ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
Серія механіко-математична

М. Д. МАРТИНЕНКО

ОСНОВНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ З «ЩІЛИНАМИ»

При розв'язуванні крайових задач для областей з «щілинами» методом інтегральних рівнянь є корисне використання багатозначних потенціалів. У поданій роботі на основі другої формули Гріна будуються багатозначні потенціали першої та другої крайової задачі теорії пружності і з їх допомогою основні крайові задачі теорії пружності зводяться до еквівалентних інтегральних рівнянь, розв'язність яких доводиться. При цьому для простоти розглядається випадок, коли область — весь тривимірний простір з розрізом вздовж незамкненої поверхні Ляпунова з гладкою межею.

1. При побудові багатозначних потенціалів ми користуємося просторами Рімана та функціями Гріна цих просторів. Рімановий простір може бути зображений так. Візьмемо n екземплярів звичайного простору та позначимо в них лінії галуження нашого потенціалу. Потім натягнемо між лініями галуження поверхні довільного вигляду і розріжемо кожний просторовий екземпляр вздовж цієї поверхні. Верхні та нижні частини розрізуючих поверхонь, що так виникають, склеїмо одна з одною аналогічно до того, як це робиться в теорії ріманових поверхонь, і одержимо n — листний простір Рімана. Функцією Гріна ріманового простору називається функція двох точок x і y з такими властивостями:

1) вона неперервна і обмежена всюди у просторі Рімана, за винятком точки $x=y$, де вона має вигляд $\frac{1}{|x-y|}+g(x, y)$, $g(x, y)$ обмежена при $x=y$, $|x-y|$ — віддаль між точками x, y;

2) вона задовольняє рівняння Лапласа всюди у рімановому просторі, за винятком точки $x=y$ та лінії галуження;

3) вона стає нулем у безмежно далекій точці кожного просторового екземпляра.

А. Діксон [1] довів існування функції Гріна, яка задовольняє ці три умови.

Нехай S — незамкнена поверхня Ляпунова з гладкою межею Γ. Оберемо на поверхні S певний напрям нормалі і приймемо його за додатній напрям; позначимо відповідний орт його через ν. Розглянемо подвійний рімановий простір з лінією галуження Γ і позначимо через $\omega(x, y)$ функцію Гріна цього простору. Позначимо через I звичайний тривимірний простір, а через II — простір, який «лежить» над ним у подвійному рімановому просторі; тоді весь наш подвійний рімановий простір є об'єднання $I \cup II$. Позначимо через (I) область у подвійному рімановому просторі $I \cup II$, яка складається з простору I, обмеженого поверхнею $S_+ \cup S_-$ (тут через S_+ та S_- позначено ті сторони поверхні S, наближення до яких відбувається в напрямі додатньої та від'ємної нормалі відповідно). Аналогічно (II) — це простір II з межею $S_+ \cup S_-$.

2. Систему рівнянь рівноваги однорідного ізотропного пружного тіла у зміщеннях (систему Ламе) можна записати у вигляді

$$\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\,\partial\partial' u=0, \tag{1}$$

де λ, μ — пружні константи, Δ — оператор Лапласа,

$$u(x)=\begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix}, \quad \partial=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

штрих означає транспонування.

Далі нам буде потрібне зображення П. Ф. Папковича загального розв'язку системи Ламе через чотири гармонічні функції. Виведемо його у формі, необхідній для наступного.

Зобразимо розв'язок системи Ламе у вигляді

$$u=\partial\Theta+\varphi, \tag{2}$$

де Θ задовольняє рівняння $\Delta\Theta=\partial' u$. Тоді $\partial'\varphi=0$. Підставляючи (2) у (1), одержимо

$$\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\,\Delta\partial\Theta=0.$$

Звідси випливає, що

$$u=-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\,\partial\Theta+\eta, \tag{2*}$$

де η задовольняє рівняння Лапласа. Застосовуючи оператор ∂' до обох частин (2*), одержимо

$$\Delta\Theta=-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\,\Delta\Theta+\partial'\eta.$$

Тому

$$\Theta=\frac{\mu}{2(\lambda+2\mu)}\,x'\eta-p, \tag{3}$$

де p є гармонічною функцією. Отже, підставляючи (3) у (2*), остаточно одержимо

$$u=\eta+\partial p-\frac{\lambda+\mu}{2(\lambda+2\mu)}\,\partial(x'\eta).$$

Використовуючи зображення П. Ф. Папковича, побудуємо фундаментальну матрицю системи (1), однозначну у подвійному рімановому просторі з лінією галуження Γ; вона буде мати вигляд

$$V(x, y)=\frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left\{\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\,\omega(x, y)-\sum_{i=1}^{3} e_i(x-y)'\,\frac{\partial\omega(x, y)}{\partial x_i}\right\} \tag{4}$$

Фундаментальна матриця нормована так, щоб розв'язок неоднорідної системи Ламе $\mu\Delta u+(\lambda+\mu)\partial\partial' u=f$ в області D мав вигляд

$$u(x)=\int_D V(x, y) f(y)\, dy.$$

3. Розглянемо такі вирази:

$$\begin{cases} u_+(x)=\iint_S P(x, y_+)\mu_+(y)\, d_yS, \quad u_-(x)=\iint_S P(x, y_-)\mu_-(y)\, d_yS, \\ v_+(x)=\iint_S V(x, y_+)\mu_+(y)\, d_yS, \quad v_-(x)=\iint_S V(x, y_-)\mu_-(y)\, d_yS, \end{cases} \tag{5}$$

де

$$P(x, y)=B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)V(x, y);$$

$$B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{k=1}^{3}\{\lambda\nu e'_k+\mu(\nu_k E+e_k\nu')\}\frac{\partial}{\partial x_k}; \tag{6}$$

e_k — орт k-тої осі, $\nu=\sum\limits_{k=1}^{3}\nu_k e_k$. Через $P(x, y_+)$, $V(x, y_+)$ і $P(x, y_-)$, $V(x, y_-)$ позначимо граничні значення $P(x, y)$, $V(x, y)$ при наближенні точки y з простору I до поверхні S по напряму додатньої та від'ємної нормалі відповідно. Тому що функція $\omega(x, y)$ неперервна і обмежена всюди у просторі $I \cup II$ за винятком точки $x=y$, де вона має особливість типу $\frac{1}{|x-y|}$, функції $u_+(x)$, $u_-(x)$; $v_+(x)$, $v_-(x)$ неперервні всюди у просторі $I \cup II$, а при наближенні до поверхні S будуть мати місце такі рівності:

$$\begin{cases} [u_+(x)]_+^{I}=\frac{1}{2}\mu_+(x)+\iint_S P(x_+, y_+)\mu_+(y)\, d_yS \\ [u_+(x)]_-^{II}=-\frac{1}{2}\mu_+(x)+\iint_S P(x_+, y_+)\mu_+(y)\, d_yS \\ [u_+(x)]_-^{I}=[u_+(x)]_+^{II}=\iint_S P(x_-, y_+)\mu_+(y)\, d_yS \\ [u_-(x)]_+^{I}=[u_-(x)]_-^{II}=\iint_S P(x_+, y_-)\mu_-(y)\, d_yS \\ [u_-(x)]_-^{I}=-\frac{1}{2}\mu_-(x)+\iint_S P(x_-, y_-)\mu_-(y)\, d_yS \\ [u_-(x)]_+^{II}=\frac{1}{2}\mu_+(x)+\iint_S P(x_-, y_-)\mu_-(y)\, d_yS \end{cases} \tag{7}$$

$$
\begin{cases}
\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v_+(x)\right]_+^{\mathrm{I}} = -\frac{1}{2}\mu_+(x) + \iint\limits_S B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x_+, y_+)\mu_+(y)\, d_yS \\
\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v_+(x)\right]_-^{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\mu_+(x) + \iint\limits_S B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x_+, y_+)\mu_+(y)\, d_yS \\
\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v_+(x)\right]_-^{\mathrm{I}} = \left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v_+(x)\right]_+^{\mathrm{II}} = \iint\limits_S B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x_-, y_+)\mu_+(y)\, d_yS \\
\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v_-(x)\right]_+^{\mathrm{I}} = \left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v_-(x)\right]_-^{\mathrm{II}} = \iint\limits_S B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x_+, y_-)\mu_-(y)\, d_yS \\
\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v_-(x)\right]_-^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\mu_-(x) + \iint\limits_S B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x_-, y_-)\mu_-(y)\, d_yS \\
\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v_-(x)\right]_+^{\mathrm{II}} = -\frac{1}{2}\mu_-(x) + \iint\limits_S B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x_-, y_-)\mu_-(y)\, d_yS.
\end{cases} \qquad (8)
$$

Тут ми через $[u_+(x)]_+^{\mathrm{I}}$ позначили граничне значення $u_+(x)$ при наближенні точки x до поверхні S з простору I по напряму додатньої нормалі і т. д. При виведенні цих формул треба враховувати специфіку ріманового простору, внаслідок якої

$$
[\omega(x, y_+)]_+^{\mathrm{I}} = [\omega(x, y_+)]_-^{\mathrm{II}}, \quad [\omega(x, y_+)]_-^{\mathrm{I}} = [\omega(x, y_+)]_+^{\mathrm{II}} \text{ і т. д.}
$$

Тому

$$
\begin{aligned}
&[v_+(x)]_+^{\mathrm{I}} = [v_+(x)]_-^{\mathrm{II}}, \quad [v_+(x)]_-^{\mathrm{I}} = [v_+(x)]_+^{\mathrm{II}}, \\
&[v_-(x)]_+^{\mathrm{I}} = [v_-(x)]_-^{\mathrm{II}}, \quad [v_-(x)]_-^{\mathrm{I}} = [v_-(x)]_+^{\mathrm{II}}.
\end{aligned} \qquad (9)
$$

4. Розглянемо такі крайові задачі:

Задача I — визначити неперервний у всьому просторі I, двічі неперервно-диференційований у $I \setminus S$, розв'язок системи Ламе (1), що стає нулем у нескінченно віддаленій точці і приймає на даній незамкненій поверхні S задані значення f_+ і f_- при наближенні до поверхні S по напряму додатньої та від'ємної нормалі відповідно.

Задача II — визначити неперервно-диференційований у всьому просторі I, двічі неперервно-диференційований у $I \setminus S$, розв'язок системи Ламе, що стає нулем у нескінчено віддаленій точці і задовольняє такі умови при наближенні до поверхні S в напрямі додатньої та від'ємної нормалі

$$
\begin{aligned}
B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x)\big|_+ &= f_+(x), \\
B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x)\big|_- &= f_-(x).
\end{aligned} \qquad (10)
$$

Тут f_+ та f_- — неперервні функції, визначені на поверхні S, що співпадають на Γ.

Зобразимо розв'язок задачі I у вигляді

$$
u(x) = \iint\limits_S P(x, y_+)\mu_+(y)\, d_yS + \iint\limits_S P(x, y_-)\mu_-(y)\, d_yS, \qquad (11)
$$

де μ_+ і μ_- — невідомі густини, для визначення яких дістанемо таку систему інтегральних рівнянь другого роду:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\mu_+(x) + \iint\limits_S P(x_+, y_+)\mu_+(y)\,d_yS + \iint\limits_S P(x_+, y_-)\mu_-(y)\,d_yS = f_+(x) \\ -\frac{1}{2}\mu_-(x) + \iint\limits_S P(x_-, y_+)\mu_+(y)\,d_yS + \iint\limits_S P(x_-, y_-)\mu_-(y)\,d_yS = f_-(x). \end{cases} \tag{12}$$

Зобразимо розв'язок задачі II у вигляді

$$v(x) = \iint\limits_S V(x, y_+)\mu_+(y)\,d_yS + \iint\limits_S V(x, y_-)\mu_-(y)\,d_yS, \tag{13}$$

одержимо для невідомих густин таку систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\mu_+(x) + \iint\limits_S B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)V(x_+, y_+)\mu_+(y)\,d_yS + \\ \qquad + \iint\limits_S B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)V(x_+, y_-)\mu_-(y)\,d_yS = f_+(x) \\ \frac{1}{2}\mu_-(x) + \iint\limits_S B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)V(x_-, y_+)\mu_+(y)\,d_yS + \\ \qquad + \iint\limits_S B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)V(x_-, y_-)\mu_-(y)\,d_yS = f_-(x). \end{cases} \tag{14}$$

Зовсім аналогічно можна звести задачі I і II для області (*II*) до інтегральних рівнянь. При цьому виявляється, що задача I для області (*I*) спряжена задачі II для області *II* і т. д. Цим зауваженням ми скористаємося далі при дослідженні розв'язності системи (12).

Системи (12) і (14) являють собою системи сінгулярних інтегральних рівнянь. Покажемо, що до цих систем застосовна теорія Фредгольма.

Розглянемо, наприклад, систему (12). Нехай $x \in S$. Введемо в точці x місцеву систему координат, направляючи вісь x_3 вздовж нормалі ν, а вісі x_1x_2 — у дотичній площині. Тоді у цій системі координат можна зобразити систему (12) у вигляді (після деяких перетворень)

$$\mu_1^+(x) - \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\iint\limits_S \frac{y_1}{|x-y|^3}\mu_3^+(y)\,d_yS + T_1(\mu_+, \mu_-) = 2f_1^+(x);$$

$$\mu_2^+(x) - \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\iint\limits_S \frac{y_2}{|x-y|^3}\mu_3^+(y)\,d_yS + T_2(\mu_+, \mu_-) = 2f_2^+(x);$$

$$\mu_3^+(x) + \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\iint\limits_S \frac{1}{|x-y|^3}[y_1\mu_1^+(y) + y_2\mu_2^+(y)]\,d_yS + T_3(\mu_+, \mu_-) = 2f_3^+(x);$$

$$\mu_1^-(x) + \frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\iint\limits_S \frac{y_1}{|x-y|^3}\mu_3^-(y)\,d_yS + T_4(\mu_+, \mu_-) = -2f_1^-(x);$$

$$\mu_2^-(x)+\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\iint_S \frac{y_2}{|x-y|^3}\mu_3^-(y)\,d_yS+T_5(\mu_+,\ \mu_-)=-2f_2^-(x);$$

$$\mu_3^-(x)-\frac{2\mu}{\lambda+2\mu}\iint_S \frac{1}{|x-y|^3}[y_1\mu_1^-(y)+y_2\mu_2^-(y)]\,d_yS+T_6(\mu_+,\mu_-)=-2f_3^-(x),$$

де $\mu_\pm=\sum_{k=1}^{3}\mu_k^\pm e_k$, T_k — деякі інтегральні оператори з слабкою особливістю. Через те, що $\frac{y_i}{|x-y|^3}$ має особливість типу $\frac{1}{|x-y|^2}$, тому характеристики сінгулярних інтегралів, що входять сюди, є $\frac{y_1}{|x-y|}=$ $=\cos\Theta$, $\frac{y_2}{|x-y|}=\sin\Theta$; символи таких інтегралів одержуються з характеристик множенням на $2\pi i$. Позначаючи для скорочення $\delta=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}$, одержимо, що символічний визначник останньої системи дорівнює

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -i\delta\cos\Theta & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -i\delta\sin\Theta & 0 & 0 & 0\\ i\delta\cos\Theta & i\delta\sin\Theta & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & i\delta\cos\Theta\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i\delta\sin\Theta\\ 0 & 0 & 0 & -i\delta\cos\Theta & -i\delta\sin\Theta & 1 \end{vmatrix}=(1-\delta^2)^2,$$

що відмінно від нуля при $\delta\neq 1$. Аналогічний висновок має місце і для системи (14). Звідси випливає, що індекс систем (12), (14) дорівнює нулю, і для них вірні теореми Фредгольма.

5. З усього вищесказаного випливає, що для дослідження розв'язності систем (12), (14) нам досить дослідити розв'язність наступної системи, яка при $\lambda=-1$ відповідає задачі II для області (I) з нульовими граничними умовами, а при $\lambda=1$ — задачі II для області (II) з нульовими граничними умовами:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\mu_+(x)+\lambda\iint_S B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)V(x_+,\ y_+)\mu_+(y)\,d_yS+\\ \qquad +\lambda\iint_S B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)V(x_+,\ y_-)\mu_-(y)\,d_yS=0;\\ \frac{1}{2}\mu_-(x)+\lambda\iint_S B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)V(x_-,\ y_+)\mu_+(y)\,d_yS+\\ \qquad +\lambda\iint_S B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)V(x_-,\ y_-)\mu_-(y)\,d_yS=0. \end{cases} \tag{15}$$

Перепишемо цю систему в іншому вигляді, скориставшись формулами (8), (13):

$$\begin{cases} (1+\lambda)\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]_-^{II}-(1-\lambda)\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]_+^{I}=0;\\ (1+\lambda)\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]_+^{II}-(1-\lambda)\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]_-^{I}=0. \end{cases} \tag{15*}$$

Запишемо аналог першої формули Гріна для рівнянь Ламе для області (I) і для області (II):

$$\iiint\limits_{\infty} \{u, v\}_{\mathrm{I}}\, dx = -\iint\limits_{S} \left[u'(x)\, B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x)\right]_{+}^{\mathrm{I}} d_xS + \\ + \iint\limits_{S} \left[u'(x)\, B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x)\right]_{-}^{\mathrm{I}} d_xS;$$

$$\iiint\limits_{\infty} \{u, v\}_{\mathrm{II}}\, dx = -\iint\limits_{S} \left[u'(x)\, B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x)\right]_{+}^{\mathrm{II}} d_xS + \\ + \iint\limits_{S} \left[u'(x)\, B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x)\right]_{-}^{\mathrm{II}} d_xS, \tag{16}$$

де

$$\{u, v\} = 2\mu \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \lambda \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} +$$

$$+ \frac{1}{2}\mu \sum_{k \neq j = 1}^{3} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k}\right) + \sum_{k=1}^{3} u_k \left[\mu \Delta v_k + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right)\right].$$

Якщо $u = v$ і v задовольняє систему Ламе, то $\{u, u\} > 0$.

З формул (16) випливає, що, якщо

$$\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x)\right]_{+}^{\mathrm{I,\,II}} = \left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x)\right]_{-}^{\mathrm{I,\,II}} = 0,$$

то $v(x) = \mathrm{const}$. Але з того, що в нескінченно віддаленій точці $v(x)$ стає нулем, випливає, що $v(x) = 0$ всюди у $I \cup II$. Звідси випливає, що $\mu_+(x) = \mu_-(x) = 0$. Насправді, з $v(x) \equiv 0$ випливає $B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) \equiv 0$. Спрямовуючи точку x до поверхні S, дістанемо

$$\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x)\right]_{+}^{\mathrm{I}} = -\frac{1}{2}\mu_+(x) + \iint\limits_{S} B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x_+, y_+)\, \mu_+(y)\, d_yS + \\ + \iint\limits_{S} B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x_+, y_-)\, \mu_-(y)\, d_yS = 0;$$

$$\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x)\right]_{-}^{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\mu_+(x) + \iint\limits_{S} B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x_+, y_+)\, \mu_+(y)\, d_yS + \\ + \iint\limits_{S} B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x_+, y_-)\, \mu_-(y)\, d_yS = 0;$$

$$\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x)\right]_{-}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\mu_-(x) + \iint\limits_{S} B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x_-, y_+)\, \mu_+(y)\, d_yS + \\ + \iint\limits_{S} B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) V(x_-, y_-)\, \mu_-(y)\, d_yS = 0;$$

$$\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]_{+}^{\mathrm{II}}=-\frac{1}{2}\mu_{-}(x)+\iint\limits_{S}B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)V(x_{-},y_{+})\mu_{+}(y)\,d_yS+$$
$$+\iint\limits_{S}B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)V(x_{-},y_{-})\mu_{-}(y)\,d_yS=0.$$

Звідси

$$\mu_{+}(x)=\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]_{-}^{\mathrm{II}}-\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]_{+}^{\mathrm{I}}=0;$$
$$\mu_{-}(x)=\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]_{-}^{\mathrm{I}}-\left[B^{(\nu)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]_{+}^{\mathrm{II}}=0,$$

тобто

$$\mu_{+}(x)=\mu_{-}(x)=0.$$

Перейдемо до дослідження власних чисел системи (15).

1) Власні числа можуть бути тільки дійсними.

Нехай $\lambda=\alpha+i\beta$ — власне число, йому відповідає власна функція $v_0=v_0^{(1)}+iv_0^{(2)}$. Записуючи формули (16) для $v=v_0$, $u=\overline{v}_0$; $v=\overline{v}_0$, $u=v_0$ і беручи до уваги (9)—(15*), ми прийдемо до такого:

$$(1+\lambda)\iiint\limits_{\infty}\{\overline{v}_0,v_0\}_{\mathrm{II}}\,dx+(1-\lambda)\iiint\limits_{\infty}\{\overline{v}_0,v_0\}_{\mathrm{I}}\,dx=0;$$

$$(1+\overline{\lambda})\iiint\limits_{\infty}\{v_0,\overline{v}_0\}_{\mathrm{II}}\,dx+(1-\overline{\lambda})\iiint\limits_{\infty}\{v_0,\overline{v}_0\}_{\mathrm{I}}\,dx=0.$$

Відокремлюючи дійсну та уявну частини, дістанемо

$$(1+\alpha)\iiint\limits_{\infty}[\{v_0^{(1)},v_0^{(1)}\}_{\mathrm{II}}+\{v_0^{(2)},v_0^{(2)}\}_{\mathrm{II}}]\,dx+$$
$$+(1-\alpha)\iiint\limits_{\infty}[\{v_0^{(1)},v_0^{(1)}\}_{\mathrm{I}}+\{v_0^{(2)},v_0^{(2)}\}_{\mathrm{I}}]\,dx=0;$$

$$\beta\iiint\limits_{\infty}[\{v_0^{(1)},v_0^{(1)}\}_{\mathrm{II}}+\{v_0^{(2)},v_0^{(2)}\}_{\mathrm{II}}]\,dx-$$
$$-\beta\iiint\limits_{\infty}[\{v_0^{(1)},v_0^{(1)}\}_{\mathrm{I}}+\{v_0^{(2)},v_0^{(2)}\}_{\mathrm{I}}]\,dx=0.$$

Через те, що $\{v_0^{(1)},v_0^{(1)}\}$, $\{v_0^{(2)},v_0^{(2)}\}$ додатньо означені форми, то, розглядаючи цю систему як алгебраїчну відносно інтегралів, бачимо, що ці інтеграли можуть набирати тільки нульових значень, тому що визначник системи дорівнює

$$\begin{vmatrix}1+\alpha & 1-\alpha\\ \beta & -\beta\end{vmatrix}=-2\beta\neq 0.$$

Отже, $\beta=0$, бо в противному разі $v_0^{(1)}=v_0^{(2)}=0$ і $\lambda=\alpha+\beta i$ не є власне значення.

2) Власні числа не можуть набирати значень між -1 та $+1$. Через те, що власні числа дійсні, має місце рівність

$$(1+\lambda)\iiint\limits_{\infty}\{v,\ v\}_{\text{II}}\,dx+(1-\lambda)\iiint\limits_{\infty}\{v,\ v\}_{\text{I}}\,dx=0.$$

Припускаючи, що $-1<\lambda<+1$, дістанемо супротивність, тому що об'ємні інтеграли мають однакові знаки і тому приходимо до $v=0$.

3) $\lambda=-1$ та $\lambda=+1$ не є власними числами.

Це твердження випливає з вище написаної формули, до якої приходимо, припускаючи супротивне.

З цього дослідження на основі відомого результату в теорії інтегральних рівнянь випливає розв'язність систем (12), (14) методом послідовних наближень.

6. На закінчення відзначимо, що функції Гріна ріманових просторів побудовані для випадку, коли лінією галуження є пряма, А. Зоммерфельдом, та коли лінією галуження є коло — Е. Гобсоном та З. Нейштедтером.

Міркування у цій статті для простоти велись для випадку, коли розглядувана область — весь тривимірний простір з одним розрізом вздовж незамкненої поверхні типу Ляпунова, обмеженої гладкою кривою. Застосований метод дозволяє розглядати області більш складних конфігурацій.

ЛІТЕРАТУРА

1. A. C. Dixon. Proceedings of the London Mathematical Society, Serie 2, vol. 1, 1903—1904.
2. С. Г. Михлин. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1963.

М. Д. МАРТЫНЕНКО

ОСНОВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ СО «ЩЕЛЯМИ»

(резюме)

При решении краевых задач для областей со «щелями» методом интегральных уравнений удобно пользоваться многозначными потенциалами. В данной работе на основе второй формулы Грина строятся многозначные потенциалы первой и второй краевых задач теории упругости и с их помощью основные краевые задачи теории упругости приводятся к эквивалентным интегральным уравнениям, разрешимость которых доказывается. При этом для простоты рассматривается случай, когда область — все трехмерное пространство с разрезом вдоль незамкнутой поверхности типа Ляпунова, ограниченной гладкой кривой.