Є. С. ДОРОЖОВСЬКИЙ, Б. М. КОРДУБА, В. Г. КОСТЕНКО

РОЗРАХУНОК ПОЛЯ І ТРАЄКТОРІЙ ОДНІЄЇ ПЛОСКОЇ ЕЛЕКТРОННО-ОПТИЧНОЇ СИСТЕМИ

Розглянемо електронно-оптичну систему, що складається з трьох пар паралельних електродів (щілин), довжини і віддалі між якими вказані на рис. 1. На двох парах паралельних електродів однакової довжини задається потенціал $U=1$, а на третій парі $U=0$.

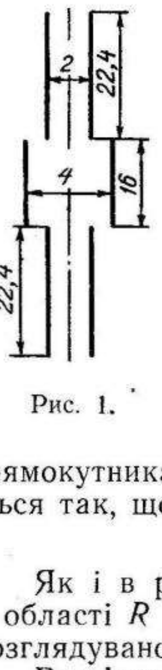

Рис. 1.

Рис. 2.

Задача знаходження поля такої системи міркуваннями, які наведені в роботі [2], зводиться до задачі

$$\Delta U = q(x,\ y) \qquad (1)$$

всередині прямокутника розміром 104×192 *мм* (рис. 2) з умовою

$$U|_L = 1, \qquad (2)$$

де L — границя прямокутника, $q(x,\ y) = 0$ всередині прямокутника всюди, за винятком електродів, а на останніх визначається так, щоб на них

$$U(x,\ y) = u(x,\ y). \qquad (3)$$

Як і в роботі [2], встановлено, що розв'язок задачі (1), (2), (3) в області R (рис. 2), що лежить між електродами, буде давати поле розглядуваної задачі принаймні з п'ятьма вірними знаками.

Розв'язок задачі (1), (2), (3) знайдено методом Г. М. Положого на електронно-обчислювальній машині М-20 з горизонтальним кроком сітки $h=0{,}1$ *мм* і вертикальним $h_1=0{,}64$ *мм*.

Задовольняючи граничні умови на вертикальних сторонах прямокутника і враховуючи симетрію задачі відносно осей ox і o_1y_1, як і в роботі [2], одержимо після відповідних спрощень формули сумарних представлень компоненти $\tilde{U}_k(x_i)$ стовпця (вектора) $\vec{\tilde{U}}(x_i)$:

$$\tilde{U}_k(x_i) = \alpha_k - h^2 \frac{\mu_k^i - \nu_k^i}{\mu_k^{1040} - \nu_k^{1040}} \left[\frac{\mu_k^{540} - \nu_k^{540} + \mu_k^{500} - \nu_k^{500}}{\mu_k - \nu_k} 2\varphi_k + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu_k^{530} - \nu_k^{530} + \mu_k^{510} - \nu_k^{510}}{\mu_k - \nu_k} 2\psi_k \right] + h^2 \left[\frac{\mu_k^{i-500} - \nu_k^{i-500}}{\mu_k - \nu_k} 2\varphi_k + \frac{\mu_k^{i-510} - \nu_k^{i-510}}{\mu_k - \nu_k} 2\psi_k \right], \qquad (4)$$

де $2\varphi_k$ і $2\psi_k$ — добутки k-го рядка матриці P відповідно на стовпці $\vec{q}(x_{500})=\vec{q}(x_{540})$ і $\vec{q}(x_{510})=\vec{q}(x_{530})$. Перший доданок в останніх дужках формули (4) береться тільки при $500<i\leq 520$, а другий — при $510<$ $<i\leq 520$.

Завдяки симетрії задачі поле потенціалу досить знайти в чверті прямокутника між його осями симетрії за формулою

$$\vec{U}(x_i)=P\vec{\tilde{U}}(x_i). \tag{5}$$

Стовпці

$$\vec{q}(x_{500})=\vec{q}(x_{540})=(0,\ldots(137)\ldots 0,\ q_{36},\ \ldots,\ q_{48},\ \ldots,\ q_{36},\ 0\ldots(137)\ldots 0);$$

$$\vec{q}(x_{510})=\vec{q}(x_{530})=(0,\ldots(102)\ldots 0,\ q_1,\ \ldots,\ q_{35},\ 0,\ldots(25)\ldots 0,\ q_{35},\ \ldots,\ q_1,\ 0\ldots(102)\ldots 0)$$

знаходяться з умов (3) із системи рівнянь

$$h^2\sqrt{\frac{2}{300}}\left[\sin\frac{i\pi}{300}C_1^{(1)}+\sin\frac{3i\pi}{300}C_3^{(1)}+\ldots+\sin\frac{299i\pi}{300}C_{299}^{(1)}\right]=1; \tag{6}$$

$$(i=138,\ldots,\ 150)$$

$$h^2\sqrt{\frac{2}{300}}\left[\sin\frac{i\pi}{300}C_1^{(2)}+\sin\frac{3i\pi}{300}C_3^{(2)}+\ldots+\sin\frac{299i\pi}{300}C_{299}^{(2)}\right]=0,$$

$$(i=103,\ \ldots,\ 137)$$

де

$$C_k^{(1)}=\frac{\mu_k^{500}-\nu_k^{500}}{\mu_k^{1040}-\nu_k^{1040}}\left(\frac{\mu_k^{540}-\nu_k^{540}+\mu_k^{500}-\nu_k^{500}}{\mu_k-\nu_k}2\varphi_k+\frac{\mu_k^{530}-\nu_k^{530}+\mu_k^{510}-\nu_k^{510}}{\mu_k-\nu_k}2\psi_k\right);$$

$$C_k^{(2)}=\frac{\mu_k^{510}-\nu_k^{510}}{\mu_k^{1040}-\nu_k^{1040}}\left(\frac{\mu_k^{540}-\nu_k^{540}+\mu_k^{500}-\nu_k^{500}}{\mu_k-\nu_k}2\varphi_k+\frac{\mu_k^{530}-\nu_k^{530}+\mu_k^{510}-\nu_k^{510}}{\mu_k-\nu_k}2\psi_k\right)-$$

$$-\frac{\mu_k^{10}-\nu_k^{10}}{\mu_k-\nu_k}2\varphi_k.$$

$$(k=1,\ 3,\ldots,\ 299).$$

Алгоритм для машинного підрахунку коефіцієнтів при $q_1,\ldots,q_{48}$ в системі (6) такий самий, як і в роботі [2]. Так, наприклад, для першого з перших 13 рівнянь системи (6) коефіцієнти при $q_1,\ldots,q_{35}$ одержуються шляхом множення 138-го рядка матриці P на діагональну матрицю N, а потім на 103-й, ..., 137-й стовпці тієї ж матриці P відповідно; при $q_{36},\ldots,q_{48}$ — шляхом множення 138-го рядка матриці P на діагональну матрицю M, а потім на 138-й,..., 150-й стовпці матриці P відповідно. Аналогічним чином і в інших рівняннях системи (6) з використанням діагональних матриць L і $H=N$ і інших рядків матриці P від 103-го до 150-го.

При цьому

$$N=[N_1,\ 0,\ N_3,\ldots,\ 0,\ N_{299}],\quad M=[M_1,\ 0,\ M_3,\ldots,\ 0,\ M_{299}];$$

$$L=[L_1,\ 0,\ L_3,\ldots,\ 0,\ L_{299}],\quad H=[H_1,\ 0,\ H_3,\ldots,\ 0,\ H_{299}]\ \text{— діагональні матриці},$$

де

$$N_k=\frac{\mu_k^{500}-\nu_k^{500}}{\mu_k^{1040}-\nu_k^{1040}}\ \frac{\mu_k^{530}-\nu_k^{530}+\mu_k^{510}-\nu_k^{510}}{\mu_k-\nu_k};$$

$$M_k=\frac{\mu_k^{500}-\nu_k^{500}}{\mu_k^{1040}-\nu_k^{1040}}\,\frac{\mu_k^{540}-\nu_k^{540}+\mu_k^{500}-\nu_k^{500}}{\mu_k-\nu_k};$$

$$L_k=\frac{\mu_k^{510}-\nu_k^{510}}{\mu_k^{1040}-\nu_k^{1040}}\,\frac{\mu_k^{530}-\nu_k^{530}+\mu_k^{510}-\nu_k^{510}}{\mu_k-\nu_k};$$

$$H_k=\frac{\mu_k^{510}-\nu_k^{510}}{\mu_k^{1040}-\nu_k^{1040}}\,\frac{\mu_k^{540}-\nu_k^{540}+\mu_k^{500}-\nu_k^{500}}{\mu_k-\nu_k}-\frac{\mu_k^{10}-\nu_k^{10}}{\mu_k-\nu_k}=N_k.$$

$$(k=1,\ 3,\ldots,\ 299)$$

Розв'язок системи (5) на машині М-20 привів до таких результатів:

$q_1=-0{,}290\,028\,012$,	$q_{17}=-0{,}176\,208\,951$,	$q_{33}=-2{,}812\,483\,40$,
$q_2=-0{,}139\,893\,600$,	$q_{18}=-0{,}191\,589\,163$,	$q_{34}=-5{,}129\,074\,28$,
$q_3=-0{,}108\,409\,681$,	$q_{19}=-0{,}209\,236\,588$,	$q_{35}=-14{,}048\,472\,5$,
$q_4=-0{,}097\,579\,260$,	$q_{20}=-0{,}229\,608\,369$,	$q_{36}=14{,}845\,526\,900$,
$q_5=-0{,}094\,315\,446$,	$q_{21}=-0{,}253\,297\,104$,	$q_{37}=6{,}128\,629\,140$,
$q_6=-0{,}094\,526\,445$,	$q_{22}=-0{,}281\,081\,348$,	$q_{38}=3{,}717\,363\,720$,
$q_7=-0{,}096\,655\,278$,	$q_{23}=-0{,}314\,003\,983$,	$q_{39}=2{,}525\,429\,980$,
$q_8=-0{,}100\,061\,479$,	$q_{24}=-0{,}353\,494\,557$,	$q_{40}=1{,}846\,071\,680$,
$q_9=-0{,}104\,476\,143$,	$q_{25}=-0{,}401\,568\,990$,	$q_{41}=1{,}433\,742\,410$,
$q_{10}=-0{,}109\,796\,618$,	$q_{26}=-0{,}461\,176\,353$,	$q_{42}=1{,}174\,982\,330$,
$q_{11}=-0{,}116\,004\,603$,	$q_{27}=-0{,}536\,833\,928$,	$q_{43}=1{,}009\,396\,160$,
$q_{12}=-0{,}123\,132\,257$,	$q_{28}=-0{,}635\,873\,356$,	$q_{44}=0{,}902\,491\,679$,
$q_{13}=-0{,}131\,249\,096$,	$q_{29}=-0{,}771\,054\,342$,	$q_{45}=0{,}833\,929\,461$,
$q_{14}=-0{,}140\,457\,849$,	$q_{30}=-0{,}966\,414\,744$,	$q_{46}=0{,}791\,641\,455$,
$q_{15}=-0{,}150\,895\,539$,	$q_{31}=-1{,}271\,226\,630$,	$q_{47}=0{,}768\,656\,626$,
$q_{16}=-0{,}162\,738\,341$,	$q_{32}=-1{,}795\,690\,550$,	$q_{48}=0{,}761\,366\,552$,

Поле потенціалу за формулами (4), (5) підраховане на тій самій машині М-20 в смузі між абсцисами x_{500} і x_{540}, причому виявилося, що на електродах в точках перетину їх з сіткою задане значення потенціалу збігається з розрахованим з точністю не менше як сім знаків.

Траєкторії розглядуваної електронно-оптичної системи задовольняють систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y};$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial x}$$

в безрозмірних координатах. Використовуючи одержане поле потенціалу і застосовуючи екстраполяційну формулу Адамса—Штермера, одержимо траєкторії цієї системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Г. Н. Положий. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд. Киев. ун-та, 1962.
2. Є. С. Дорожовський, Б. М. Кордуба, В. Г. Костенко. Задача Діріхле плоскої електростатики. Даний збірник.
3. Л. Коллатц. Численные методы решения дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1953.

Е. С. ДОРОЖОВСКИЙ, Б. М. КОРДУБА, В. Г. КОСТЕНКО

РАСЧЕТ ПОЛЯ ПОТЕНЦИАЛА ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

(резюме)

В работе решается одна плоская задача электронной оптики. Приводится расчетная формула для потенциала и дается алгоритм для машинного подсчета коэффициентов возникающей при этом системы алгебраических уравнений.

По подсчитанному полю потенциала произведен расчет траекторий полета электронов в данной электронно-оптической системе методом Адамса—Штермера.