ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

Ж. В. СТАРОВОЙТЕНКО

РІВНОВАГА СМУГИ ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ І ЗОСЕРЕДЖЕНИХ МОМЕНТІВ

Розглянемо смугу $0 < y < h$ (область S^+), на яку діють зосереджені сили $P_k = X_k + iY_k$, прикладені в довільних точках a_k, $(a_k = x_k + iy_k)$, $(k = 1, 2, \ldots, N_1)$, і зосереджені моменти M_k, прикладені в точках b_k $(k = 1, 2, \ldots, N_2)$. Точки a_k і b_k належать області S^+.

Розв'язок задачі про пружну рівновагу безмежної смуги, навантаженої лише по контуру, наведений в праці [2].

Задача про рівновагу смуги під дією зосереджених сил методом операційного числення розв'язана в праці [3].

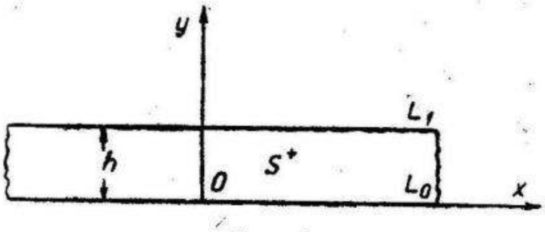

Рис. 1.

Напружений стан у смузі визначається за допомогою функцій Колосова—Мусхелішвілі $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$, поширених і на область S^- $(-h < y < 0)$, формулами [1]:

$$X_x + Y_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \tag{1}$$

$$Y_y - iX_y = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \tag{2}$$

$$2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \varkappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \tag{3}$$

де μ і $\varkappa$ — постійні матеріалу смуги.

При умові, що

$$\lim_{z \to t}(z - \bar{z})\Phi'(z) = 0 \text{ на } L_0,$$

за винятком, можливо, скінченного числа точок t, граничні умови задачі на основі (2) і (3) запишуться у вигляді

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 0 \text{ на } L_0, \tag{4}$$

$$\Phi(t) - \Phi(\bar{t}) + 2ih\overline{\Phi'(t)} = 0 \text{ на } L_1. \tag{5}$$

Значками $+$ і $-$ зверху функцій у формулі (4) позначені граничні значення функцій на L_0 зі сторони S^+ і S^-.

Приймемо, що зовнішні навантаження статично зрівноважуються. Внаслідок цього функція $\Phi(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$.

Гранична умова (4) задовольняється, якщо покласти

$$\Phi(z) = A_1 + B_1 + \int_0^\infty A(\alpha) e^{i\alpha(z+ih)} d\alpha + \int_0^\infty B(\alpha) e^{-i\alpha(z-ih)} d\alpha, \qquad (6)$$

де

$$A_1 = -\sum_{k=1}^{N_1} \frac{X_k + iY_k}{2\pi(1+\varkappa)} \cdot \frac{1}{z-a_k}$$

(особливість функції $\Phi(z)$ в S^+),

$$B_1 = -\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \sum_{k=1}^{N_1} \frac{(X_k - iY_k)(\bar{a}_k - a_k)}{(z-\bar{a}_k)^2} + \frac{\varkappa(X_k + iY_k)}{z-\bar{a}_k}\Bigg] -$$

$$-\sum_{k=1}^{N_2} \frac{iM_k}{2\pi} \frac{1}{(z-\bar{b}_k)^2}$$

(особливість функції $\Phi(z)$ в S^-).

$A(\alpha)$, $B(\alpha)$ — невідомі, взагалі комплекснозначні функції від дійсної змінної α.

Функції, що входять у вирази A_1 і B_1, представимо інтегралами Лапласа

$$\frac{1}{(t-z_0)^n} = \frac{(-i)^n}{(n-1)!} \int_0^\infty \alpha^{n-1} e^{i\alpha(t-z_0)} d\alpha \qquad (Im\, t > Im\, z_0),$$

$$\frac{1}{(t-z_0)^n} = \frac{(i)^n}{(n-1)!} \int_0^\infty \alpha^{n-1} e^{-i\alpha(t-z_0)} d\alpha \qquad (Im\, t < Im\, z_0)$$

(z_0 — яка-небудь точка із a_k, b_k) і скористаємось формулою (5).

Прирівнюючи в підінтегральному виразі коефіцієнти при $e^{i\alpha x}$ та $e^{-i\alpha x}$, одержимо для визначення $A(\alpha)$ і $B(\alpha)$ два рівняння:

$$(e^{-2\alpha h} - 1) A(\alpha) - 2\alpha h \bar{B}(\alpha) = k_1(\alpha),$$

$$2\alpha h e^{-2\alpha h} A(\alpha) + (1 - e^{-2\alpha h}) \bar{B}(\alpha) = k_2(\alpha),$$

$$k_1(\alpha) = -\sum_{k=1}^{N_1} \left\{ i p_k e^{-\alpha(h+ia_k)} - [\bar{p}_k (a_k - \bar{a}_k)\alpha - i\varkappa p_k] e^{-\alpha(h+i\bar{a}_k)} \right\} -$$

$$-\sum_{k=1}^{N_2} \frac{M_k i\alpha}{2\pi} e^{-\alpha(h+i\bar{b}_k)};$$

$$k_2(\alpha) = -\sum_{k=1}^{N_1} \Big\{ -i\bar{p}_k + 2h\alpha^2 \bar{p}_k (\bar{a}_k - a_k) + 2i\alpha h\varkappa p_k] e^{-\alpha(h+i\bar{a}_k)} +$$

$$+ [p_k(\bar{a}_k - a_k)\alpha - i\varkappa\bar{p}_k + 2i\alpha h p_k] e^{-\alpha(h+ia_k)} \Big\} -$$

$$-\sum_{k=1}^{N_2} M_k \frac{i\alpha^2 h}{\pi} e^{-\alpha(h+i\bar{b}_k)} - \sum_{k=1}^{N_2} M_k \frac{i\alpha}{2\pi} e^{-\alpha(h+ib_k)};$$

$$p_k = \frac{X_k + i\,Y_k}{2\pi(1+\varkappa)}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.

2. С. Е. Бирман. К задаче об упругом равновесии бесконечной полосы. ДАН СССР, т. 62, 2 (1948).

3. А. И. Лурье. Операционное исчисление. Гостехиздат, 1951.