

Є. С. ДОРОЖОВСЬКИЙ, Б. М. КОРДУБА, В. Г. КОСТЕНКО

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ПЛОСКОЇ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ

В даній роботі зовнішня задача Діріхле для плоскої електростатики в необмеженій області розв'язується методом Г. М. Положого [1] шляхом зведення останньої до внутрішньої задачі в прямокутнику для рівняння Пуассона.

Використовуючи симетрію задачі, вдалося на машині «Урал-1» розв'язати систему алгебраїчних рівнянь, яка при цьому виникає, а також за порівняно простою формулою сумарних зображень знайти поле потенціалу.

§ 1. ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ГРАНИЦІ І ГРАНИЧНИХ УМОВ

Нехай між двома відрізками паралельних прямих (екранами) довільної довжини, віддалі між якими 120 мм, симетрично розміщені три пари паралельних електродів (щілин) однакової довжини 15 мм,

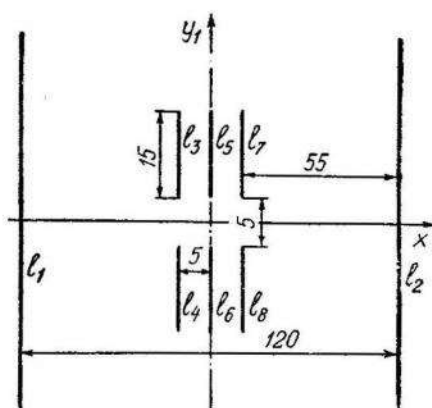


Рис. 1

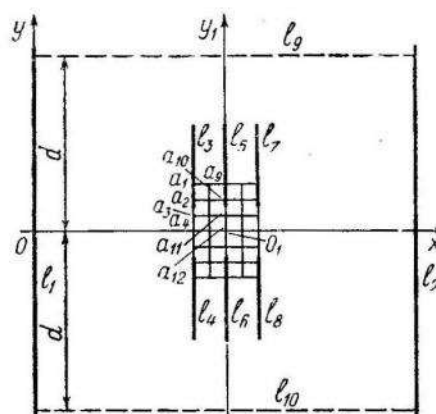


Рис. 2

а віддалі між двома сусідніми електродами 5 мм (рис. 1). На екранах і прилеглих до них електродах задається потенціал $u=1$, а на інших електродах $u=0$. При цих умовах необхідно знайти поле потенціалу даної системи, причому в першу чергу найбільший інтерес являє собою частина поля R , що лежить між електродами.

Математично задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

на площині при заданих граничних умовах

$$\begin{aligned} u &= 1 \text{ на } l_1, l_2, l_3, l_4, l_7, l_8; \\ u &= 0 \text{ на } l_5, l_6. \end{aligned} \quad (2)$$

Природно замінити задачу (1), (2) для необмеженої області такою ж задачею для обмеженої області, наприклад прямокутника. Замкнемо систему в прямокутник, провівши для цього на одній і тій же віддалі d по обидві сторони від осі ox два відрізки паралельних прямих l_9 і l_{10} до перетину з екранами. Для збереження між l_1, l_3, l_4 і між l_2, l_7, l_8 приблизно однорідного поля задамо на l_9 і l_{10} $u=1$.

Таким чином, приходимо до внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (1)$$

в прямокутнику з щілинами при граничних умовах

$$\begin{aligned} u &= 1 \text{ на } l_1, l_2, l_3, l_4, l_7, l_8, l_9, l_{10}; \\ u &= 0 \text{ на } l_5, l_6. \end{aligned} \quad (3)$$

Нижче буде визначено віддаль d , при якій вплив границі і граничних умов на l_9 і l_{10} в межах потрібної точності не буде впливати на значення розв'язку задачі (1), (2) в області, що нас цікавить.

Спочатку розглядалася задача (1), (3) в прямокутнику розміром 120×60 мм ($d=30$ мм), яка була замінена задачею Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta U = q(x, y) \quad (4)$$

в тому ж прямокутнику, де $q(x, y)=0$ всюди всередині прямокутника, за винятком щілин, а на останніх $q(x, y)$ знаходиться із умов, щоб

$$U(x, y)|_{l_3, \dots, l_8} = u(x, y)|_{l_3, \dots, l_8}. \quad (5)$$

Крім того,

$$U(x, y)|_{l_1, l_2, l_9, l_{10}} = u(x, y)|_{l_1, l_2, l_9, l_{10}} = 1. \quad (6)$$

Таким чином, задача (1), (3) для многозв'язної області після визначення $q(x, y)$ із умов (5) зводиться до задачі (4), (6) в однозв'язній області.

Методом, який буде викладено нижче, задача (4), (5), (6) розв'язувалась послідовно при $d=30, 60, 90, 120$ мм при одних і тих самих кроках h і h_1 сітки. Виявилося, що при $d=90$ мм і 120 мм розв'язки задачі (4), (5), (6) в області R , що нас цікавить, збігаються з точністю до п'яти знаків. Через це було вибрано прямокутник розміром 120×180 мм і досліджено вплив граничних умов на значення потенціалу в області R . Очевидно, що найменші значення потенціалу задачі (1), (2) на горизонтальних перетинах системи прямими будуть знаходитися в точках перетину цих прямих з віссю o_1y_1 (рис. 2). Якщо на l_9 і l_{10} задати потенціал $U_0 < 1$, а потім підрахувати $U(x, y)$ на осі o_1y_1 , і знайдеться при цьому така вузлова точка на ній, наприклад, на відрізку від електрода l_5 до l_9 , в якій виявиться потенціал $U_1 > U_0$, то, очевидно, задано на l_9 і l_{10} потенціал менший, ніж мінімальне значення потенціалу на l_9 і l_{10} задачі (1), (2). Потім одержане значення U_1 задаємо на l_9 і l_{10} і знову знаходимо $U(x, y)$ на тому ж відрізку осі o_1y_1 . Якщо

при цьому знайдеться така вузлова точка, в якій $U_2 > U_1$, то аналогічно повторюємо даний процес доти, доки максимальне значення потенціалу не виявиться в точці перетину осі $o_1 y_1$ з l_9 і l_{10} . Спочатку було вибрано на l_9 і l_{10} $U_0 = 0,8$ і за вищевказаним способом на машині «Урал-1» знайдено, що значення потенціалу для задачі (1), (2) на горизонтальних прямих l_9 і l_{10} буде знаходитися в межах $0,945003 \leq U \leq 1$.

Після розв'язання задачі (4), (5), (6) при граничних умовах на l_9 і l_{10} $U=1$ і $U=0,945003$ виявилось, що в області R значення потенціалу відрізняються лише в п'ятому знаці. У зв'язку з цим остаточно було вибрано прямокутник розміром 120×180 мм і розглянена в ньому задача (4), (5), (6), розв'язок якої в області R буде відрізнятися від розв'язку задачі (1), (2) лише в п'ятому знаці.

§ 2. РОЗРАХУНОК ПОЛЯ ПЛОСКОЇ ЕЛЕКТРОННОЇ ЛІНЗИ

Розв'язок задачі (4), (5), (6) в прямокутнику розміром 120×180 мм знаходимо за методом Г. М. Положого.

Виберемо прямокутну рівномірну сітку з горизонтальним кроком $h = 0,1$ мм і вертикальним $h_1 = 5/3$ мм. Тоді

$$\gamma = \frac{h}{h_1} = 0,06;$$

$$\eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2 \cos \frac{k\pi}{108} > 1;$$

$$\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}; \quad \nu_k = \frac{1}{\mu_k} = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1} \quad (k=1, \dots, 107).$$

Формула сумарних зображень

$$\vec{U}(x_i) = P\Phi(i)\vec{A} + P\Psi(i)\vec{B} + P \sum_{j=1}^{i-1} G(i-j)P[h^2\vec{q}(x_j) - \gamma^2\vec{\omega}(x_j)], \quad (7)$$

де матриця

$$P = \sqrt{\frac{2}{108}} \left\| \sin \frac{ij\pi}{108} \right\|_{i,j=1}^{107};$$

$\Phi(i)$, $\Psi(i)$, $G(i-j)$ — діагональні матриці;

$$\Phi(i) = [\mu_1^i, \dots, \mu_{107}^i]; \quad \Psi(i) = [\nu_1^i, \dots, \nu_{107}^i];$$

$$G(i-j) = \left[\frac{\mu_1^{i-j} - \nu_1^{i-j}}{\mu_1 - \nu_1}, \dots, \frac{\mu_{107}^{i-j} - \nu_{107}^{i-j}}{\mu_{107} - \nu_{107}} \right];$$

$$\vec{A}, \vec{B}, \vec{q}(x_{550}), \vec{q}(x_{600}), \vec{q}(x_{650}), \vec{\omega}(x_j) —$$

n -мірні вектори ($n=107$);

$$\vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{107});$$

$$\vec{B} = (B_1, B_2, \dots, B_{107});$$

$$\vec{q}(x_{550}) = \vec{q}(x_{650}) = (0, \dots, (43) \dots 0, q_1, \dots, q_9, 0, 0, 0, q_9, \dots, q_1, 0, \dots, (43) \dots 0);$$

$$\vec{q}(x_{600}) = (0, \dots, (43) \dots 0, q_{10}, \dots, q_{18}, 0, 0, 0, q_{18}, \dots, q_{10}, 0, \dots, (43) \dots 0);$$

$$\vec{\omega}(x_j) = (1, 0, \dots, (105) \dots 0, 1),$$

дає розв'язок задачі (4), (6), якщо $q(x_{550})$ і $q(x_{600})$ визначити з умови (5).

Форма стовпців $q(x_{550})$, $q(x_{600})$, $q(x_{650})$ впливає із симетрії розглядуваної задачі відносно осей ox і o_1y_1 .

Легко показати, що розв'язок, який визначається формулою (7), виявиться симетричним відносно осі ox тільки тоді, коли $A_{2m} = B_{2m} = 0$ ($m = 1, \dots, 53$). Помножуючи рівність (7) на матрицю P зліва і враховуючи, що $PP = E$ (одинична матриця), одержимо

$$P \vec{U}(x_i) = \vec{U}(x_i) = \Phi(i) \vec{A} + \Psi(i) \vec{B} + \sum_{j=1}^{i-1} G(i-j) P [h^2 \vec{q}(x_j) - \gamma^2 \vec{\omega}(x_j)]. \quad (7')$$

Звідси

$$\vec{U}(x_0) = P \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{107} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{107} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{107} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \vec{U}(x_{1200}) = P \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 \mu_1^{1200} \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{107} \mu_{107}^{1200} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \nu_1^{1200} \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{107} \nu_{107}^{1200} \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_{j=1}^{1199} G(1200-j) P [h^2 \vec{q}(x_j) - \gamma^2 \vec{\omega}(x_j)] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{107} \end{pmatrix}, \quad (9) \end{aligned}$$

де α_k ($k = 1, \dots, 107$) — сума всіх елементів k -го рядка матриці P , причому $\alpha_{2m} = 0$ ($m = 1, \dots, 53$), бо для довільних натуральних i, j, n

$$\sin \frac{i(n+1-j)\pi}{n+1} = (-1)^{i-1} \sin \frac{ij\pi}{n+1}.$$

Компоненти стовпця (вектора)

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{1199} G(1200-j) P [h^2 \vec{q}(x_j) - \gamma^2 \vec{\omega}(x_j)] = \\ &= h^2 [G(650) P \vec{q}(x_{550}) + G(600) P \vec{q}(x_{600}) + G(550) P \vec{q}(x_{650})] - \\ &\quad - \gamma^2 \sum_{j=1}^{1199} G(1200-j) P \vec{\omega}(x_j) \end{aligned}$$

з парними індексами також будуть нулями, через те з (8) і (9) для $m=1, \dots, 53$ маємо

$$\begin{aligned} A_{2m} + B_{2m} &= 0; \\ A_{2m} \mu_{2m}^{1200} + B_{2m} \nu_{2m}^{1200} &= 0, \end{aligned}$$

а оскільки $\mu_{2m} > 1$, $\nu_{2m} < 1$, то $A_{2m} = B_{2m} = 0$, що і забезпечує симетрію відносно осі ox розв'язку, який визначається за формулою (7).

Компоненти стовпця

$$\sum_{j=1}^{1199} G(1200-j) P_{\omega}(x_j)$$

з непарними індексами являють собою різниці геометричних прогресій і, таким чином, легко визначаються.

Визначаючи A_{2m+1} і B_{2m+1} ($m=0, 1, \dots, 53$) з (8) і (9) і підставляючи їх в (7), після елементарних перетворень з використанням співвідношення

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{i=1}^n \sin \frac{ik\pi}{n+1} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \frac{2\gamma^2 \sin \frac{k\pi}{n+1}}{(\mu_k - 1)(1 - \nu_k)}$$

($k=1, 3, 5, \dots, n=107$), яке легко перевіряється, знаходимо непарні

компоненти $\tilde{U}_k(x_i)$ стовпця $\tilde{U}(x_i)$:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_k(x_i) &= \alpha_k - 2h^2 \frac{\mu_k^i - \nu_k^i}{\mu_k^{1200} - \nu_k^{1200}} \left[\frac{\mu_k^{650} - \nu_k^{650} + \mu_k^{550} - \nu_k^{550}}{\mu_k - \nu_k} \Phi_k + \frac{\mu_k^{600} - \nu_k^{600}}{\mu_k - \nu_k} \Psi_k \right] + \\ &+ 2h^2 \frac{\mu_k^{i-550} - \nu_k^{i-550}}{\mu_k - \nu_k} \Phi_k, \quad (k=1, 3, \dots, 107), \end{aligned} \quad (10)$$

де $2\Phi_k$ і $2\Psi_k$ — добутки k -го рядка матриці P відповідно на стовпці $\vec{q}(x_{550})$ і $\vec{q}(x_{600})$.

Останній доданок у формулі (10) слід брати тільки при $i > 550$.

Враховуючи, крім того, що парні компоненти стовпця $\tilde{U}(x_i)$ рівні нулеві, визначаємо потім поле потенціалу за формулою

$$\vec{U}(x_i) = P \vec{U}(x_i). \quad (11)$$

При вказаному виборі стовпців $\vec{q}(x_{550}) = \vec{q}(x_{650})$ і $\vec{q}(x_{600})$ поле потенціалу буде симетричним відносно осей лінзи, так що його розрахунок досить провести в одній з чотирьох частин області R , що лежить між осями ox і oy_1 .

Перше, ніж використовувати формули (10) і (11) для практичного розрахунку, необхідно визначити стовпці $\vec{q}(x_{550})$ і $\vec{q}(x_{600})$ з умов (5).

Формула (7) при знайдених $\vec{A}$ і $\vec{B}$ з рівнянь (8) і (9) дозволяє скласти систему 18 рівнянь для визначення $q_1, \dots, q_{18}$.

Справді, якщо взяти компоненти $U_{44}(x_{550}), \dots, U_{52}(x_{550})$ стовпця $\vec{U}(x_{550})$ і $U_{44}(x_{600}), \dots, U_{52}(x_{600})$ стовпця $\vec{U}(x_{600})$ і прирівняти їх до значень $U(x, y)$ на відповідних електродах, то одержимо

$$\begin{aligned} U_{44}(x_{550}) &= \dots = U_{52}(x_{550}) = 1; \\ U_{44}(x_{600}) &= \dots = U_{52}(x_{600}) = 0. \end{aligned}$$

Після деяких спрощень остання система рівнянь приводиться до вигляду

$$h^2 \sqrt{\frac{2}{108}} \left\{ \sin \frac{i\pi}{108} C_1^{(1)} + \sin \frac{3i\pi}{108} C_3^{(1)} + \dots + \sin \frac{107i\pi}{108} C_{107}^{(1)} \right\} = 0$$

$$(i=44, \dots, 52);$$

$$h^2 \sqrt{\frac{2}{108}} \left\{ \sin \frac{i\pi}{108} C_1^{(2)} + \sin \frac{3i\pi}{108} C_3^{(2)} + \dots + \sin \frac{107i\pi}{108} C_{107}^{(1)} \right\} = 1, \quad (12)$$

$$(i=44, \dots, 52),$$

де

$$C_k^{(1)} = \frac{\mu_k^{550} - \nu_k^{550}}{\mu_k^{1200} - \nu_k^{1200}} \left(\frac{\mu_k^{650} - \nu_k^{650} + \mu_k^{550} - \nu_k^{550}}{\mu_k - \nu_k} 2\varphi_k + \frac{\mu_k^{600} - \nu_k^{600}}{\mu_k - \nu_k} 2\psi_k \right);$$

$$C_k^{(2)} = \frac{\mu_k^{600} - \nu_k^{600}}{\mu_k^{1200} - \nu_k^{1200}} \left(\frac{\mu_k^{650} - \nu_k^{650} + \mu_k^{550} - \nu_k^{550}}{\mu_k - \nu_k} 2\varphi_k + \frac{\mu_k^{600} - \nu_k^{600}}{\mu_k - \nu_k} 2\psi_k \right) - \frac{\mu_k^{50} - \nu_k^{50}}{\mu_k - \nu_k} 2\varphi_k.$$

$$(k=1, 3, \dots, 107).$$

Коефіцієнти системи (12) при $q_1, \dots, q_{18}$, а також її розв'язок знаходилися на машині «Урал-1» за допомогою нижче наведеного алгоритму. Так, наприклад, коефіцієнти при $q_1, \dots, q_9$ першого рівняння системи (12) одержуються шляхом матричних множень 44-го рядка матриці P на діагональну матрицю M , а потім на 44-й, ..., 52-й стовпці матриці P відповідно; коефіцієнти при $q_{10}, \dots, q_{18}$ одержуються таким же чином з заміною M на N , де $M = [M_1, 0, M_3, \dots, 0, M_{107}]$, $N = [N_1, 0, N_3, \dots, 0, N_{107}]$ — діагональні матриці

$$M_k = \frac{\mu_k^{550} - \nu_k^{550}}{\mu_k^{1200} - \nu_k^{1200}} \frac{\mu_k^{650} - \nu_k^{650} + \mu_k^{550} - \nu_k^{550}}{\mu_k - \nu_k};$$

$$N_k = \frac{\mu_k^{550} - \nu_k^{550}}{\mu_k^{1200} - \nu_k^{1200}} \frac{\mu_k^{600} - \nu_k^{600}}{\mu_k - \nu_k}.$$

Коефіцієнти при $q_1, \dots, q_{18}$ в рівняннях 10-му, ..., 18-му одержуються аналогічно з заміною M на $D=2N$, а N на L , де $L = [L_1, 0, L_3, \dots, 0, L_{107}]$ — діагональна матриця;

$$L_k = \frac{\mu_k^{600} - \nu_k^{600}}{\mu_k^{1200} - \nu_k^{1200}} \cdot \frac{\mu_k^{600} - \nu_k^{600}}{\mu_k - \nu_k}.$$

Наведемо одержані розв'язки системи (12):

$$\begin{array}{lll} q_1 = -2,67413288, & q_7 = -2,08982148, & q_{13} = 4,04628036, \\ q_2 = -2,10746734, & q_8 = -2,15679288, & q_{14} = 4,02365408, \\ q_3 = -2,07640248, & q_9 = -2,86814022, & q_{15} = 4,03016458, \\ q_4 = -2,07414378, & q_{10} = 6,71528776, & q_{16} = 4,07999798, \\ q_5 = -2,07392362, & q_{11} = 4,45520488, & q_{17} = 4,29559054, \\ q_6 = -2,07688882, & q_{12} = 4,13167588, & q_{18} = 6,01150428, \end{array}$$

а також частину поля області R , яку знайдено на машині «Урал-1» за формулами (10) і (11).

$$\begin{array}{lll} U(a_1) = 0,999999990, & U(a_5) = 0,512817898, & U(a_9) = 0,000000108, \\ U(a_2) = 0,999999996, & U(a_6) = 0,532734096, & U(a_{10}) = 0,000000362, \\ U(a_3) = 0,823573202, & U(a_7) = 0,570955280, & U(a_{11}) = 0,385614520, \\ U(a_4) = 0,792885028, & U(a_8) = 0,586709876, & U(a_{12}) = 0,457856240. \end{array}$$

Не викликає після цього великих труднощів знаходження траєкторій розглядуваної електронної лінзи. Однак ми викладемо це питання в роботі, присвяченій більш важливій електронно-оптичній системі.

Примітка. При підрахунку поля всередині прямокутника з постійними граничними умовами $U=a$ на його границі за допомогою заміни $U=V+a$ можна було б дещо простіше одержати розрахункові формули для поля і коефіцієнтів системи рівнянь для визначення $q(x, y)$. Однак використаний тут спосіб спрощення може виявитися корисним при розгляді подібних задач з різними постійними умовами на різних сторонах прямокутника.

ЛІТЕРАТУРА

1. Г. Н. Положий. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд. Киев. ун-та, 1962.

Е. С. ДОРОЖОВСКИЙ, Б. М. КОРДУБА, В. Г. КОСТЕНКО

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

(резюме)

В работе решается внешняя задача Дирихле для плоской электростатики в неограниченной области методом Г. Н. Положего путем сведения последней к внутренней задаче в прямоугольнике для уравнения Пуассона.

Используя симметрию задачи, на ЭВМ решена возникающая при этом система алгебраических уравнений, а также по сравнительно простой формуле суммарных представлений найдено поле потенциала.