{(2)}\Big] e^{-(\alpha(h_1 + i\bar{a}_k^{(2)})} - \frac{i\alpha M_k^{(1)}}{2\pi} e^{-\alpha\,(h_1 + i\bar{b}_k^{(1)})} -$$

$$-M_k^{(2)}\frac{i\alpha a}{2\pi}e^{-\alpha(h_1+i\overline{b}_k^{(2)})}-M_k^{(1)}\frac{ih_1 b}{\pi r_2}\alpha^2 e^{-\alpha(h_1+ib_k^{(1)})}\Big\}+F_1(-\alpha);$$

$$k_2(\alpha)=-\sum_{k=1}^{N}\Big\{i\overline{p}_k^{(1)}e^{-\alpha(h_1+i\overline{a}_k^{(1)})}+$$

$$+\frac{b}{r_2}\left[p_k^{(1)}\left(a_k^{(1)}-\overline{a}_k^{(1)}\right)\alpha+i\varkappa_1\overline{p}_k^{(1)}\right]e^{-\alpha(h_1+ia_k^{(1)})}+$$

$$+\frac{a}{r_2}i\overline{p}_k^{(2)}e^{-\alpha(h_1+i\overline{a}_k^{(2)})}-M_k^{(1)}\frac{i\alpha b}{2\pi r_2}e^{-\alpha(h_1+ib_k^{(1)})}\Big\}+\overline{F}_1(\alpha);$$

$$k_3(\alpha)=-\sum_{k=1}^{N}\Big\{-b\left[i\varkappa_2 p_k^{(2)}-\alpha\left(a_k^{(2)}-\overline{a}_k^{(2)}\right)\overline{p}_k^{2}\right]e^{-\alpha(h_2+i\overline{a}_k^{(2)})}+$$

$$+ip_k^{(2)}e^{-\alpha(h_2+ia_k^{(2)})}+i\alpha r_1 p_k^{(1)}e^{-\alpha(h_2+ia_k^{(1)})}-M_k^{(2)}\frac{i\alpha b}{2\pi}e^{-\alpha(h_2+ib_k^{(2)})}\Big\}+$$

$$+F_2(-\alpha);$$

$$k_4(\alpha)=-\sum_{k=1}^{N}\Big\{\frac{a r_1}{r_2}\left[p_k^{(1)}\left(\overline{a}_k^{(1)}-a_k^{(1)}+2ih_2 r_2\right)\alpha-i\varkappa_1\overline{p}_k^{(1)}\right]e^{-\alpha(h_2+ia_k^{(1)})}+$$

$$+\left[p_k^{(2)}\left(\overline{a}_k^{(2)}-a_k^{(2)}+2ih_2\right)\alpha-i\varkappa_2\overline{p}_k^{(2)}\right]e^{-\alpha(h_2+ia_k^{(2)})}+\Big[i\overline{p}_k^{(2)}\frac{d}{r_2}-$$

$$-2\alpha h_2 b\left(\overline{p}_k^{(2)}\left(\overline{a}_k^{(2)}-a_k^{(2)}\right)\alpha+i\varkappa_2 p_k^{(2)}\right)\Big]e^{-\alpha(h_2+i\overline{a}_k^{(2)})}+$$

$$+M_k^{(1)}\frac{i\alpha a r_1}{2\pi r_2}e^{-\alpha(h_2+ib_k^{(1)})}+M_k^{(2)}\frac{i\alpha}{2\pi}e^{-\alpha(h_2+ib_k^{(2)})}-$$

$$-M_k^{(2)}\frac{i\alpha^2 h_2 b}{\pi}e^{-\alpha(h_2+i\overline{b}_k^{(2)})}\Big\}+\overline{F}_2(\alpha);$$

$$p_k^{(1)}=\frac{X_k^{(1)}+iY_k^{(1)}}{2\pi(1+\varkappa_1)};\quad p_k^{(2)}=\frac{X_k^{(2)}+iY_k^{(2)}}{2\pi(1+\varkappa_2)}.$$

При $h_j\to\infty$ із системи (11) знаходимо, що $A(\alpha)=B(\alpha)=C(\alpha)=D(\alpha)=0$. Отже, пружна рівновага спаяних із різних матеріалів півплощин під дією зосереджених сил і моментів визначається формулами (9), якщо покласти в них інтегральні члени рівними нулеві.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
2. С. Е. Бирман. К задаче об упругом равновесии составной полосы. ДАН СССР, т. 62, 2 (1948).
3. М. П. Шереметьєв, Д. Г. Хлебніков. Згин нескінченної смуги з підкріпленим краєм. Прикладна механіка, 2 (1961).
4. Ю. А. Шевляков, А. К. Приварников. До розрахунку шаруватих основ. Прикладна механіка, т. 8, 2 (1962).
5. І. О. Прусов. Стиснення пружних півплощин. Питання механіки і математики. Вид. ЛДУ, вип. 2, 1962.