С. В. ДЕНИСКО

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ ПРЯМОЛІНІЙНОЇ КОНГРУЕНЦІЇ, СКЛАДЕНОЇ З ДОТИЧНИХ ДО ЛІНІЙ КРИВИНИ

В статті доводиться така теорема:

Теорема. Віддаль між фокальними точками прямолінійної конгруенції, складеної з дотичних до ліній кривини одного сімейства, дорівнює абсолютній величині радіуса геодезичної кривини ортогональних траєкторій цього сімейства.

Доведення. Рівняння конгруенції дотичних до ліній кривини одного сімейства поверхні $\overline{r}(u^1, u^2)$ запишемо в вигляді

$$\overline{R}=\overline{r}(u^1, u^2)+\lambda\overline{a}(u^1, u^2), \tag{1}$$

де $\overline{a}$ — одиничний вектор.

Візьмемо таку лінійчату поверхню цієї конгруенції, яка б дотикалась поверхні $\overline{r}(u^1, u^2)$ вздовж ортогональної траєкторії поля вектора $\overline{a}$. Оскільки лінії кривини утворюють спряжену сітку, то ця поверхня є розгортна, а отже, точка її ребра звороту є фокус конгруенції. Згідно з (1), абсциса цього фокуса знаходиться за формулою

$$\lambda_0=-\frac{\delta\overline{a}\,\delta\overline{r}}{\delta\overline{a}^2} \tag{2}$$

(δ — символ диференціювання вздовж ортогональної траєкторії поля вектора $\overline{a}$).

Відомо, що [1]

$$d\overline{a}=(\alpha_i\tilde{\overline{a}}+\pi_{ij}a^j\overline{n})\,du^i, \tag{3}$$

де a^j — контраваріантна координата вектора $\overline{a}$, α_i і $\tilde{\overline{a}}$ — відповідно трансверсальний і доповняльний вектори поля $\overline{a}$, а π_{ij} — другий основний тензор поверхні $\overline{r}(u^1, u^2)$, для якої одиничний вектор $\overline{n}$ є нормальним.

Оскільки на поверхні $\overline{r}(u^1, u^2)$ напрями векторів $\overline{a}$ і $\tilde{\overline{a}}$ спряжені, то має місце рівність

$$\pi_{ij}a^i\tilde{a}^j=0. \tag{4}$$

Очевидно,

$$\frac{\tilde{a}^1}{\delta u^1}=\frac{\tilde{a}^2}{\delta u^2}. \tag{5}$$

Згідно з (3), (4) і (5),

$$\delta\bar{a}=\alpha_i\delta u^i\bar{\tilde{a}}. \tag{6}$$

Підставивши (6) в (2), дістанемо

$$\lambda_0=-\frac{\tilde{a}_j\delta u^j}{\alpha_i\delta u^i},$$

або, в силу (5),

$$\lambda_0=-\frac{1}{\alpha_i\tilde{a}^i}. \tag{7}$$

Але

$$\alpha_i\tilde{a}^i=k_{\tilde{a}},$$

де $k_{\tilde{a}}$ — геодезична кривина ортогональної траєкторії поля вектора $\bar{a}$ [1]. Тому (7) набирає вигляду

$$\lambda_0=-\frac{1}{k_{\tilde{a}}}.$$

Беручи до уваги останню рівність, а також враховуючи, що точка дотику променя конгруенції (1) до поверхні $\bar{r}(u^1, u^2)$ є фокус цієї конгруенції, переконуємось у справедливості теореми.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. П. Норден. Теория поверхностей. М., Гостехиздат, 1956.

С. В. ДЕНИСКО

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ КОНГРУЭНЦИИ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ КАСАТЕЛЬНЫХ К ЛИНИЯМ КРИВИЗНЫ

(резюме)

В статье доказана следующая теорема.

Теорема. Расстояние между фокальными точками прямолинейной конгруэнции, составленной из касательных к линиям кривизны одного семейства, равно абсолютной величине радиуса геодезической кривизны ортогональных траекторий этого семейства.