ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
Серія механіко-математична

Б. В. ВАЛЬКО, Й. В. ЛЮДКЕВИЧ, І. О. ПРУСОВ

РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОДІВ МАЛОЇ ТОВЩИНИ МЕТОДОМ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРІВ

Розглянемо деякі основні задачі про знаходження потенціалу системи просторових електродів малої товщини з осьовою симетрією і потенціалу плоскої системи електродів, на кожному з яких потенціал набуває заданого постійного значення. Шуканий розв'язок задається у вигляді потенціалу простого шару для одного електроду системи, не враховуючи сумування по всіх електродах. Визначення невідомої густини зводиться до інтегрального рівняння, знаходження розв'язку якого зв'язане з великими труднощами в обчисленні. Задання густини у вигляді лінійної комбінації деяких функцій з нелінійними параметрами, які спеціально підбираються в процесі розв'язування задачі, значно зменшує ці труднощі. В задачах, в яких допускається, що товщина електродів мало впливає на розподіл поля, приймається, що густини розподілені на серединних поверхнях, а граничні умови задовольняються тільки з одного боку.

1. Осесиметричний потенціал електродів. Нехай на поверхні достатньо гладкого електроду малої товщини $2h$ (взагалі змінної) і радіусу серединної поверхні $R=\text{const}$ заданий потенціал u_1. Замінимо фізичну густину на поверхні електроду фіктивною густиною $q(\xi)$ на його серединній поверхні, радіус якої R, а твірна z_1z_2. Потенціал цієї густини в точці $M(r, z)$ циліндричної системи координат з точністю до постійного множника виражається формулою

$$U(r,\ z)=\int\limits_{z_1}^{z_2}\frac{q(\zeta)\,K(\xi)\,d\zeta}{\sqrt{(R+r)^2+\alpha^2}},\quad K(\zeta)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\Theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\Theta}},\tag{1}$$

$$k^2=\frac{4Rr|}{(R+r)^2+\alpha^2},\quad \alpha=\zeta-z.$$

Будемо шукати густину $q(\zeta)$ у вигляді

$$q(\zeta)=\sum_{k=1}^{n} q_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k b_k}{b_k^2+(\zeta-\zeta_k)^2}+a_0,\tag{2}$$

де a_k — невідомі параметри, b_k — параметри, задані заздалегідь, ζ_k — вибрані точки на проміжку (z_1, z_2). Вимагаючи, щоб в $n+1$ точках з координатами $(R-h_j,\ \xi_j')$ на внутрішній стороні електроду потенціал набував заданого значення, дістанемо таку систему рівнянь для визначення невідомих a_k $(k=0,\ 1,\ 2,\dots,n)$:

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} \frac{q(\xi)K(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(R+r)^2+\alpha^2}}\Bigg|_{\substack{r=R-h_j\\ z=\xi_j'}} = U_1\ (j=1,\ 2,\ 3,\dots,\ n), \tag{3}$$

де $h_j=h(\xi_j')\neq 0$; ξ_j' — точка максимуму від одної з густин $q_k(\xi)\,(k=1,\dots n)$; ξ_j' при $j=0$ — точка максимуму потенціалу від густини $q(\xi)=a_0$. При такому виборі точок ξ_j' в матриці коефіцієнтів системи (3) діагональні елементи є найбільшими в кожному рядку. А тому система (3) завжди має розв'язок і, крім цього, потенціал (1) набуває екстремальних значень тільки на електродах. Постійні b_k шляхом проб підбираються так, щоб похибка в граничних умовах в проміжкових точках між ξ_j' була мінімальною.

Таким чином, (1)—(3) являє собою наближений розв'язок задачі для електродів заданої форми і одночасно точним, якщо покласти, що електроди обмежені еквіпотенціальними лініями, які проходять через точки ξ_j'.

Припускаємо, що електроди з товщиною $2h(\xi)\neq 0$ достатньо гладкі, таким чином, густина $q(\xi)$ обмежена, а її похідна $q'(\xi)$ абсолютно інтегрована.

Тому формулу (1) інтегруванням по частинах можна записати у вигляді

$$U(r,\ z)=\left[q(\xi)\tilde{F}(\alpha)-\int q'(\xi)\tilde{F}(\alpha)\,d\xi\right]_{\xi=z_1}^{\xi=z_2}+$$

$$+\left[\frac{F(\zeta_0')}{\zeta_0'-\zeta_0''}+\frac{F(\zeta_0'')}{\zeta_0''-\zeta_0'}\right]\int\limits_{z_1}^{z_2} q(\zeta)\,d\zeta, \tag{4}$$

де

$$\tilde{F}(\alpha)=F(\alpha)-\frac{F(\zeta_0'')(\xi-\zeta_0'')}{\zeta_0'-\zeta_0''}-\frac{F(\zeta_0')(\xi-\zeta_0')}{\zeta_0''-\zeta_0'};$$

$$F(\alpha)=\int\limits_0^{\pi/2}\ln\frac{\alpha+\sqrt{m^2+4Rr\sin^2\Theta}}{\alpha+\sqrt{m^2+4Rr\Theta^2}}\,d\zeta+\frac{\pi}{2}\ln(\alpha+n)-\frac{\pi}{2}+$$

$$+\frac{\alpha}{2\sqrt{Rr}}\ln\frac{n+\pi\sqrt{Rr}}{m}+\frac{R-r}{\sqrt{Rr}}\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{\pi\sqrt{Rr}\,(R-r)}{(\alpha+m)(m+n)}\right];$$

$$\alpha=\xi-z,\quad m=\sqrt{\alpha^2+(R-r)^2},\quad n=\sqrt{\pi^2Rr+m^2},$$

$$\zeta_0'=z_k-\frac{b_k}{\sqrt{3}},\quad \zeta_0''=z_k+\frac{b_k}{\sqrt{3}}.$$

Система рівнянь в цьому випадку набирає вигляду

$$U(r,\ z)\Big|_{\substack{r=R-h_j\\ z=\xi_j'}}=U;\qquad (j=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n). \tag{5}$$

У формулах (4) і (5) ядро $F(\alpha)$ регулярне навіть у випадку $h(\xi)=0$. В цьому їх перевага перед формулами (1)—(3), ядро яких сингулярне при $h(\xi)=0$.

Наведений розв'язок, що визначається формулами (1)—(3), легко узагальнюється на випадок, коли серединна поверхня електроду являє собою поверхню обертання деякої кусочно-гладкої лінії. Не зупиняючись на цьому детально, припустимо, що серединна поверхня є поверхнею обертання деякої гладкої кривої, заданої рівнянням $R=R(\xi)(z_1 \leqslant \leqslant \xi \leqslant z_2)$. В цьому випадку розв'язок задачі виражається також формулами (1)—(3), якщо вважати, що $R=R(\xi)$.

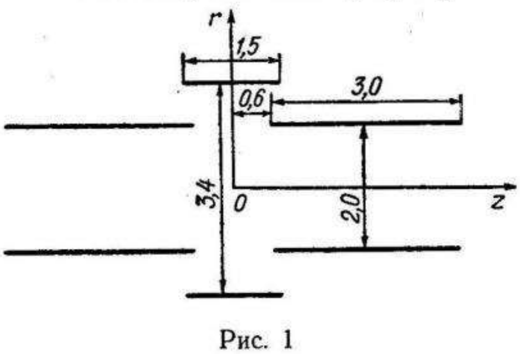

Рис. 1

2. Потенціал плоскої системи електродів. На відміну від пункту 1, покладемо, що поверхня електроду малої товщини $2h$ є циліндричною поверхнею з твірною $2a$. Площину симетрії електроду приймемо за координатну площину XOZ. Лінію перетину серединної поверхні з площиною XOZ позначимо через L.

Якщо твірна достатньо довга, то густину на ній, без особливої похибки на потенціал, в деякому околі L площини XOZ можна вважати незалежною від координати y. Переріз електроду площиною XOZ приймемо за плоский електрод малої товщини $2h$ з серединною лінією L.

Нехай густина плоского електроду розподілена на лінії L. Легко показати, що потенціал в точці $M(x, z)$ поза електродом виражається формулою

$$U(x, z)=\int_L q(s) \ln \frac{R+a}{R-a} ds, \tag{6}$$

де $R=\sqrt{\alpha^2+\lambda^2+a^2}$; $\alpha=\zeta-z$; $\lambda=\xi-x$; $q(s)$ — густина на L в точці $M'(\zeta, \xi)$. Вважаючи, що L — відрізок прямої, паралельної осі oz з кінцями в точках (ξ, z_1) і (ξ, z_2), формулу (6) можна привести до більш вигідного для розрахунку вигляду

$$U(x, z)=q(\zeta) F(\alpha)\Big|_{\zeta=z_1}^{z_2}-\int_{\zeta=z_1}^{z_2} q'(\zeta) F(\alpha) d\zeta, \tag{7}$$

де

$$F(\alpha)=\alpha \ln \frac{R+a}{R-a}+a \ln \frac{R+\alpha}{R-\alpha}-2\lambda \operatorname{arc\,tg} \frac{a\alpha}{\lambda R};$$

$q(\zeta)$ — виражається формулою (2).

Система рівнянь для знаходження невідомих a_k набирає вигляду

$$\left[\left(q(\zeta) F(\alpha)\Big|_{z_1}^{z_2}-\int_{z_1}^{z_2} F(\alpha) q'(\zeta) d\zeta\right)\right]_{\substack{x=\xi-h_j \\ z=\zeta_j'}}=u_j \qquad (j=0, 1, \ldots n). \tag{8}$$

Для прикладу розглядались три циліндри (рис. 1) з подвійною симетрією, найменшим радіусом $R=1$ і товщиною $2h=0{,}04$. П'ять рівнянь системи (3) дають розв'язок, який задовольняє граничні умови в проміжних точках з похибками в [2—4] знаках.

Цей розв'язок виявився більш точним, ніж розв'язок за допомогою 42 рівнянь методом неапроксимованих густин. На закінчення слід відзначити, що вказане зображення густини функціями з нелінійними параметрами не є єдиним. Тепер досліджується ефективність зображення густини функціями вигляду

$$q_k(\zeta) = \frac{a_k}{\sqrt{\sigma_k}} e^{-\frac{(\zeta-\zeta_k)^2}{\sigma_k}}, \tag{9}$$

де σ_k — параметри, які підбираються аналогічно.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. IV, 1958.

Б. В. ВАЛЬКО, И. В. ЛЮДКЕВИЧ, И. А. ПРУСОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОДОВ МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ МЕТОДОМ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРОВ

(резюме)

В работе решается одна задача электронной оптики. Приводится расчетная формула и дается алгоритм для машинного подсчета потенциала электронной линзы, состоящей из электродов малой толщины в осесимметричном пространственном и плоском случаях.