ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
Серія механіко-математична

В. Ф. РОГАЧЕНКО

ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ В НЕЕВКЛІДОВИХ ПРОСТОРАХ *

Теорія геометричних побудов в неевклідових просторах, так само як і в евклідовому, не належить тепер до числа основних розділів сучасної геометрії. Однак ця теорія, яка виникла на основі робіт нашого великого геометра М. І. Лобачевського, привертала і продовжує привертати увагу вчених, особливо радянських. Саме радянські вчені здійснили в цій галузі численні і найбільш важливі дослідження, які привели до створення досить повної і стрункої теорії геометричних побудов в гіперболічній площині, яка навряд чи поступається своєю завершеністю класичній теорії геометричних побудов в евклідовій площині.

В розвитку теорії геометричних побудов в площині Лобачевського можна виділити три періоди:

перший період — від відкриття неевклідової геометрії Лобачевського до її загального визнання, тобто до 70-х років XIX ст.;

другий період — 70-і роки — кінець десятих років нашого століття;

третій період — від початку 20-х років нашого століття.

Перший період. Сам М. І. Лобачевський в своїх творах не давав прикладів безпосереднього розв'язку конструктивних задач. Проте ряд відкрить Лобачевського відіграв першорядну роль у дослідженні і обгрунтуванні геометричних побудов. До їх числа належать в першу чергу: дослідження взаємного розміщення прямих на площині, властивостей паралельних і розбіжних прямих, властивостей орициклу і, особливо, встановлення залежності між елементами прямокутного трикутника і спряженого з ним трипрямокутника, а також вся неевклідова тригонометрія взагалі.

Саме тому роль Лобачевського в підготовці створення геометричних побудов в неевклідовій площині ні в якому разі не слід недооцінювати. Крім того, цілком ймовірно, що Лобачевський володів розв'язками основних задач, в усякому разі побудовою паралелі, що випливає з встановленої ним залежності між трипрямокутником і прямокутним трикутником.

Початок дослідженням у галузі розв'язування конкретних конструктивних задач поклав Я. Больяї, який в своєму «Апендіксі» [2] звернув увагу на розв'язування основних задач на побудову, зв'язаних з постулатом паралельності. Найбільш цікавим результатом Больяї було встановлення ним можливості (при деяких умовах) квадратури

* Ця стаття є скороченим викладом огляду, прочитаного на І-й Всесоюзній геометричній конференції в Києві (травень—червень 1962 р.).

круга в неевклідовій площині за допомогою циркуля і лінійки. У зв'язку з цією задачею Больяї зробив для одного частинного випадку побудову прямокутного трикутника за двома гострими кутами.

Велика заслуга Больяї полягає в тому, що він поставив питання про розв'язування конкретних конструктивних задач і показав шляхи до їх розв'язку. Це тим більш цікаво, що ні Лобачевський, ні Больяї ще не знали конкретних реалізацій неевклідової геометрії.

Другий період. На початку цього періоду зусилля дослідників — Жерара [6], Сімона [5, 25, 35, 36], Енгеля [9, 10, 11], Барбарена [13], Лібмана [22, 23, 24, 31, 32], Гільберта [17], Пунда [29] і інших були спрямовані головним чином на здійснення і строге обгрунтування розв'язку за допомогою циркуля і лінійки чотирьох основних задач — побудови паралелі, відрізка і кута паралельності і спільного перпендикуляра двох розбіжних прямих. Для виконання цих побудов більшістю дослідників була використана встановлена Лобачевським залежність між прямокутним трикутником і спряженим з ним трипрямокутником. Розв'язувались також задачі на побудову трикутників, зокрема, Лібману [15] належить перший розв'язок задачі про побудову трикутника за трьома кутами.

Сімоном [5, 7, 35, 41] і Лібманом [23] розв'язувались також задачі, які належать до різних модифікацій кола — побудова дотичних, визначення точок перетину цих ліній з прямою і одна з другою.

Нарешті, з'являються перші роботи [18, 27, 25, 28, 39], які присвячені дослідженню питання про розв'язність лінійкою і циркулем деяких задач: про поділ відрізка і кута на рівні частини, про квадратуру круга і циркулятуру квадрата.

Найбільш цікавими роботами цього періоду є ті, в яких для дослідження побудов в площині Лобачевського застосовуються засоби проективної геометрії, зокрема проективна інтерпретація цієї площини. Першою в цьому напрямі була робота професора Московського університету О. К. Власова [14], в якій на основі розвиненої ним теорії лінійних систем конічних перерізів був знайдений розв'язок декількох конструктивних задач, зв'язаних з колом, еквідистантою і орициклом.

Потім з'являються праці Гросмана [20, 21, 30, 33] і Кубота [34], в яких використовуються моделі Клейна гіперболічної площини. Зокрема, вони показали розв'язність задач 2-го степеня за допомогою однієї лінійки, якщо в площині задані деякі допоміжні фігури, тобто для площини Лобачевського була розв'язана задача, яку Штейнер розв'язав для евклідової площини.

Найбільш цікавою і багатою результатами є велика робота Фреда [37], в якій на основі моделі Клейна, крім конкретних задач, в тому числі чотирьох основних, був розглянутий ряд таких загальних питань, як критерій розв'язності задач 2-го степеня і побудови обмеженими засобами. Однак результати Фреда залишились непоміченими і не мали ніякого впливу на дальший розвиток теорії.

Третій період з повним правом можна назвати радянським періодом, тому що роботи радянських вчених як за кількістю, так і за їх значенням значно переважають над роботами іноземних вчених, яким належить менш як 20% публікацій, що присв'ячені теорії геометричних побудов в площині Лобачевського. Слід мати на увазі, що на останні 40 років припадає дві третини всіх досліджень, причому половина з цього числа — це публікації після 1945 року. Як бачимо, інтерес до цих питань не тільки не зменшився, а навпаки, значно зріс. Інтерес у дослідженнях перемістився від розв'язку частинних конструктивних задач і обгрунтування основних побудов до вивчення загальних питань теорії.

Першими радянськими роботами, які поклали початок дослідженням в цьому напрямі, були статті Д. Д. Мордухай-Болтовського [40, 42, 46]. Особливо велике значення має його друга робота, в якій були закладені основи загальної теорії геометричних побудов в площині Лобачевського, зокрема, був розроблений загальний метод застосування гіперболічної тригонометрії до розв'язування конструктивних задач і також були знайдені достатні умови розв'язності всякої конструктивної задачі 2-го степеня. В роботі [46] показано, що ці умови разом з тим є і необхідними. Ці роботи стимулювали розвиток теорії і в значній мірі визначили характер і напрям дальших досліджень.

Сказане стосується передусім учня Мордухай-Болтовського — Н. М. Несторовича, який в ряді робіт (1937—1955 рр.) досліджував конструктивну потужність основних комплексів інструментів, які використовуються для розв'язування задач на площині Лобачевського.

З 1945 р. почали з'являтися численні роботи О. С. Смогоржевського і інших дослідників, які здебільшого є його учнями або учнями Мордухай-Болтовського і Несторовича. В цих роботах післявоєнних років досліджувались як загальні питання теорії, так і розв'язувались численні конкретні задачі.

Перш ніж говорити про основні результати, коротко торкнемося того, як в теперішній час ставиться питання про розв'язок конструктивної задачі на площині Лобачевського і які інструменти використовуються для розв'язання такої задачі.

Як і в евклідовій площині, задача на побудову в площині Лобачевського полягає в тому, щоб побудувати за допомогою даних інструментів деяку фігуру, якщо дана деяка інша фігура і вказані деякі співвідношення між елементами даної і шуканої фігур.

При цьому можливі два різні підходи для здійснення побудови.

I. Побудова мислиться здійсненною в площині Лобачевського. В цьому випадку описання побудови полягає в перерахуванні найпростіших конструктивних операцій, які повинні бути виконані в площині Лобачевського, для того щоб вона була здійснена. При цьому для більшої наочності і з'ясування взаємного розміщення даної і шуканої фігур, а також ліній, які проводяться в процесі розв'язування задачі, часто виконують на площині рисунка (звичайно евклідовій!) деяку умовну фігуру так, що прямі і кола Лобачевського зображаються звичайними прямими і колами, орицикли і еквідистанти деякими кривими лініями і т. д.

II. Побудова спочатку здійснюється на одній із моделей площини Лобачевського (Пуанкаре або Бельтрамі-Клейна). В цьому випадку побудова виконується або евклідовою лінійкою, або евклідовим циркулем, або обома цими інструментами, але з певними обмеженнями, в залежності від того, якою моделлю і якими інструментами в просторі ми користуємося. Після того, за допомогою відповідного словника, описання побудови, виконаної на моделі, легко перевести в описання побудови, яку ми виконуємо в площині Лобачевського.

Оскільки в площині Евкліда є тільки два види ліній постійної кривини — пряма і коло, то, відповідно до цього, маємо два основні інструменти — лінійку і циркуль, за допомогою яких викреслюються ці лінії. В площині ж Лобачевського, як відомо, є чотири види ліній постійної кривини — прямі і три модифікації кола — власне коло, орицикл і еквідистанта. Відповідно до цього можна говорити про чотири основні креслярські інструменти в просторі Лобачевського — лінійку, циркуль, орициркуль і гіперциркуль, за допомогою яких мислиться проведення відповідних чотирьох ліній в площині Лобачевського і які зображаються у вигляді деяких матеріально здійснених приборів. Так само як і в Евклідовій геометрії, використання кожного з цих інструментів як засобу для розв'язування конструктивних задач визначається відповідними постулатами.

У своїх роботах Д. Д. Мордухай-Болтовський вважав необхідним користуватися при розв'язуванні задач 2-го степеня комплексом трьох інструментів — лінійкою, циркулем і гіперциркулем. Однак пізніше виявилося, що в тих випадках, коли деякі задачі розв'язувалися за допомогою всіх чотирьох інструментів, вдавалося знаходити розв'язок, правда більш складний, тільки лінійкою і циркулем.

Тому, природньо, виникло питання: чи не є взагалі гіперциркуль і орициркуль зайвими інструментами, тобто чи не можна обійтись використанням лише лінійки і циркуля у всіх тих випадках, коли при розв'язуванні задач проводяться прямі і всі три модифікації кола?

Позитивну відповідь на це питання дав Н. М. Несторович [53, 54, 58], показавши, що комплекс інструментів «лінійка—циркуль» достатній для розв'язування будь-якої конструктивної задачі 2-го степеня, а використання гіперциркуля і орициркуля лише спрощує розв'язки деяких з них. Пізніше В. Ф. Каган [71] і М. В. Гіршович [67, 88] ці ж результати одержали, виходячи з інших міркувань.

Після цього виникло питання про можливість заміни циркуля гіперциркулем або орициркулем при розв'язуванні задач 2-го степеня. І на це питання була дана позитивна відповідь незалежно і одночасно О. С. Смогоржевським [68], Н. М. Несторовичем [72, 73, 74] і, частково, Н. П. Хоменко [70]. Виявилось, що лінійка і гіперциркуль, а також лінійка і орициркуль достатні для розв'язування цих задач. Більше того, О. С. Смогоржевським показано, що будь-яку задачу 2-го степеня можна розв'язати лінійкою і гіперциркулем з фіксованою дистанцією, який можна уявляти у вигляді двобортної лінійки, одно ребро якої має дугу еквідистанти, а друге — пряму, яка є базою еквідистанти. При переході до простору Евкліда гіперциркуль з фіксованою дистанцією перетвориться в звичайну лінійку, достатню, як відомо, для розв'язування задач 2-го степеня в площині Евкліда.

Якщо врахувати й те, що, як показав Р. І. Кіріщієв [95], для розв'язання задач 2-го степеня в площині Лобачевського, як і в площині Евкліда, достатньо використовувати лінійку і циркуль постійного розхилу, то на основі вказаних вище результатів, а також розглядаючи орицикл і еквідистанту як кола з нескінченно віддаленим або ідеальним центром, приходимо до такого загального твердження.

Для розв'язування будь-якої конструктивної задачі 2-го степеня в площині Лобачевського достатньо використовувати інструменти, за допомогою яких можна креслити прямі і яку-небудь з трьох модифікацій кола будь-якого фіксованого радіуса.

При переході від площини Лобачевського до площини Евкліда це загальне твердження природним чином приводить до відомих тверджень про те, що в площині Евкліда для розв'язування задач 2-го степеня достатньо використовувати лінійку і циркуль постійного розхилу або косинець або двобортну лінійку.

Правда, для випадку орициркуля, який в евклідовій площині перетворюється в косинець, справа ускладнюється тим, що, як відзначив А. І. Костюк [118], доводиться вводити ще один постулат, який збільшує потужність косинця.

В усякому випадку, одержуємо цікаву відповідність між результатами, які торкаються конструктивної потужності різних інструментів при побудовах в площині Лобачевського і в площині Евкліда. Цю ж відповідність одержуємо і при розгляді побудов в площині Лобачевського, аналогічних побудовам Штейнера і Маскероні.

О. С. Смогоржевський [68, 75], Н. П. Хоменко [76, 82], Р. І. Демаховська [87] піддали систематичному вивченню всі найбільш цікаві допоміжні фігури, за допомогою яких, користуючись лише однією лінійкою, можна розв'язувати будь-яку конструктивну задачу 2-го степеня, тобто виконати в площині Лобачевського побудови, аналогічні штейнеровським побудовам в евклідовій площині. Ці допоміжні фігури повинні бути обрані так, щоб вони визначали п'ять точок абсолюта площини Лобачевського і дозволяли за допомогою лінійки знаходити точки перетину довільної прямої з абсолютом. До числа таких фігур відносяться, наприклад, пара паралельних прямих разом з колом і його центром, або з орициклом і його віссю, або з еквідистантою і її базисом; два кола, або два орицикла, або дві еквідистанти, і, відповідно, центр, вісь або базис одної з них і т. д. Деякі з цих результатів були знову перевідкриті канадським математиком Ф. Хандестом [99].

Пізніше Л. І. Мозгова [98] і А. І. Костюк [110] розглянули деякі інші допоміжні фігури і, зокрема, показали, що досить задавати в цих допоміжних фігурах не всю лінію постійної кривини, а лише її скінченну дугу.

Розглядаючи аналог побудов Маскероні, О. С. Смогоржевський показав [67], що будь-яку конструктивну задачу 2-го степеня можна розв'язати без допомоги лінійки, якщо одночасно використовувати циркуль, орициркуль і гіперциркуль. При цьому ним істотно було використано перетворення інверсії в площині Лобачевського.

Пізніше В. Ф. Рогаченко [85, 86] показав, що досить використовувати або циркуль разом з гіперциркулем, або орициркуль разом з гіперциркулем. При цьому в обох випадках вдалося звільнитися від використання перетворення інверсії, що значно спростило розв'язування задач. Потім К. К. Мокрищев [84, 92, 94] наклав на побудови без допомоги лінійки ще більші обмеження, показавши, що достатньо використовувати або один лише гіперциркуль, або один лише орициркуль.

В останні роки детально вивчалося також питання про конструктивну потужність деяких інших інструментів. Так, розглядалися різні види лінійки: двобортна лінійка з паралельними краями і відміченою на одному з них довільною точкою (К. К. Мокрищев [94], Ф. Хандест [99]), двобортна лінійка з розбіжними краями і відміченою на одному з них довільною точкою (Р. І. Кіріщієв [101, 115]), однобортна лінійка з жорстко скріпленою з нею точкою (шаблон, Р. І. Кіріщієв [103]). Виявилось, що кожний з цих інструментів достатній для розв'язання всякої задачі 2-го степеня.

Те ж саме показав А. І. Костюк [110] відносно косинця з перпендикулярними сторонами, а Р. І. Кіріщієв [113], крім того, — відносно косинця, сторони якого утворюють довільний кут, — гострий або тупий.

Таким чином, були одержані результати, аналогічні відомому твердженню Адлера про побудови в площині Евкліда за допомогою кута. Розуміється, використовування кожного з вищезгаданих інструментів обгрунтовується за допомогою відповідних постулатів.

Відзначимо ще цікаві дослідження М. Н. Гафурова [106], який показав еквівалентність двох комплексів інструментів: лінійка — еталон довжини і лінійка-бісектор. Кожний з цих комплексів недостатній, однак для розв'язування задач 2-го степеня. Якщо ж в площині побудови задати ще додатково пару паралельних прямих, то кожен з цих двох комплексів стає достатнім для розв'язування всякої задачі 2-го степеня.

В більшості вказаних вище робіт дослідження конструктивної потужності тих або інших інструментів базується на таких загальних міркуваннях.

В площині Лобачевського всяка конструктивна задача 2-го степеня розв'язувана за допомогою циркуля і лінійки, тобто, кінець кінцем, вона зводиться до розв'язування трьох задач, які одержали назву головних:

1) знайти точку перетину двох прямих, заданих відповідними парами точок;

2) знайти точки перетину даної прямої і кола, центр і радіус якого дані;

3) знайти точки перетину двох кіл, центри і радіуси яких дані.

За допомогою циркуля і лінійки головні задачі розв'язуються безпосередньо. Якщо ж розглядається інший комплекс інструментів, то для доведення розв'язності задач 2-го степеня з його допомогою досить показати, що цими інструментами можна розв'язати три головні задачі. Розв'язування ж трьох головних задач базується на попередньому розв'язуванні декількох допоміжних задач, список, порядок і метод розв'язування яких залежить, розуміється, від використаного комплекса інструментів. До числа цих допоміжних задач належать штейнеровські елементарні побудови (поділ і подвоєння відрізків і кутів, проведення перпендикулярів) і чотири основні задачі в площині Лобачевського, зв'язані з особливостями теорії паралельності в ній.

Зокрема, якщо в даний комплекс інструментів входить однобортна лінійка, то, як показав Р. І. Кіріщієв [122], кількість цих допоміжних задач може бути зведена до двох.

Поряд з загальними дослідженнями про конструктивну потужність різних інструментів проводилось також аналітичне дослідження розв'язності циркулем і лінійкою окремих задач: про поділ відрізка на довільне число частин (А. В. Космаков [60]), про квадратуру круга і циркулятуру квадрата (Н. М. Нестерович [65, 79], О. С. Смогоржевський [81]), про поділ кола на довільне число частин, трисекцію кута, відрізка, трикутника (М. В. Гіршович [88], К. К. Мокрищев [93], Л. І. Мозгова [97]).

У процесі розв'язування великої кількості різноманітних конструктивних задач застосовувались різні методи. З'явилась необхідність узагальнити і систематизувати нагромаджений матеріал, сформулювати основні принципи, які лежать в основі того чи іншого методу і, таким чином, намітити в теорії геометричних побудов на площині Лобачевського спеціальний розділ, який присвячений методам розв'язування конструктивних задач. В значній мірі розв'язування цієї задачі було просунуто в відомих монографіях Н. М. Несторовича [80] і О. С. Смогоржевського [81].

Потрібно, однак, вказати на необхідність продовження роботи, яка стосується загального дослідження методів розв'язування конструктивних задач.

Відзначимо, що Н. М. Несторович і О. С. Смогоржевський розробили і широко застосовували методи порівняльної геометрографічної оцінки простоти розв'язування конструктивних задач різними комплексами інструментів. Ці методи використовувалися і іншими дослідниками. Зокрема, було з'ясовано, що з трьох модифікацій циркуля звичайний циркуль — найбільш зручний інструмент, користування яким значно знижує коефіцієнт простоти побудови.

Таким чином, на третьому етапі розвитку теорії геометричних побудов в площині Лобачевського велика увага була приділена дослідженню загальних питань теорії. Однак одночасно з цим проводилось також розв'язування різноманітних конкретних задач, кількість яких значно перевищує кількість задач, які розв'язувалися на попередніх етапах.

Незважаючи на велику і, здавалось би, вичерпну роботу, проведену раніше по розв'язуванню чотирьох основних задач (побудови паралелі, відрізка і кута паралельності і спільного перпендикуляра двох розбіжних прямих), О. С. Смогоржевському [63, 68, 81] вдалося одержати і обгрунтувати нові, простіші розв'язки цих задач. Він же дав кілька нових і більш простих побудов трикутника за трьома кутами, а також за деякими іншими даними.

Н. М. Несторович [80] розглянув ряд неосновних випадків побудови трикутників, заданих різними елементами, а також розглянув задачі, які стосуються перетворення трикутників і многокутників у рівновеликі їм трикутники. Він же провів детальне дослідження і дав побудову різних модифікацій прямокутного і косокутного трикутників, в яких одна, дві або всі три вершини стають ідеальними, а також дав їх застосування до розв'язування різних конструктивних задач.

Відмітимо ще задачу про побудову правильних n-кутників, яка має розв'язок в площині Лобачевського при тих же n, що і в евклідовій площині, але істотньо іншими методами. Барбарен [45] вказав побудови для $n=5$, 6, 10, 15. О. С. Смогоржевський [66] розв'язав задачу побудови правильного 17-кутника, а В. І. Коба — ще більш складну задачу про побудову правильного 257-кутника.

З робіт іноземних вчених слід вказати на роботу іракських математиків Аль-Джахіра і Шекури [109], яка присвячена розв'язуванню задач на побудову дотичних до кіл і орициклів при різних додаткових умовах.

Нарешті, Р. Г. Диманов [96, 114, 121] розглянув всі випадки розв'язків задачі Аполонія про побудову кола, яке дотикається трьох даних кіл, і просторовий аналог цієї задачі.

Таким чином, за останні десятиріччя була проведена велика кількість цікавих досліджень, зв'язаних з дальшою розробкою класичної спадщини М. І. Лобачевського, і був створений великий розділ неевклідової геометрії Лобачевського, який містив як численні результати загального характеру, так і велику кількість розв'язків конкретних задач, кожна з яких розкриває все нові і нові властивості гіперболічного простору.

В результаті цього стала можливою поява окремих монографій, які були спеціально присвячені теорії геометричних побудов в площині Лобачевського. Майже одночасно з'явилися дві монографії — О. С. Смогоржевського [75, 81] і Н. М. Несторовича [80]. В курси основ геометрії О. С. Смогоржевського [63, 91] і В. Ф. Кагана [71] включаються окремі розділи, які містять виклад основ теорії геометричних побудов в гіперболічній площині.

Значно менше приділялось уваги вивченню питань, зв'язаних з геометричними побудовами у двовимірній еліптичній геометрії як у формі власне еліптичної геометрії, так і у більш наочній формі сферичної геометрії. Можна відзначити лише кілька робіт з цього питання.

В згаданій вже роботі Є. Фреда [37] одночасно з дослідженням геометричних побудов в площині Лобачевського проведено дослідження деяких загальних питань і для побудов в еліптичній площині: необхідні і достатні умови розв'язності конструктивних задач циркулем і лінійкою і використовування цих умов при дослідженні розв'язності ряду конкретних задач.

Д. Д. Мордухай-Болтовський [47], розглядаючи побудови на сфері, показав, що всяка конструктивна задача 2-го степеня може бути розв'язана за допомогою двох приладів, один з яких викреслює «сферичні прямі», тобто великі кола сфери $\Big($за термінологією Д. Д. Мордухай-Болтовського, циркуль I, який мислиться як циркуль постійного сферичного розхилу, рівного $\frac{\pi}{2}\Big)$, а другий викреслює малі кола сфери $\Big($циркуль II — циркуль змінного розхилу, меншого як $\frac{\pi}{2}\Big)$. Далі він показав, що ті ж задачі розв'язуються за допомогою одного лише циркуля I, якщо дано мале коло з центром, або навіть його дуга з центром. Таким чином, він показав можливість штейнерoвських побудов на сфері.

Н. М. Несторович [57] вказує, що інструмент, який викреслює «сферичні прямі», можна уявляти не у вигляді циркуля I, а у вигляді сферичної лінійки, яка накладається на сферу по її великому колу. При такому підході уявлення про звичайну евклідову лінійку більш природньо переноситься на побудови на сфері або в еліптичній площині, оскільки операції з такою лінійкою визначаються, по суті, тими ж постулатами, що і в евклідовій площині. Н. М. Несторович розглянув різні випадки побудови трикутників в еліптичній площині за допомогою такої лінійки і циркуля II.

Побудови на сфері також розглядав Л. Бібербах в своїй монографії [83, §§ 29 і 30]. Тут він, спираючись на результати [12, 48, 52], розглянув побудови за допомогою циркуля і сферичної лінійки, а також за допомогою одного лише циркуля. А. Лебег [78] також розглядав побудови на сфері за допомогою циркуля і лінійки.

Нарешті, відзначимо ще роботи А. І. Костюка [111, 120], присвячені геометричним побудовам в еліптичній площині, в яких показана розв'язність задач 2-го степеня за допомогою еліптичних циркуля і лінійки. Крім того, показана достатність одної тільки лінійки для розв'язування таких задач, якщо в площині накреслені деякі допоміжні фігури. Показується також достатність рухомого прямого кута для розв'язності задач 2-го степеня. Ці ж результати без труднощів переносяться на випадок побудов на сфері.

Вказаними роботами, по суті, вичерпуються дослідження побудов в еліптичній площині і на сфері.

Таким чином, залишається ще багато недосліджених питань теорії геометричних побудов в еліптичній площині і на сфері. До їх числа можна віднести дослідження нових методів розв'язування конструктивних задач і дальшу розробку таких відомих методів, як алгебраїчний і метод геометричних місць. Далі, необхідно більш детально вивчити конструктивну потужність різних можливих креслярських інструментів, наприклад інструмента (його можна назвати гіперциркулем), який викреслює кола, розглядувані як еквідистанти на сфері і в еліптичній площині — з заданою базою і дистанцією.

Ми вже говорили про те, що є багато конкретних конструктивних задач, які, наскільки нам відомо, ще не вивчались, хоч вони можуть мати і безпосередньо практичне значення, якщо йде мова про побудови на сфері. До їх числа можна віднести задачі про побудову дотичних, правильних n-кутників і т. д.

Так само не вивчались ще питання конструктивної геометрії в площинах з виродженою неевклідовою метрикою. Тут з'являються нові труднощі, які потребують особливого підходу до трактування конструктивних задач, зв'язані з тим, що метрика кутів в цих площинах є гіперболічною або параболічною і, таким чином, порушується звичайне уявлення про коло як лінію, яка може бути описана неперервним обертанням циркуля.

В теорії геометричних побудов в гіперболічній площині все ще залишається ряд питань, які чекають свого розвитку або розв'язання. До їх числа треба віднести дальшу розробку методів розв'язування конструктивних задач на площині, а також дослідження просторових задач. В далеко просунутій теорії побудов обмеженими засобами до цього часу залишається відкритим питання про розв'язність задач 2-го степеня одним лише звичайним циркулем або двобортною лінійкою без відміченої на одному з бортів точки. Не дістали ще достатнього розвитку аналітичні методи, які дозволяли б встановлювати критерії розв'язності тих або інших конструктивних задач і їх класів за допомогою тих або інших інструментів. Останнє, зрозуміло, стосується не тільки гіперболічної площини.

Являє також інтерес вивчення задач вищих степенів, в першу чергу — третього і четвертого, і дослідження мінімальних засобів, достатніх для їхнього розв'язання.

ЛІТЕРАТУРА ПО ГЕОМЕТРИЧНИХ ПОБУДОВАХ В НЕЕВКЛІДОВИХ ПРОСТОРАХ

1. Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. I. М.—Л., 1946, стр. 185—261.
2. Я. Больаи. Appendix. Приложение, содержащее науку о пространстве абсолютно истинную. Пер., вступ. статьи и примечания В. Ф. Кагана. М.—Л., 1950.
3. Н. И. Лобачевский. Новые начала геометрии с полной теорией параллельных. Полн. собр. соч., т. II. М.—Л., 1949, стр. 147—454.
4. N. Lobatschewsky. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin, Fincke, 1840. Переклад див: Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. I. М.—Л., 1946, стр. 79—127.
5. M. Simon. Journ. für die reine und angew. Math., 107, 1891, S. 84—86.
6. L. Gérard. Sur la géométrie non-euclidienne. Thése. Paris, 1892.
7. M. Simon. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinigung, 3, 1894, S. 80—82.
8. M. Simon. Math. Ann., 48, 1897, S. 607.
9. Ф. Энгель. Изв. Каз. физ.-мат. о-ва, (2), 7, № 3, 1897, стр. 118—121.
10. F. Engel. Berichte der Kön. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. 50, 1898, S. 181—187.
11. F. Engel. Lobatschefskij. Lpz., 1898.
12. T. Bonnesen. Nyt Tidsskr. for Mat., 10, 1899, S. 1—13, 25—35.
13. P. Barbarin. Etudes de géométrie analitique non-euclidienne. Bruxelles, 1900.
14. А. К. Власов. Уч. зап. Моск. ун-та, отд. физ.-мат., 18, 1901.
15. H. Liebmann. Berichte d. Kön. Sächs. Gesellsch. der Wiss., 53, 1901, S. 477—491.
16. F. Schur. Math. Ann., 55, 1902, S. 265—292.
17. D. Hilbert. Math. Ann, 57, 1903, S. 137—150. Рос. перекл. в книзі: Д. Гильберт. Основания геометрии. М.—Л., 1948, 3-й додаток.
18. H. Liebmann. Archiv der Math. und Physik, (3), 5, 1903, S. 213—215.
19. R. Bonola. Rendiconti di reale Istituto Lombardo di scienze e lettere, (2), 37, 1904, p. 254—258.
20. M. Grossman. Math. Ann., 58, 1904, S. 578—582.
21. M. Grossman. Die fundamentalen Konstruktionen der nichteuklidischen Geometrie. Frauenfeld, 1904.

22. H. Liebmann. Math. Ann., 59, 1904, S. 110—128.
23. H. Liebmann. Nicht-euklidische Geometrie. Lpz., 1905, 3-e Aufl. 1923.
24. H. Liebmann. Math. Ann., 61, 1905, S. 185—199.
25. M. Simon. Math. Ann., 61, 1905, S. 587—588.
26. R. Bonola. La geometria non-euclidea. Bologna, 1906, Рос. пер.: Р. Бонола. Неевклидова геометрия. Спб., 1910 (особливо додаток III).
27. H. Liebmann. Berichte d. Kön. Sächs. Gesellsch. d. Wiss., 58, 1906, S. 560—570.
28. Е. И. Григорьев. Вестник оп. физ. и элем. матем., № 472, 1908, стр. 368—369.
29. O. Pund. Archiv der Mathem. und Physik, (3), 14, 1909, S. 21—22.
30. M. Grossman. Math. Ann., 68, 1910, S. 141—144.
31. H. Liebmann. Berichte der Sächs. Gesellsch. der Wiss., Math.—Phys. Klasse, 62, 1910, S. 35—41.
32. H. Liebmann. Jahresber. d. Deutsch. Math.—Ver., 20, 1911, S. 56—69.
33. M. Grossman. Verhandlungen der Schweiz. Naturforsch. Gesellsch., 35, 1912.
34. T. Kubota. Tohoku Mathem. journ., 1, 1912, p. 106—119.
35. M. Simon. Archiv der Math. und Phys., (3), 19, 1912, S. 368—369.
36. M. Simon. Archiv der Math. und Phys., (3), 19, 1912, S. 368.
37. E. Freda. Giorn. di Mat. di Battaglini, 51, 1913, p. 343—365.
38. M. Zacharias. Enz. der Math. Wiss., IIIABG, 1914—1921, S. 859—1172. (Про геометричні побудови в площині Лобачевського — див. стор. 1149—1150 та 1157—1162).
39. P. Barbarin. Comptes Rendus de l'Acad. des sc., 166, 1918, p. 202—204.
40. Д. Д. Мордухай-Болтовской. О геометрических построениях в пространстве Лобачевского. Самара, 1922.
41. M. Simon. Nichteuklidische Geometrie in elementarer Behandlung. Lpz., 1925.
42. Д. Д. Мордухай-Болтовской. Сб. «In memoriam Lobatschevskii», vol. 2, 1927, стр. 67—82.
43. F. Schur. Там же, стр. 99—102.
44. R. Baldus. Nichteuklidische Geometrie. Berlin, 1927. Рос. перекл.: Р. Бальдус. Неевклидова геометрия. М.—Л., 1933.
45. P. Barbarin. La géométrie non-euclidienne. 3-me ed., Paris, 1928.
46. Д. Д. Мордухай-Болтовской. Журн. мат. циклу ВУАН, 1, 3, 1933, стр. 15—30.
47. Д. Д. Мордухай-Болтовской. Мат. сб., т. 42, вып. 5, 1935, стр. 535—546.
48. D. Fog. Mat. Tidsskr., 1935, S. 16—24.
49. Н. М. Несторович. Уч. зап. НИИ мат. и физ. при Ростов. гос. ун-те, 1, 1937, стр. 64—65.
50. W. Fröhlich. Lotos, 85, 1937, S. 43—47.
51. F. Schilling. Pseudosphärische, hyperbolisch-sphärische und elliptisch-sphärische Geometrie. Lpz. und Berlin, 1937.
52. B. Wiedemann. Dtsch. Mathematik, 2, 1937, S. 520—544; 7, 1942, S. 178—184.
53. Н. М. Несторович. Уч. зап. НИИ мат. и физ. при Ростов. гос. ун-те, 3, 1939, стр. 93—125.
54. Н. М. Несторович. ДАН СССР, 22, № 5, 1939, стр. 233—235.
55. Н. М. Несторович. Уч. зап. НИИ мат. и физ. при Ростов. гос. ун-те, 4, 1940, стр. 41—65.
56. Н. М. Несторович. Там же, стр. 66—80.
57. Н. М. Несторович. Изв. Ростов. н/Д. пед. ин-та, т. X, 1940.
58. Н. М. Несторович. ДАН СССР, 43, № 5, 1944, стр. 186—188.
59. А. С. Смогоржевский. ДАН СССР, 50, 1945, стр. 61—63.
60. А. В. Космаков. Уч. зап. Иркутск. пед. ин-та, IX, 1946, стр. 8—13.
61. А. С. Смогоржевский. Сообщения о научно-исслед. работе Киев. политехн. ин-та, V, 1946, стр. 3—4.
62. Н. М. Несторович. Тезисы докладов конф. научн. работников Дона и Сев. Кавказа. Ростов н/Д., 1947.
63. О. С. Смогоржевський. Основи геометрії. Київ, 1947.
64. М. В. Гиршович. ДАН СССР, 60, № 5, 1948, стр. 757—759.
65. Н. М. Несторович. ДАН СССР, 63, № 3, 1948, стр. 613—614.
66. О. С. Смогоржевський. Наук. зап. Київ. пед. ін-ту, 6, фіз.-мат. сер., № 3, 1948, стор. 27—34.
67. О. С. Смогоржевський. Наук. зап. Київ. держ. ун-ту, 7, вип. 4, Матем. збірник № 2, 1948, стор. 151—156.
68. А. С. Смогоржевский. Сб. «50 лет Киев. политехн. ин-та». К., 1948, стр. 621—642.

69. А. С. Смогоржевский. Сообщения о научно-исслед. работе Киев. политехн. ин-та, 7, 1948, стр. 107—108.
70. Н. П. Хоменко. Там же, стр. 109—110.
71. В. Ф. Каган. Основания геометрии, ч. I. М.—Л., 1949, разд. IX.
72. Н. М. Несторович. Тезисы докладов научн. конференции, посвященной 80-летию Ростов. ун-та, вып. II, 1949, стр. 88—89.
73. Н. М. Несторович. ДАН СССР, 66, № 6, 1949, стр. 1051—1053.
74. Н. М. Несторович. ДАН СССР, 69, № 6, 1949, стр. 731—734.
75. О. С. Смогоржевський. Теорія геометричних побудов в просторі Лобачевського. Київ, 1949.
76. Н. П. Хоменко. Изв. Киев. политехн. ин-та, 10, 1950, стр. 141—145.
77. L. Rajčić. Hrvatsko Prirodoslovno Društvo, Glasnik Mat. Fis. Astr. (2), 5, 1950, p. 57—120.
78. H. Lebesgue. Leçons sur les constructions géométriques. Paris, 1950.
79. Н. М. Несторович. Уч. зап. Ростов. н/Д. гос. ун-та, 14, Тр. физ.-мат. ф-та, вып. I, 1951, стр. 55—59.
80. Н. М. Несторович. Геометрические построения в плоскости Лобачевского. М.—Л., 1951.
81. А. С. Смогоржевский. Геометрические построения в плоскости Лобачевского. М.—Л., 1951.
82. Н. П. Хоменко. Наук. зап. Київ. держ. ун-ту, 10, вип. I. Матем. зб., № 5, 1951, стор. 133—140.
83. L. Bieberbach. Theorie der geometrischen Konstruktionen. Basel, 1952.
84. К. К. Мокрищев. ДАН СССР, 91, № 3, 1953, стр. 453—456.
85. В. Ф. Рогаченко. Наук. зап. Львів. ун-ту, 22, сер. фіз.-мат., вип. 5, 1953, стор. 72—83.
86. В. Ф. Рогаченко. ДАН СССР, 88, № 4, 1953, стр. 615—618.
87. Р. И. Демаховская. Изв. Киев. политехн. ин-та, 12, 1953, стр. 130—142.
88. М. В. Гиршович. Уч. зап. Калинин. пед. ин-та, 16, 1953, стр. 7—38.
89. О. С. Смогоржевський. ДАН УРСР, № 6, 1954, стор. 399—401.
90. Р. И. Демаховская. Изв. Киев. политехн. ин-та, 16, 1954, стр. 229—242.
91. О. С. Смогоржевський. Основи геометрії, 2-е вид. К., 1954.
92. К. К. Мокрищев. ДАН УРСР, № 6, 1955, стор. 515—519.
93. К. К. Мокрищев. Уч. зап. Ростов. н/Д. гос. пед. ин-та, вип. 3, 1955, стр. 103—110.
94. К. К. Мокрищев. Уч. зап. Ростов. н/Д. ун-та, т. 32, № 4, 1955, стр. 15—27.
95. Р. И. Кирищиев. УМН, т. 11, вып. I (67), 1956, стр. 207—208.
96. Р. Г. Дыманов. Уч. зап. Харьков. пед. ин-та, т. 18, вып. 1, 1956, стр. 57—63.
97. Л. И. Мозговая. Изв. Киев. политехн. ин-та, т. 19, 1956, стр. 369—381.
98. Л. И. Мозговая. Там же, стр. 382—388.
99. F. Handest. Canad. J. Math., 8, № 3, 1956, p. 389—394.
100. В. Ф. Каган. Основания геометрии, ч. II. М., 1956, стр. 101—108.
101. Р. И. Кирищиев. Тр. Ростов. н/Д. инжен.-строит. ин-та, вып. 5, 1956, стр. 236.
102. Р. И. Кирищиев. Там же, стр. 235—236.
103. Р. И. Кирищиев. Изв. вузов, Математика, № 1, 1957, стр. 161—165.
104. А. Ф. Семенович. Уч. зап. Свердл. пед. ин-та, вып. 13, 1957, стр. 44—46.
105. Р. Г. Дыманов. Уч. зап. Харьков. пед. ин-та, т. 21, вып. 2, 1957, стр. 131—138.
106. М. Н. Гафуров. Уч. зап. Наманган. пед. ин-та, вып. II, 1957, стр. 223—274.
107. K. Rössler. Mat. Škole, 8, № 3, 1958, S. 134—141.
108. E. Hofmann. Arch. Math., 9, № 3, 1958, S. 219—227.
109. M. W. Al-Dhahir, R. N. Shekoury. Proc. Iraqi Scient. Soc., 2, 1958, p. 1—6.
110. А. I. Костюк. Наук. зап. Луцьк. пед. ін-ту, т. VI, вип. 3, 1958, стор. 37—55.
111. А. I. Костюк. Там же, стор. 57—73.
112. J. Molnár. Ann. Univ. scient. Budapest Sec. Math., 2, 1959, S. 31—32.
113. Р. И. Кирищиев. Уч. зап. физ.-мат. ф-та Ростов. н/Д. ун-та, т. 43, № 6, 1959, стр. 127—132.
114. Р. Г. Дыманов. Уч. зап. Харьков. пед. ин-та, т. 34, вып. 3, сер. мат., 1960, стр. 13—20.
115. Р. И. Кирищиев. Тр. Ростов. н/Д. инж.-строит. ин-та, вып. 10, 1960, стр. 118—124.
116. Б. А. Бублик. Уч. зап. Ростов. н/Д. пед. ин-та, вып. 5 (42), 1960, стр. 83—88.

117. Н. В. Наумович. Тр. секции теорет. и инж. графики. Ростов н/Д., 1961, стр. 22—31.
118. А. І. Костюк. Наук. зап. Луцьк. пед. ін-ту, т. IX, фіз.-мат. сер., вип. 4, 1961, стор. 10—15.
119. А. І. Костюк. Там же, стор. 16—23.
120. А. І. Костюк. Там же, стор. 24—27.
121. Р. Г. Дыманов. Уч. зап. Харьков. пед. ин-та физ. воспитания, т. 39, 1961, стр. 3—12.
122. Р. И. Кирищиев. Изв. вузов, Математика, № 2 (27), 1962, стр. 65—75.