О. М. КОСТОВСЬКИЙ

ЗАСТОСУВАННЯ ДОБУТКІВ ЛОБАЧЕВСЬКОГО—ГРЕФФЕ В МЕТОДАХ ЧИСЕЛЬНОГО ВИЗНАЧЕННЯ НУЛІВ ФУНКЦІЙ

§ 1. ДОБУТОК ЛОБАЧЕВСЬКОГО—ГРЕФФЕ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Нехай D область, яка є кругом або кільцем з центром в початку координат.

Означення I. Функція $f(z)$ називається парною функцією k-го порядку в області D, якщо $f(\varepsilon_0 z)=f(\varepsilon_1 z)=\ldots=f(\varepsilon_{k-1}z)$ для всіх значень z даної області. ε_i — означають корені k-ої степені із одиниці.

Зокрема, при $k=2$ дістанемо звичайне означення парної функції.

Теорема I. Для того щоб ряд Лорана (ряд Тейлора або поліном) був парною функцією k-го порядку в області D, необхідно і достатньо, щоб змінна входила тільки в степенях, кратних k.

Дійсно, якщо ряд Лорана зображає функцію, парну k-го порядку, то

$$f(z)=\frac{1}{k}\left[f(\varepsilon_0 z)+f(\varepsilon_1 z)+\ldots+f(\varepsilon_{k-1}z)\right]=$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{i=-\infty}^{\infty}(\varepsilon_0^i+\varepsilon_1^i+\ldots+\varepsilon_{k-1}^i)\,a_i z^i=\frac{1}{k}\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{ki}\,kz^{ki}=\sum_{i=-\infty}^{\infty}a_{ki}z^{ki}.$$

Обернене твердження очевидне.

Означення II. Добутком Лобачевського—Греффе k-го роду* функцій $f_0(z)$, $f_1(z),\ldots,f_{k-1}(z)$, заданих в області D, називається функція

$$F_k(z)=\frac{1}{k!}\sum\prod_{j=0}^{k-1} f_{i_j}(\varepsilon_j z)=\frac{1}{k!}\sum\prod_{j=0}^{k-1} f_j(\varepsilon_{i_j}z), \tag{1}$$

де сумування поширюється на всі $k!$ перестановок індексів $0, 1, 2, \ldots, k-1$. Далі добуток Лобачевського—Греффе k-го роду (або скорочено ДЛГ (k)) будемо позначати символом $\odot$ і писати

$$F_k(z)=f_0\odot f_1\odot\ldots\odot f_{k-1}=\bigodot_{j=0}^{k-1} f_j.$$

* Або перетворення Лобачевського—Греффе k-го роду.

Із визначення парної функції k-го порядку безпосередньо витікає.

Теорема II. ДЛГ (k) є парною функцією k-го порядку.

Таким чином, якщо функції $f_i(z)$ є рядами Лорана, які мають спільну область D збіжності, то ДЛГ (k) від цих функцій також буде рядом Лорана (відповідно поліномом або степеневим рядом), збіжним в області D. Причому даний ряд Лорана містить змінну тільки в степенях, кратних числу k.

В окремих випадках формула (1) запишеться так:

I. Якщо $f_0 \equiv f_1 \equiv \ldots \equiv f_{k-1} \equiv f$, то

$$F_k(z) = f_k(z^k) = f \odot f \odot \ldots \odot f = f(\varepsilon_0 z) \cdot f(\varepsilon_1 z) \ldots f(\varepsilon_{k-1} z). \quad (2)$$

II. Якщо $f_0 \equiv f_1 \equiv \ldots \equiv f_{k-2} \equiv f$, $f_{k-1} = g$, то

$$g_k(z^k) = f \odot f \odot \ldots \odot f \odot g =$$

$$= \frac{1}{k} [f(\varepsilon_0 z) \ldots f(\varepsilon_{k-2} z)\, g(\varepsilon_{k-1} z) + \ldots + g(\varepsilon_0 z)\, f(\varepsilon_1 z) \ldots f(\varepsilon_{k-1} z)], \quad (3)$$

де в квадратних дужках стоїть k доданків.

III. Якщо ДЛГ (k) утворено із функцій $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_r(z)$, взятих відповідно $k_1, k_2, \ldots, k_r$ раз кожна, де $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_r$, то

$$f_1 \odot \ldots \odot f_1 \odot f_2 \odot \ldots \odot f_2 \odot \ldots \odot f_r \odot \ldots \odot f_r =$$

$$= \frac{k_1!\, k_2! \ldots k_r!}{k!} [f_1(\varepsilon_0 z) \ldots f_1(\varepsilon_{k_1} z)\, f_2(\varepsilon_{k_1+1} z) \ldots f_2(\varepsilon_{k_1+k_2} z) \ldots f_r(\varepsilon_{k-1} z) + \ldots],$$

де в квадратних дужках міститься $\dfrac{k!}{k_1!\, k_2! \ldots k_r!}$ доданків.

Із визначення II безпосередньо витікають такі властивості ДЛГ (k).

IV. ДЛГ (k) є комутативним відносно операції $\odot$, тобто

$$f_0 \odot f_1 \odot \ldots \odot f_{k-1} = f_{i_0} \odot f_{i_1} \odot \ldots \odot f_{i_{k-1}},$$

де $i_0, i_1, \ldots, i_{k-1}$ довільна перестановка чисел $0, 1, 2, \ldots, k-1$.

V. Якщо a_i постійний множник функції $f_i(z)$, то

$$(a_0 f_0) \odot (a_1 f_1) \odot \ldots \odot (a_{k-1} f_{k-1}) = a_0 a_1 \ldots a_{k-1} (f_0 \odot f_1 \odot \ldots \odot f_{k-1}).$$

VI.

$$\mathop{\boxed{\odot}}_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{i_j=1}^{n_j} a_j^{(i_j)} f_j^{(i_j)} \right) = \sum_{i_0=1}^{n_0} \sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^{n_{k-1}} (a_0^{(i_0)} a_1^{(i_1)} \ldots a_{k-1}^{(i_{k-1})} (f_0^{(i_0)} \odot f_1^{(i_1)} \odot \ldots f_{k-1}^{(i_{k-1})}).$$

VII. Якщо $f_i(z) = D(z) \tilde{f}_i(z)$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$ (зокрема, $D(z)$ може бути найбільшим спільним дільником), то

$$F_k = f_0 \odot f_1 \odot \ldots \odot f_{k-1} = (D \odot D \odot \ldots \odot D)(\tilde{f}_0 \odot \tilde{f}_1 \odot \ldots \odot \tilde{f}_{k-1}) = D_k \tilde{F}_k.$$

Дійсно,

$$F_k = \frac{1}{k!} [f_0(\varepsilon_0 z) \ldots f_{k-1}(\varepsilon_{k-1} z) + \ldots + f_{k-1}(\varepsilon_0 z) \ldots f_0(\varepsilon_{k-1} z)] =$$

$$= D(\varepsilon_0 z)\, D(\varepsilon_1 z) \ldots D(\varepsilon_{k-1} z) \frac{1}{k!} [\tilde{f}_0(\varepsilon_0 z) \ldots \tilde{f}_{k-1}(\varepsilon_{k-1} z) + \ldots + \tilde{f}_{k-1}(\varepsilon_0 z) \ldots \tilde{f}_0(\varepsilon_{k-1} z)] =$$

$$= (D \odot D \odot \ldots \odot D)(\tilde{f}_0 \odot \tilde{f}_1 \odot \ldots \odot \tilde{f}_{k-1}).$$

Із теореми I і II витікає.

VIII. Якщо функції $f_0(z), f_1(z), \ldots, f_{k-1}(z)$ є поліномами відповідно степеней $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$, то ДЛГ (k) (1) також буде поліномом степені, не більшим від числа

$$k \times \operatorname{antier}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} n_i\right).$$

Теорема III. Якщо $f_0(z), f_1(z), \ldots, f_{k-1}(z)$ є парні функції відповідно $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_{k-1}$ порядків, то ДЛГ (k) (1) буде парною функцією $m=kd$-го роду, де d — найбільший спільний дільник $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{k-1}$.

Доведення. За умовою маємо

$$F(\varepsilon_{0,m}z)=F(\varepsilon_{1,m}z)=\ldots=F(\varepsilon_{m-1,m}z)=F(z), \quad (\varepsilon_{0,m}=1)$$

і

$$f_i(\varepsilon_{0,d}z)=f_i(\varepsilon_{1,d}z)=\ldots=f_i(\varepsilon_{d-1,d}z)=f_i(z), \quad (\varepsilon_{0,d}=1),$$
$$(i=0, 1, \ldots, k-1),$$

де в $\varepsilon_{j,m}$ другий індекс m показує, що цей символ є коренем m-го степеню із одиниці. Справедливість останніх рівностей витікає з того, що кожне $\varkappa_i$ є кратне d і $\varepsilon_{l,m}=\varepsilon_{i,k}\cdot\varepsilon_{j,d}$. Із останніх рівностей можемо записати

$$F(\varepsilon_{l,m}z)=\frac{1}{k!}\{f_0[\varepsilon_{0,k}(\varepsilon_{i,k}\varepsilon_{j,d}z)]\ldots f_{k-1}[\varepsilon_{k-1,k}(\varepsilon_{i,k}\varepsilon_{j,d}z)]\ldots\}=$$

$$=\frac{1}{k!}\{f_0(\varepsilon_{0,k}\varepsilon_{i,k}z)\ldots f_{k-1}(\varepsilon_{k-1,k}\varepsilon_{i,k}z)+\ldots\}=F(\varepsilon_{i,k}z)=F(z).$$
$$l=0, 1, 2, \ldots, m-1.$$

Розглянемо тепер ДЛГ (k) від одної функції (2) у випадку, коли $k=k_1, k_2 \ldots k_r$ (k_i — цілі числа).

Нехай спочатку $k=k_1k_2$. Складемо спочатку ДЛГ (k) від функції f:

$$f_{k_1}=f\odot f\odot\ldots\odot f, \tag{4}$$

а потім аналогічний добуток k_2-го роду від функції f_{k_1}:

$$(f_{k_1})_{k_2}=f_{k_1}\odot f_{k_1}\odot\ldots\odot f_{k_1}. \tag{5}$$

Підставляючи значення f_{k_1} із (4) в (5) і беручи до уваги, що $\varepsilon_{l,k}=\varepsilon_{j,k_1}\cdot\varepsilon_{l,k_2}$, безпосередньо дістанемо, що $(f_{k_1})_{k_2}$ в (5) є ДЛГ (k_1k_2).

Так само встановлюється справедливість оберненого твердження, тобто ДЛГ (k_1k_2) від функції f можна звести до ДЛГ (k_2) від функції, яка, в свою чергу, є ДЛГ (k_1) від функції f. Ці твердження легко узагальнюються методом математичної індукції на довільне число множників, на яке розкладається число k. Тільки що сказане може бути сформульоване у вигляді такої теореми.

Теорема IV. Нехай задана послідовність добутків Лобачевського—Греффе

$$\begin{aligned}
&f^{(1)}=f_{k_1}=f\odot f\odot\ldots\odot f, && k_1\text{-го роду від функції } f;\\
&f^{(2)}=f^{(1)}_{k_2}=f^{(1)}\odot f^{(1)}\odot\ldots\odot f^{(1)}, && k_2\text{-го роду від функції } f^{(1)};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; && \\
&f^{(r)}=f^{(r-1)}_{k_r}=f^{(r-1)}\odot f^{(r-1)}\odot\ldots\odot f^{(r-1)}, && k_r\text{-го роду від функції } f^{(r-1)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Тоді $f^{(r)}$ буде ДЛГ $(k_1\ k_2\ldots k_r)$ від функції f $(f^{(r)}=f_k)$. І, навпаки, ДЛГ $(k_1\ k_2\ldots k_r)$ від функції f можна звести до ДЛГ (k_r) від функції $f^{(r-1)}$; в свою чергу, функцію $f^{(r-1)}$ можна зобразити у вигляді ДЛГ (k_{r-1}) від функції $f^{(r-2)}$ і т. д.

Приклад. $k=12=2\cdot3\cdot2$;

$$f_{12}=[(f\odot f)\odot(f\odot f)\odot(f\odot f)]\odot[(f\odot f)\odot(f\odot f)\odot(f\odot f)].$$

Для ДЛГ (k) від функції $f(z)$ і $g(z)$, які задані формулою (3), має місце теорема, аналогічна IV.

Складемо ДЛГ (k) від функції f і g:

$$\begin{aligned} g^{(1)}&=g_{k_1}=f\odot\ldots\odot f\odot g;\\ g^{(2)}&=g^{(1)}_{k_2}=f^{(1)}\odot\ldots\odot f^{(1)}\odot g^{(1)};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\\ g^{(r)}&=g^{(r-1)}_{k_r}=f^{(r-1)}\odot\ldots\odot f^{(r-1)}\overline{\odot}\, g^{(r-1)}, \end{aligned} \tag{7}$$

де $f^{(i)}$ визначається по формулах (6).

Теорема V. Функція $g^{(r)}$ є ДЛГ $(k_1\ k_2\ldots\ k_r)$ від функції f, взятої $k-1$ разів і функції g. Навпаки, ДЛГ $(k_1\ k_2\ldots\ k_r)$ функції f і g, заданий формулою (3), можна звести до ДЛГ (k_r) від функцій $f^{(r-1)}$ і $g^{(r-1)}$, функція $g^{(r-1)}$, в свою чергу, може бути зображена у вигляді ДЛГ (k_{r-1}) від функції $f^{(r-2)}$ і функції $g^{(r-2)}$ і т. д.

Доведення теореми V аналогічне доведенню теореми IV.

§ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ДОБУТКУ ЛОБАЧЕВСЬКОГО—ГРЕФФЕ В МЕТОДАХ ЧИСЕЛЬНОГО ВИЗНАЧЕННЯ НУЛІВ ФУНКЦІЙ

В методі Лобачевського—Греффе чисельного визначення нулів поліномів, а також в узагальненнях цього методу на степеневі ряди і ряди Лорана, які дані в [1], [2], ми складаємо функцію $f_k(z)$, нулі якої дорівнюють $k=2^r$ степеням нулів заданої, тобто фактично складаються ДЛГ (k) даної функції f по формулах (6). Якщо покласти $k_1=$ $=k_2=\ldots=k_r=2$, то в результаті одержимо так званий спосіб «квадрування нулів».

В роботах [3], [4], [5] були дані узагальнені формули перетворення функцій (поліномів, степеневих рядів і рядів Лорана) в методі Лобачевського—Греффе чисельного визначення нулів. При цьому були використані формули перетворень (6) ДЛГ $(\varkappa^r)$, де $\varkappa\geqslant 2$. Цей спосіб перетворення функцій був названий способом «$\varkappa$-ювання нулів» початкового рівняння.

В методі Бродетського—Сміла [6] і Лемера [7] чисельного визначення нулів поліномів, крім послідовності $\{f^{(r)}\}$, яка складається в методі Лобачевського—Греффе, рекомендується також складати послідовність $\{g^{(r)}\}$, де $g^{(0)}=z^2f'(z)$. Легко показати, що ця послідовність є ДЛГ (2^r) функцій f і $g=z^2f'(z)$, який визначається за формулою (7) при $k_1=k_2=\ldots=k_r=2$. Те саме має місце і для узагальнення цього методу на степеневі ряди і ряди Лорана, яке дане в роботах [8], [9], [10]. Формули перетворення функцій для випадку $k_1=k_2=\ldots=k_r\geqslant3$ наведені в роботі [5].

За допомогою ДЛГ (k) типу (7) в методі Бродетського—Сміла і Лемера легко встановити формулу, яка виражає функцію $g^{(r)}$ через нулі початкового полінома $f(z)$, де $g^{(0)}=f'(z)$ і $k=k_1\cdot k_2\cdot\ldots k_r$, зокрема можна покласти $k_1=k_2=\ldots=k_r\geqslant2$.

Дійсно, нехай

$$f(z)=\prod_{\nu=1}^{n}(z_\nu-z)=\sum_{i=1}^{n}a_iz^i,$$

тоді

$$f_k(z^k)=f\odot f\odot\ldots\odot f=\prod_{\nu=1}^{n}(z_\nu-\varepsilon_0 z)\ldots\prod_{\nu=1}^{n}(z_\nu-\varepsilon_{k-1}z)=$$

$$=\prod_{\nu=1}^{n}(z_\nu+(-1)^k\varepsilon_0\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{k-1}z^k)=\prod_{\nu=1}^{n}(z_\nu^k-z^k). \tag{8}$$

$$g_k(z^k)=f\odot\ldots\odot f\odot g=\frac{1}{k}\left\{\prod_{\nu=1}^{n}(z_\nu-\varepsilon_0 z)\ldots\prod_{\nu=1}^{n}(z_\nu-\varepsilon_{k-3}z)\times\right.$$

$$\times\left[-\sum_{i=1}^{n}\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i}^{n}(z_\nu-\varepsilon_{k-1}z)\right]+\ldots+\left[-\sum_{i=1}^{n}\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i}^{n}(z_\nu-\varepsilon_0 z)\right]\times$$

$$\left.\times\prod_{\nu=1}^{n}(z_\nu-\varepsilon_1 z)\ldots\prod_{\nu=1}^{n}(z_\nu-\varepsilon_{k-1}z)\right\}=-\frac{1}{k}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=1,\ j\neq k-1}(z_i-\varepsilon_j z)\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i}^{n}(z_\nu^k-z^k)\right]+\ldots+\sum_{i=1}^{n}\left[\prod_{j=0,\ j\neq 0}^{k-1}(z_i-\varepsilon_j z)\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i}^{n}(z_\nu^k-z^k)\right]\right\}=$$

$$=-\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{l=0}^{k-1}\prod_{j=0,\ j\neq l}^{k-1}(z_i-\varepsilon_j z)\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i}^{n}(z_\nu^k-z^k)\right]=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}z_i^{k-1}\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i}^{n}(z_\nu^k-z^k), \tag{9}$$

де $\sum\limits_{l=0}^{k-1}\prod\limits_{j=0,\ j\neq l}^{k-1}(z_i-\varepsilon_j z)=kz_i^{k-1}$.

В методі Лобачевського—Греффе використовуються ДЛГ (k) для однієї функції $f(z)$.

Метод Лемера використовує ДЛГ (k) для однієї функції $f(z)$ формули (6) і ДЛГ (k) для двох функцій $f(z)$ і $g(z)=z^2f'(z)$ формули (7). В роботі [11] було показано, що в методі Лемера можна брати $g(z)=f'(z)$.

В роботі [5] ці результати узагальнені. Показано, що можна покласти $g(z)=z\cdot u(z)f'(z)$, де $u(z)$ — довільна аналітична функція в області аналітичності $f(z)$ (функція $f(z)$ — поліном, степеневий ряд або ряд Лорана); це дало можливість знайти новий чисельний метод розкладу $f(z)$ на множники. У всіх цих випадках фактично використовувались ДЛГ (k) типу (6) і (7), тобто від однієї даної функції або від даної функції і її похідної, помноженої на деякий множник.

Тепер ми покажемо, як можна використовувати ДЛГ (k) для визначення двох рівних за модулем нулів полінома з комплексними коефіцієнтами.

Нехай $f_0(z)=\prod_{\nu=1}^{n}(z_\nu-z)=\sum_{i=0}^{n}a_iz^i$ поліном з комплексними коефіцієнтами, тоді

$$g_0(z)=f'(z)=-\sum_{i=1}^{n}\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i}^{n}(z_\nu-z),$$
$$\varphi_0(z)=f''(z)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i,\ j}^{n}(z_\nu-z) \tag{10}$$

і

$$F_0(z)=f_0(z)+hg_0(z)+\frac{1}{2}h^2\varphi_0(z), \tag{11}$$

де ми нехтуємо членами, які містять h^3 і вищі степені h.

Покладемо тепер в (6) $k_1=...=k_r=2$ і складемо ДЛГ (k) функції $F_0(z)$, де $k=2^r$, дістанемо $(\varepsilon_0=+1,\ \varepsilon_1=-1)$;

$$F_1(z^2)=F_0(z)\,F_0(-z)=f_0(z)f_0(-z)+2h\frac{1}{2}[f_0(z)\,g_0(-z)+f_0(-z)\,g_0(z)]+$$
$$h^2\left\{\frac{1}{2}[f_0(z)\,\varphi_0(-z)+f_0(-z)\,\varphi_0(z)]+g_0(z)\,g_0(-z)\right\}=$$
$$=f_1(z^2)+2hg_1(z^2)+2h^2\varphi_1(z^2),$$

де

$$\varphi_1(z^2)=\frac{1}{2}[(f_0\odot\varphi_0)+(g_0\odot g_0)]=\frac{1}{2}[\tilde{\varphi}_0+\tilde{g}_0];$$
$$F_2(z^2)=f_2(z^2)+4hg_2(z^2)+\frac{4^2}{2}h\varphi_2(z^2), \tag{12}$$

де

$$\varphi_2(z^2)=\frac{1}{2}[\tilde{\varphi}_1+\tilde{g}_1];$$

. . . .

$$F_r(z^2)=F_{r-1}(z)\,F_{r-1}(z)=f_r(z^2)+khg_r(z^2)+\frac{k^2}{2}h^2\varphi_r(z^2),$$

де

$$\varphi_r(z^2)=\frac{1}{2}[\tilde{\varphi}_{r-1}+\tilde{g}_{r-1}].$$

Підставляючи $f_0(z)$, $g_0(z)$ і $\varphi_0(z)$ з (10) в (12), дістанемо

$$F_0(z^2)=\prod_{\nu=1}^{n}(z_\nu-z)-h\sum_{i=1}^{n}\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i}^{n}(z_\nu-z)+\frac{1}{2}h^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i,\ j}^{n}(z_\nu-z);$$

$$F_1(z^2)=F_0(z)\,F_0(-z)=\prod_{\nu=1}^{n}(z_\nu^2-z^2)-2h\sum_{\nu=1}^{n}z_i\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i}^{n}(z_\nu^2-z^2)+$$
$$+\frac{2^2}{2}h^2\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}z_iz_j\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i}^{n}(z_\nu^2-z^2)+\frac{2-1}{2}\sum_{i=1}^{n}z_i^0\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i}^{n}(z_\nu^2-z^2);\right. \tag{13}$$

. . . .

$$F_r(z^2)=F_{r-1}(z)F_{r-1}(-z)=\prod_{\nu=1}^{n}(z_\nu^k-z^2)-kh\sum_{i=1}^{n}z_i^{k-1}\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i}^{n}(z_\nu^k-z^2)+$$

$$+\frac{k^2}{2}h^2\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}z_i^{k-1}z_j^{k-1}\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i,\ j}^{n}(z_\nu^k-z^2)+\frac{k-1}{k}\sum_{i=1}^{n}z_i^{k-2}\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i}^{n}(z_\nu^k-z^2),\right.$$

$$k=2^r.$$

З (12) і (13), після заміни z^2 на z, можемо записати

$$f_r(z)=\sum_{i=1}^{n}a_i^{(r)}z^i=\prod_{\nu=1}^{n}(z_\nu^k-z),\quad (a_n\neq 0);$$

$$g_r(z)=\sum_{i=1}^{n}b_i^{(r)}z^i=\sum_{i=1}^{n}z_i^{k-1}\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i}^{n}(z_\nu^k-z),\quad (b_n=0);$$

$$\varphi_i(z)=\sum_{i=1}^{n}c_i^{(r)}z^i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n}z_i^{k-1}z_j^{k-1}\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i,\ j}^{n}(z_\nu^k-z)+$$

$$+\frac{k-1}{k}\sum_{i=1}^{n}z_i^{k-2}\prod_{\nu=i,\ \nu\neq i}^{n}(z_\nu^k-z)=2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\ j>i}^{n}z_i^{k-1}z_j^{k-1}\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i,\ j}^{n}(z_\nu^k-z)+$$

$$+\left(1-\frac{1}{k}\right)\sum_{i=1}^{n}z_i^{k-2}\prod_{\nu=1,\ \nu\neq i}^{n}(z_\nu^k-z),\quad (c_{n-1}=c_n=0). \tag{14}$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z^l, дістанемо

$$\frac{a_l^{(r)}}{a_0^{(r)}}=(-1)^r S(z_1^{-k}z_2^{-k}\ldots z_l^{-k});$$

$$\frac{b_l^{(r)}}{a_0^{(r)}}=(-1)^{r+1}S(z_1^{-k}\ldots z_l^{-k}z_{l+1}^{-1});$$

$$\frac{c_l^{(r)}}{a_0^{(r)}}=(-1)^r\left[2S(z_1^{-k}\ldots z_l^{-k}z_{l+1}^{-1}z_{l+2}^{-1})+\left(1-\frac{1}{k}\right)S(z_1^{-k}\ldots z_l^{-k}z_{l+1}^{-2})\right],$$

де S — симетричні функції відповідних аргументів і $a_0^{(r)}=z_1^k\ldots z_n^k$. Припустимо тепер, що модулі коренів $f(z)$ задовольняють нерівностям

$$|z_1|\leqslant|z_2|\leqslant\ldots\leqslant|z_n|. \tag{15}$$

Крім того, нехай $|z_l|<|z_{l+1}|$. Тоді для достатньо великих $k=2^r$ можемо записати

$$\frac{a_l^{(r)}}{a_0^{(r)}}=(-1)^r z_1^{-k}z_2^{-k}\ldots z_l^{-k} \tag{16}$$

і

$$\frac{b_l^{(r)}}{a_l^{(r)}}=-(z_{l+1}^{-1}+z_{l+2}^{-1}+\ldots+z_n^{-1}); \tag{17}$$

$$\frac{c_l^{(r)}}{a_l^{(r)}}=2(z_{l+1}^{-1}z_{l+2}^{-1}+z_{l+1}^{-1}z_{l+3}^{-1}+\ldots+z_{n-1}^{-1}z_n^{-1})+\left(1-\frac{1}{k}\right)(z_{l+1}^{-2}+\ldots+z_n^{-2}). \tag{18}$$

Із (16), (17), (18) при умовах $|z_l|<|z_{l+1}|$ і $|z_m|<|z_{m+1}|$ будемо мати

$$p_{l,m}^{(r)}=\frac{b_l^{(r)}}{a_l^{(r)}}-\frac{b_m^{(r)}}{a_m^{(r)}}=-(z_{l+1}^{-1}+z_{l+2}^{-1}+\ldots+z_m^{-1});$$

$$h_l^{(r)}=\left(\frac{b_l^{(r)}}{a_l^{(r)}}\right)^2-\frac{c_l^{(r)}}{a_l^{(r)}}=\frac{1}{k}(z_{l+1}^{-2}+z_{l+2}^{-2}+\ldots+z_n^{-2}); \qquad (19)$$

$$q_{l,m}^{(r)}=h_l^{(r)}-h_m^{(r)}=\frac{1}{k}(z_{l+1}^{-2}+z_{l+2}^{-2}+\ldots+z_m^{-2}). \qquad (20)$$

Коли в нерівностях (19) $m=l+2$, то пара рівних за модулем комплексних коренів може бути визначена із квадратного рівняння

$$u^2+pu+\frac{1}{2}(p^2-kq)=0, \qquad (21)$$

яке безпоседньо витікає із (19) і (20), де $p=p_{l,l+2}^{(r)}$, $q=q_{l,l+2}^{(r)}$.

Нехай з (15) $0<|z_l|<|z_{l+1}|$, тоді із (17) і (18) дістанемо

$$\lim_{r\to\infty}\left[\left(\frac{b_l^{(r)}}{a_l^{(r)}}\right)^2-\frac{c_l^{(r)}}{a_l^{(r)}}\right]=0.$$

Якщо модулі коренів z_l, z_{l+1} або z_{l+2}, z_{l+3} будуть дуже близькими в (20), то корені z_{l+1}, z_{l+2} визначатимуться із (21) з пониженою точністю.

Приклад.

$$f_0(z)=(-1{,}6+11{,}2i)+(65{,}52-50{,}64i)z+(-22{,}72+7{,}44i)z^2+$$
$$+(18{,}7+0{,}5i)z^3+z^4=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4.$$

Знайдемо

$$g_0(z)=f_0'(z) \quad \text{і} \quad \varphi_0(z)=f_0''(z).$$

Позначимо формулу

$$u_mv_m+\sum_{i=1}^{r}(-1)^i(u_{m-i}v_{m+i}+u_{m+i}v_{m-i}), \quad (r=\min(m,\ n-m))$$

символом $(u_mv_m)'$ і складемо три послідовності функцій $\{f_\nu\}$, $\{g_\nu\}$, $\{\varphi_\nu\}$, обчислюючи коефіцієнти $f_{\nu+1}$, $g_{\nu+1}$, $\varphi_{\nu+1}$ за допомогою коефіцієнтів функцій f_ν, g_ν, φ_ν по формулах (див. [5], [11])

$$a_m^{(\nu+1)}=(a_m^{(\nu)}a_m^{(\nu)})'; \quad b_m^{(\nu+1)}=(a_m^{(\nu)}b_m^{(\nu)})';$$

$$c_m^{(\nu+1)}=\frac{1}{2}[(a_m^{(\nu)}c_m^{(\nu)})'+(b_m^{(\nu)}b_m^{(\nu)})'].$$

Дістанемо

$$f_1(z),\ f_2(z);\ g_1(z),\ g_2(z);\ \varphi_1(z),\ \varphi_2(z)$$

і

$$f_3(z)=(1{,}13273\cdot10^8+2{,}43366\cdot10^8i)+(-7{,}07952\cdot10^{14}-1{,}52103\cdot10^{15}i)z+$$
$$+(9{,}31907\cdot10^{12}+5{,}94156\cdot10^{12}i)z^2+(-2{,}56002\cdot10^{10}-2{,}16390\cdot10^2i)z^3+z^4$$

$$g_3(z)=(6{,}46489\cdot10^8-1{,}85537\cdot10^9i)+(2{,}48857\cdot10^{13}+4{,}51052\cdot10^{14}i)z+$$
$$+(-2{,}74030\cdot10^{12}-3{,}65601\cdot10^{12}i)z^2+(-1{,}28000\cdot10^9+1{,}6\cdot10^2i)z^3;$$

$$\varphi_3(z)=(-1{,}13382\cdot10^{10}+5{,}74870\cdot10^9i)+(5{,}64178\cdot10^{13}-1{,}96856\cdot10^{14}i)z+$$
$$+(6{,}5549\cdot10^{11}-1{,}32698\cdot10^{12}i)z^2+(-5{,}60000\cdot10^7+3{,}65\cdot10i)z^3.$$

Визначимо алгоритмом, вказаним в роботі [12], строгі нерівності між модулями коренів данного рівняння $f(z)=0$ і дістанемо

$$|z_1|<|z_2|=|z_3|<|z_4|.$$

Покладемо $l=0$, $m=1$ і $l=3$, $m=4$, тоді за формулою (19) можна написати

$$-z_1^{-1}=\frac{b_0^{(3)}}{a_0^{(3)}}-\frac{b_1^{(3)}}{a_1^{(3)}}=(-5{,}25000-5{,}100002i)-$$

$$-(-0{,}25000-0{,}10000i)=-5-5i,\quad z_1=0{,}1-0{,}1i;$$

$$-z_4^{-1}=\frac{b_3^{(3)}}{a_3^{(3)}}-\frac{b_4^{(3)}}{a_4^{(3)}}=(0{,}050000-0{,}000000i)-0=0{,}05,\quad z_4=-20.$$

Зрештою, по формулах (20), (21), поклавши $l=1$ і $m=3$, знаходимо рівні за модулем корені z_2 і z_3.

$$p=p_{1,3}^{(3)}=(-0{,}250000-0{,}100000i)-(0{,}050000-0{,}000000i)=-0{,}3-0{,}1i;$$

$$q=q_{1,3}^{(3)}=h_1^{(3)}-h_3^{(3)}=(0{,}0396875-0{,}0300000i)-(0{,}0003125)=-0{,}04-0{,}03i.$$

$$\frac{1}{2}(p^2-8q)=0{,}2+0{,}15i;\quad k=2^3=8;$$

$$u^2+(-0{,}3-0{,}1i)\,u+(0{,}2+0{,}15i)=0;$$

$$u_1=z_2^{-1}=0{,}3-0{,}4i,\quad u_2=z_3^{-1}=0{,}5i;\quad z_2=1{,}2+1{,}6i,\quad z_3=-2i.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. G. Polya. Zeitschr. f. Math. u. Phys., vol. 63, 1914, 275—290.
2. І. В. Вітенько. Доп. АН УРСР, т. 9, № 1, 1963, стор. 9.
3. А. Н. Костовский. Материалы научно-технической конференции «Новые разработки в области вычислительной математики и вычислительной техники», К., Изд. ВЦ АН УССР, 1960, стр. 85.
4. А. Н. Костовский. Журнал вычисл. матем. и матем. физики, т. I, № 2, 1961, стр. 346.
5. І. В. Вітенько, О. М. Костовський. Теоретична і прикладна математика, вип. II, 1962, стор. 31.
6. S. Brodetsky, G. Smeal. Proc. Combridge Phil. Sos., vol. 22, 1924, 83.
7. D. Lehmer. Math. Tables and Othe Aids Comput., vol. 1, 1945, 377.
8. А. Н. Костовский. Успехи матем. наук, т. XVI, вып. 4 (100), 1961, стр. 202.
9. М. Я. Бартиш. Питання механіки і математики, вип. IX, 1962, стор. 16.
10. А. Н. Костовский. Журнал вычисл. матем. и матем. физики, т. I, № 4, 1961, стр. 719.
11. А. Н. Костовский. Докл. АН СССР, т. 131, № 4, 1960, стр. 738.
12. А. Н. Костовский. Докл. АН СССР, т. 147, № 2, 1962, стр. 287.

А. Н. КОСТОВСКИЙ

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ЛОБАЧЕВСКОГО—ГРЕФФЕ В МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ НУЛЕЙ ФУНКЦИЙ

(резюме)

В данной работе вводится специальное преобразование полиномов, степенных рядов и рядов Лорана, названное автором произведением Лобачевского—Греффе. Это преобразование можно широко использовать в методах численного определения нулей аналитических функций. Предлагается новый метод определения нулей функций.

Стаття надійшла у видавництво в кінці 1962 р.