

В. О. ЛІХАЧОВ

### СКРУТ ЦИЛІНДРА, ЯКИЙ СПАЯНИЙ З ЖОРСТКИМ ВАЛОМ

Розглянемо коловий порожнистий циліндр скінченної довжини. Нехай до зовнішньої поверхні циліндра по деякому поясу прикладені дотичні зусилля  $\tau_{r\theta}(x, \zeta)$ , які не залежать від кута  $\theta$ , а по всій внутрішній поверхні циліндр спаяний з жорстким валом.

Систему координат вибираємо таким чином, щоб вісь циліндра належала осі  $oz$  і початок координат перебував в точці перетину осі  $oz$  з нижньою основою циліндра, яка розміщена в площині  $z=0$ .

Надалі будемо користуватися позначеннями:  $r_e, r_i$  — відповідно зовнішній та внутрішній радіуси циліндра;  $x = \frac{r}{r_e}, \zeta = \frac{z}{r_e}$  — безрозмірні циліндричні координати;  $b$  — висота пояса навантаження бічної поверхні циліндра;  $\rho = \frac{r_i}{r_e}$ .

В прийнятих позначеннях запишемо граничні умови та розв'язки двох задач, які відрізняються лише умовами на торцях.

Задача перша:

$$u_r(x, \zeta)=0, u_\theta(x, \zeta)=0, u_z(x, \zeta)=0 \text{ при } x=\rho, 0 \leq \zeta \leq \pi;$$

$$\tau_{r\theta}(x, \zeta)=f(\zeta), \tau_{rz}(x, \zeta)=0, \sigma_r(x, \zeta)=0 \text{ при } x=1, 0 \leq \zeta < b;$$

$$\tau_{z\theta}(x, \zeta)=0, \tau_{rz}(x, \zeta)=0, \sigma_r(x, \zeta)=0 \text{ при } x=1, \pi \geq \zeta > b;$$

$$\tau_{z\theta}(x, \zeta)=0, \tau_{rz}(x, \zeta)=0, \sigma_z(x, \zeta)=0 \text{ при } \zeta=0, \zeta=\pi; \rho \leq x \leq 1;$$

$$\frac{1}{\mu} \tau_{r\theta}(x, \zeta) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{x} M_{11}(x, p, \rho) - \frac{p}{2} M_{01}(x, p, \rho)}{L_{11}(p, \rho) - \frac{p}{2} L_{01}(p, \rho)} \bar{f}_c(p) \cos p\zeta + \\ + \frac{1}{\pi} \bar{\tau}_{r\theta}^{(c)}(x, 0);$$

$$\frac{1}{\mu} \tau_{z\theta}(x, \zeta) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p M_{11}(x, p, \rho)}{2L_{11}(p, \rho) - pL_{01}(p, \rho)} \bar{f}_c(p) \sin p\zeta;$$

$$u_\theta(x, \zeta) = \frac{2r_e}{\pi\mu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{11}(x, p, \rho)}{pL_{01}(p, \rho) - 2L_{11}(p, \rho)} \bar{f}_c(p) \cos p\zeta + \frac{r_e}{\pi\mu} \bar{u}_\theta^{(c)}(x, 0).$$

Задача друга:

$$\begin{aligned} u_\theta(x, \zeta) &= 0, \quad u_r(x, \zeta) = 0, \quad u_z(x, \zeta) = 0 \quad \text{при } x = \rho, \quad 0 \leq \zeta \leq \pi; \\ \tau_{r\theta}(x, \zeta) &= \varphi(\zeta), \quad \tau_{rz}(x, \zeta) = 0, \quad \sigma_r(x, \zeta) = 0 \quad \text{при } x = 1, \quad 0 \leq \zeta < b; \\ \tau_{r\theta}(x, \zeta) &= 0, \quad \tau_{rz}(x, \zeta) = 0, \quad \sigma_r(x, \zeta) = 0 \quad \text{при } x = 1, \quad b < \zeta \leq \pi; \\ u_\theta(x, \zeta) &= 0, \quad u_z(x, \zeta) = 0, \quad u_r(x, \zeta) = 0 \quad \text{при } \zeta = 0, \quad \zeta = \pi, \quad \rho \leq x \leq 1; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\mu} \tau_{r\theta}(x, \zeta) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{x} M_{11}(x, p, \rho) - \frac{p}{2} M_{01}(x, p, \rho)}{L_{11}(p, \rho) - \frac{p}{2} L_{01}(p, \rho)} \overline{\varphi_s(p)} \sin p\zeta;$$

$$\frac{1}{\mu} \tau_{z\theta}(x, \zeta) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p M_{11}(x, p, \rho)}{p L_{01}(p, \rho) - 2 L_{11}(p, \rho)} \overline{\varphi_s(p)} \cos p\zeta + \frac{1}{\pi} \overline{\tau_{z\theta}^{(c)}}(x, 0);$$

$$u_\theta(x, \zeta) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{11}(x, p, \rho)}{p L_{01}(p, \rho) - 2 L_{11}(p, \rho)} \overline{\varphi_s(p)} \sin p\zeta,$$

де

$$\begin{aligned} M_{11}(x, p, \rho) &= I_1(px) K_1(p\rho) - K_1(px) I_1(p\rho); \\ M_{01}(x, p, \rho) &= I_0(px) K_1(p\rho) + K_0(px) I_1(p\rho); \\ M_{11}(1, p, \rho) &= L_{11}(p\rho), \quad M_{01}(1, p, \rho) = L_{01}(p\rho); \end{aligned}$$

$\overline{f_c(x, p)}$ ,  $\overline{\varphi_s(x, p)}$ ,  $\overline{\tau_{r\theta}^{(c)}}(x, p)$ ,  $\overline{\tau_{z\theta}^{(s)}}(x, p)$ ,  $\overline{u_\theta^{(c)}}(x, p)$  — синус і косинус трансформанти Фур'є по змінній  $\zeta$  від відповідних функцій;  $I_0(p)$ ,  $I_1(p)$ ,  $K_0(p)$ ,  $K_1(p)$  — функції Бесселя від уявного аргумента.

Розглянемо деякі приклади.

1.  $f(\zeta) = q_0 = \text{const}$ ;

$$\frac{1}{\mu} \tau_{r\theta}(\rho, \zeta) = \frac{2q_0}{\pi\rho} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p L_{01}(p\rho) - 2 L_{11}(p\rho)} \frac{\sin pb}{p} \cos p\zeta + \frac{bq_0}{\pi\rho^2};$$

$$\frac{1}{\mu} \tau_{z\theta}(1, \zeta) = \frac{2q_0}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{L_{11}(p\rho)}{2 L_{11}(p\rho) - p L_{01}(p\rho)} \sin pb \sin p\zeta.$$

2.  $\varphi(\zeta) = q_1 \zeta$ ;

$$\frac{1}{\mu} \tau_{r\theta}(\rho, \zeta) = \frac{2q_1}{\pi\rho} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \frac{1}{p L_{01}(p\rho) - 2 L_{11}(p\rho)} \left[ \frac{\sin pb}{p} - b \cos pb \right] \sin p\zeta;$$

$$\frac{1}{\mu} \tau_{z\theta}(1, \zeta) = \frac{2q_1}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{L_{11}(p\rho)}{p L_{01}(p\rho) - 2 L_{11}(p\rho)} \left[ \frac{\sin pb}{p} - b \cos pb \right] \cos p\zeta.$$

3.  $\varphi(\zeta) = q_2 \zeta^2$ ;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \tau_{r\theta}(\rho, \zeta) &= \frac{2q_2}{\pi\rho} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin p\zeta}{p L_{01}(p\rho) - 2 L_{11}(p\rho)} \times \\ &\times \left[ \frac{2b}{p^2} \sin pb - \frac{b^2}{p} \cos pb + \frac{2}{p^3} (\cos pb - 1) \right]; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\mu} \tau_{z\theta}(\rho, \zeta) = \frac{2q_2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{L_{11}(p\rho) \cos p\zeta}{2L_{11}(p\rho) - pL_{01}(p\rho)} \times \\ \times \left[ \frac{2b}{p} \sin pb - b^2 \cos pb + \frac{2}{p^2} (\cos pb - 1) \right].$$

Таблиця 1

Числові значення  $\frac{\tau_{r\theta}(x, \zeta)}{\mu}$  для  $x = \rho = 0,50; 0,75$  в перетинах  
циліндра  $\zeta = 0; \frac{\pi}{2}; \pi$  при  $f(\zeta) = 1$

| $\rho$ | $\zeta$         | $b = \frac{\pi}{10}$ | $b = \frac{\pi}{5}$ | $b = 1$ | $b = \frac{\pi}{2}$ | $b = \frac{2\pi}{3}$ | $b = \pi$ |
|--------|-----------------|----------------------|---------------------|---------|---------------------|----------------------|-----------|
| 0,50   | 0               | 1,66                 | 2,72                | 3,39    | 3,80                | 3,93                 | 4,0       |
|        | $\frac{\pi}{2}$ | 0,13                 | 0,32                | 0,70    | 2,00                | 3,23                 | 4,0       |
|        | $\pi$           | 0,01                 | 0,03                | 0,06    | 0,20                | 0,54                 | 4,0       |
| 0,75   | 0               | 1,37                 | 1,70                | 1,78    | 1,78                | 1,78                 | 1,78      |
|        | $\frac{\pi}{2}$ |                      | 0,01                | 0,05    | 0,89                | 1,71                 | 1,78      |
|        | $\pi$           |                      |                     |         | 0,04                | 0,10                 | 1,78      |

Таблиця 2

Числові значення  $\frac{\tau_{r\theta}(x, \zeta)}{\mu}$  для  $x = \rho = 0,50; 0,75; 0,9$   
в перетинах циліндра  $\zeta = \frac{\pi}{2}$  при  $f(\zeta) = \zeta^2$

| $\rho$ | $b = \frac{\pi}{10}$ | $b = \frac{\pi}{5}$ | $b = 1$ | $b = \frac{\pi}{2}$ | $b = \frac{2\pi}{3}$ | $b = \pi$ |
|--------|----------------------|---------------------|---------|---------------------|----------------------|-----------|
| 0,50   | 0,11                 | 0,53                | 1,21    | 6,50                | 10,5                 | 13,8      |
| 0,75   | 0,05                 | 0,28                | 0,50    | 3,84                | 6,36                 | 6,62      |
| 0,90   | 0,03                 | 0,21                | 0,32    | 2,94                | 4,61                 | 4,88      |

Таблиця 3

Числові значення  $\frac{\tau_{z\theta}(x, \zeta)}{\mu}$  для  $x = 1$  в перетині  $\zeta = 0$   
при  $\varphi(\zeta) = \zeta, \rho = 0,50; 0,75; 0,90$

| $\rho$ | $b = \frac{\pi}{10}$ | $b = \frac{\pi}{5}$ | $b = 1$ | $b = \frac{\pi}{2}$ | $b = \frac{2\pi}{3}$ | $b = \pi$ |
|--------|----------------------|---------------------|---------|---------------------|----------------------|-----------|
| 0,50   | 0,25                 | 0,58                | 0,94    | 1,22                | 1,35                 | 1,42      |
| 0,75   | 0,21                 | 0,33                | 0,36    | 0,37                | 0,38                 | 0,39      |
| 0,90   | 0,10                 | 0,11                | 0,12    | 0,12                | 0,13                 | 0,13      |

**В. А. ЛИХАЧЕВ**

## **КРУЧЕНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА, СПАЯННОГО С ЖЕСТКИМ ВАЛОМ**

(резюме)

Решается смешанная задача о кручении кругового цилиндра конечной длины, спаянного по внутренней поверхности с жестким валом под действием касательных усилий, приложенных к внешней поверхности цилиндра и при однородных условиях для компонентов смещений и напряжений на его внутренней поверхности.

Полученные формулы легко поддаются численному счету.

Приводятся некоторые численные примеры для различной толщины стенок цилиндра.

---