ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
Серія механіко-математична

Т. Л. МАРТИНОВИЧ

ПРУЖНА РІВНОВАГА ПЛАСТИНКИ З КРИВОЛІНІЙНИМ КОНТУРОМ, ПІДКРІПЛЕНИМ ПРУЖНИМ КІЛЬЦЕМ

Загальна постановка задачі про пружну рівновагу пластинки, край якої підкріплений тонким пружним кільцем, і виведення крайових умов з застосуванням їх до простіших задач, належить М. П. Шереметьєву [1].

При цьому підкріплювальне кільце розглядалося досить вузьким, і при аналітичному записі умов сумісної роботи пластинки і кільця припускалося, що дотик пластинки з кільцем відбувається вздовж осі кільця, тобто підкріплюване кільце вважалося за пружну лінію, наділену жорсткістю на згин і розтяг.

Для уточнення постановки задачі будемо вважати, що пластинка дотикається кільця вздовж крайніх волокон, еквідистатних осі кільця. Підкріплювальне кільце може бути такої ширини, щоб до нього ще була застосована гіпотеза нормального плоского перерізу. При складанні рівнянь рівноваги елемента кільця враховуються його розміри.

1. Позначимо вектор внутрішнього (усередненого по висоті) напруження, що передається на кільце з боку пластинки, через $\vec{F}^{(i)}$, а його компоненти по осях натуральної системи $n\tau$ через $N^{(i)}$ і $T^{(i)}$. Тоді, очевидно, вектор напруження $\vec{F}_1^{(i)}$, що передається з боку кільця на пластинку, буде рівний $\vec{F}_1^{(i)} = -\vec{F}^{(i)}$.

На контурі спаю пластинки з кільцем L повинні, очевидно, справджуватися такі умови, подані в комплексній формі:

$$u_1 - iv_1 = u - iv;$$
$$N_1^{(i)} - iT_1^{(i)} = N^{(i)} - iT^{(i)}, \tag{1}$$

де через u_1 і v_1 позначені компоненти вектора зміщення точок контура L в декартових координатах xy, які відносяться до пластинки, а через u і v — ті самі величини для кільця.

Контурні рівності (1) можна виразити через дві аналітичні функції $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$ комплексного змінного $z = x + iy$; в результаті одержимо

$$\begin{aligned} &\varkappa\overline{\Phi_1(t)} - \Phi_1(t) + e^{2i\alpha}\{\bar{t}\Phi_1'(t) + \Psi_1(t)\} = 2\mu i e^{i\alpha}\frac{d}{ds}(u - iv);\\ &\overline{\Phi_1(t)} + \Phi_1(t) - e^{2i\alpha}\{t\bar{\Phi}_1'(t) + \Psi_1(t)\} = N^{(i)} - iT^{(i)}, \text{ на } L. \end{aligned} \tag{2}$$

Тут α — кут, утворений зовнішньою нормаллю n з додатним напрямом осі x; $\varkappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ — для плоского напруженого стану; ν — коефіцієнт Пуассона; μ — модуль зсуву.

2. Розглянемо деформацію довільного волокна кільця, еквідистатного його осі. В нашому випадку вісь кільця буде плоска крива, розміщена в площині пластинки xy як до, так і після деформації.

Позначимо вектор переміщення довільної точки цього волокна через $\vec{\delta}$, його проекції на осі нерухомої системи координат xy через u, v, а на осі натуральної (рухомої) системи $n\tau$ — через u_n і u_τ, Осі $n\tau$ орієнтовані так само, як і осі xy.

Вектор

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\delta}}{ds} \tag{3}$$

можна розглядати як вектор відносної деформації волокна. При малих деформаціях проекція цього вектора на напрям дотичної до волокна дає, очевидно, відносне подовження волокна, а проекція його на напрям нормалі — кут повороту дотичної до волокна внаслідок його деформації, тобто

$$\varepsilon_\tau = e, \quad \varepsilon_n = -\theta. \tag{4}$$

Додатним напрямом кута повороту θ вважається той, що відповідає додатному поворотові дотичної.

Векторна рівність (3) в системі координат $n\tau$ набуде вигляду

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\tilde{d}\vec{\delta}}{ds} + \left[\frac{d\vec{\alpha}}{ds} \times \vec{\delta}\right], \tag{5}$$

де $\vec{\alpha} = \alpha\vec{z}^0$ — елементарний вектор повороту рухомої системи $n\tau$ при зміні дуги s; $\vec{z}^0$ — орт осі z; $\frac{\tilde{d}}{ds}$ — знак локальної похідної.

Враховуючи, що

$$\frac{d\vec{\alpha}}{ds} = \frac{d\alpha}{ds}\vec{z}^0 = \frac{1}{r}\vec{z}^0,$$

де r — радіус кривини недеформованого волокна кільця, з рівності (5) знаходимо

$$\begin{aligned} e &= \frac{du_\tau}{ds} + \frac{1}{r}u_n; \\ -\theta &= \frac{du_n}{ds} - \frac{1}{r}u_\tau. \end{aligned} \tag{6}$$

Співвідношення (6) в комплексній формі можемо подати так:

$$-(\theta + ie) = \frac{d}{ds}(u_n - iu_\tau) - \frac{i}{r}(u_n - iu_\tau), \tag{7}$$

або, враховуючи, що

$$e^{i\alpha}(u - iv) = u_n - iu_\tau,$$

а такому вигляді:

$$-(\theta+ie)=e^{i\alpha}\frac{d}{ds}(u-iv). \qquad (8)$$

У випадку скінченної деформації волокна, тобто деформації, сумірної з одиницею, відносне подовження волокна e і елементарний вектор повороту дотичної $\vec{\theta}$ визначаються за формулами:

$$e(2+e)=2\vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\delta}}{ds}+\left(\frac{d\vec{\delta}}{ds}\right)^2;$$

$$\vec{\theta}=\frac{1}{1+e}\left[\vec{\tau}\times\frac{d\vec{\delta}}{ds}\right].$$

3. В основу розрахунків кільця покладемо гіпотезу нормального жорсткого перерізу. Виходячи з цієї гіпотези, знайдемо залежність між переміщеннями точок довільного еквідистатного волокна і осі кільця, що лежать на спільній нормалі.

При малому куті повороту нормалі θ будемо мати

$$\vec{\delta}=\vec{\delta}_0+y\theta\vec{\tau}, \qquad (9)$$

де $\vec{\delta}_0$ — вектор переміщення точок осі кільця, y — віддаль волокна кільця від осі в спільній площині. Для волокон, зміщених від осі кільця до центра кривини, y — від'ємне.

Підставляючи (9) в (3) і враховуючи залежність між диференціалами дуг волокон кільця при наявності гіпотези нормального перерізу, одержимо

$$\vec{\varepsilon}=\frac{r_0}{r}\vec{\varepsilon}_0+y\left(\frac{d\theta}{ds}\vec{\tau}-\frac{1}{r}\theta\vec{n}\right), \qquad (10)$$

де r_0 — радіус кривини недеформованої осі кільця.

$$\frac{ds_0}{ds}=\frac{r_0}{r}, \quad r=r_0+y,$$

З останнього векторного співвідношення знаходимо

$$e=\frac{r_0}{r}e_0+y\frac{d\theta}{ds}. \qquad (11)$$

Кут повороту дотичної θ один і той самий для всіх волокон, що також випливає з формул (10).

На підставі формули (11) співвідношення (8) набуде остаточно такого вигляду:

$$e^{i\alpha}\frac{d}{ds}(u-iv)=-\left[\theta+i\left(\frac{r_0}{r}e_0+y\frac{d\theta}{ds}\right)\right]. \qquad (12)$$

4. Тепер розглянемо рівняння рівноваги елемента кільця. В проекціях на осі натуральної системи координат $n\tau$ при нашому виборі їх

орієнтації ці рівняння, як неважко переконатися, можна подати в такому вигляді:

$$\frac{1}{2h}\left(\frac{dV_n}{ds_1}-\frac{1}{r_1}V_\tau\right)+N^{(i)}=\frac{h^*}{h}\frac{r_2}{r_1}N;$$
$$\frac{1}{2h}\left(\frac{dV_\tau}{ds_1}+\frac{1}{r_1}V_n\right)+T^{(i)}=\frac{h^*}{h}\frac{r_2}{r_1}T; \qquad (13)$$
$$\frac{dM}{ds_1}-\frac{r_0}{r_1}V_n-2h\varepsilon_1T^{(i)}=2h^*\varepsilon_2\frac{r_2}{r_1}T,$$

де V_n і V_τ — компоненти головного вектора внутрішніх зусиль, що діють в довільному перерізі кільця, а N і T — компоненти вектора зовнішнього (усередненого по висоті) напруження, прикладеного до кільця, по осях натуральної системи $n\tau$; M — момент внутрішніх зусиль в довільному перерізі кільця; r_1, r_2 — радіуси кривини крайніх волокон кільця, причому під r_1 ми будемо завжди розуміти радіус кривини того крайнього волокна, вздовж якого пластинка дотикається кільця; елемент дуги цього волокна ми позначили через ds_1; ε_1 і ε_2 — віддалі крайніх волокон від осі кільця в площині їх кривини; $2h$ — висота пластинки; $2h^*$ — висота того краю кільця, що не контактує з пластинкою.

З системи (13) знаходимо

$$N^{(i)}-iT^{(i)}=-\frac{1}{2h}\left[\frac{d}{ds_1}(V_n-iV_\tau)-\frac{i}{r_1}(V_n-iV_\tau)\right]+\frac{h^*}{h}\frac{r_2}{r_1}(N-iT); \qquad (14)$$

$$V_n=\frac{dM}{ds_1}+\varepsilon_1\frac{dV_\tau}{ds_1}-2h^*b\frac{r_2}{r_1}T, \qquad (15)$$

де $b=\varepsilon_1+\varepsilon_2$ — ширина кільця в площині його осі.

5. При малих деформаціях, приймаючи гіпотезу нормального перерізу і припущення про те, що волокна кільця не тиснуть одне на одне, закон Гука для криволінійного кільця (стержня) зводиться до співвідношень [2]:

$$e_0=\frac{V_\tau}{g_1}+\frac{M}{r_0g_1}; \qquad (16)$$
$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{r_0}{r}\left[\frac{M}{g_2}+\frac{M}{r_0^2g_1}+\frac{V_\tau}{r_0g_1}\right],$$

де $g_1=E^*F$ — жорсткість кільця на розтяг; $g_2=E^*I'$ — жорсткість кільця на згин: F — площа нормального перерізу кільця; E^* — модуль Юнга для кільця.

$$I'=\int\limits_F\frac{r_0}{r_0+y}y^2dF.$$

Для прямокутного перерізу кільця величини I' можна подати рядом [2]:

$$I'=\frac{h^*b^3}{6}\left(1+\frac{3b^2}{20r_0^2}+\frac{3b^4}{112\,r_0^4}+\dots\right).$$

На підставі підрахунків можна переконатися, що вже при $r_0=4b$ з точністю до 1% величину I' можна замінити моментом інерції перерізу кільця. Тому при $r_0 \geqslant 4b$ величину I' в наших формулах замінимо на I_z:

$$I' \approx I_z = \frac{h^* b^3}{6} = \frac{b^2}{12} F\cdot$$

Останнє припущення приводить до такої залежності між жорсткостями кільця:

$$g_1 = \frac{12}{b^2} g_2, \quad r_0 \geqslant 4b.$$

Нормальні напруження в перерізі кільця визначаються за формулою

$$\sigma = E^* \cdot e = E^* \frac{r_0}{r} e_0 + E^* y \frac{d\theta}{ds},$$

яка, на підставі (16), зведеться до такої:

$$\sigma = \frac{V_\tau}{F} + \frac{M}{r_0 F} + \frac{M y}{I'} \frac{r_0}{r_0 + y}. \tag{17}$$

На основі співвідношень (12), (14), (16), одержаних в результаті розгляду деформованого стану кільця, крайові умови (2) набудуть вигляду

$$\varkappa \overline{\Phi_1(t)} - \Phi_1(t) + e^{2i\alpha}\{\bar{t}\Phi_1'(t) + \Psi_1(t)\} = 2\mu \left\{\left(\frac{V_\tau}{g_1} - i\int_0^{s_1} \frac{V_\tau}{r_1 g_1} ds_1\right) + \right.$$

$$\left. + \left(M G_1 - i\int_0^{s_1} M G_2 ds_1\right) - i\theta_0\right\}, \tag{18}$$

$$\overline{\Phi_1(t)} + \Phi_1(t) - e^{2i\alpha}\{\bar{t}\Phi_1'(t) + \Psi_1(t)\} = -\frac{1}{2h}\left[\frac{d}{ds_1}(V_n - iV_\tau) - \frac{i}{r_1}(V_n - iV_\tau)\right] +$$

$$+ \frac{h^*}{h}\frac{r_2}{r_1}(N - iT), \tag{19}$$

де

$$V_n = \frac{dM}{ds_1} + \varepsilon_1 \frac{dV_\tau}{ds_1} - 2h^* b \frac{r_2}{r_1} T;$$

$$G_1 = \frac{1}{r_0 g_1} - \varepsilon_1 \frac{r_0}{r_1 g_2}; \quad G_2 = \frac{1}{r_1 r_0 g_1} + \frac{r_0}{r_1 g_2};$$

θ_0 — значення кута повороту дотичної при $s = 0$.

В тому випадку, коли радіус кривини волокна, вздовж якого пластинка спаяна з кільцем, більший від радіуса кривини осі кільця, тобто $r_1 > r_0$, у виразах (19) потрібно ε_1 і b замінити на $-\varepsilon_1$ і $-b$.

Одержані контурні умови (18) будуть вихідними при розв'язуванні задач про пружну рівновагу пластинки, край якої підкріплений кільцем. Поперечний переріз кільця може бути довільної форми, але симетричний відносно площини кривини осі, тобто площини пластинки.

6. Для прикладу розглянемо нескінченну ізотропну пластинку з круговим отвором радіуса r_1, край якого підкріплений пружним кільцем сталого перерізу ширини b.

Для простоти обчислень будемо вважати, що кільце вільне від дії зовнішніх зусиль, і напруження на нескінченності обмежені:

$$X_x^\infty = p, \quad Y_y^\infty = q, \quad X_y^\infty = 0.$$

Покладемо $z = \omega(\zeta) = r_1 \zeta$, тоді $t = r_1 \sigma$, $\sigma = e^{i\vartheta}$, де ϑ — кут, утворений радіусом r з полярною віссю площини ζ; крайові умови (18) в цьому випадку зведуться до таких:

$$\varkappa \overline{\Phi(\sigma)} - \Phi(\sigma) + \sigma^2 \left\{ \frac{1}{\sigma} \Phi'(\sigma) + \Psi(\sigma) \right\} = 2\mu \left\{ \left(\frac{V_\tau}{g_1} - \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{V_\tau}{g_1} \frac{d\sigma}{\sigma} \right) + \right.$$

$$\left. + \left(MG_1 - \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} MG_2 r_1 \frac{d\sigma}{\sigma} \right) - i\theta_0 \right\};$$

$$\overline{\Phi(\sigma)} + \Phi(\sigma) - \sigma^2 \left\{ \frac{1}{\sigma} \Phi'(\sigma) + \Psi(\sigma) \right\} = \tag{20}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2hr_1^2} \left(\frac{d^2 M}{d\sigma^2} - \varepsilon_1 \frac{d^2 V_\tau}{d\sigma^2} \right) - \frac{1}{2hr_1} \left(\sigma \frac{dV_\tau}{d\sigma} - V_\tau \right) \text{ на } \gamma.$$

Тут

$$\Phi_1[\omega(\zeta)] = \Phi(\zeta), \quad \Psi_1[\omega(\zeta)] = \Psi(\zeta).$$

Функції $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ будуть голоморфні в області пластинки, включаючи і нескінченно віддалену точку, тому їх можна подати у формі ряду

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^{-n}, \quad \Psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^{-n}, \tag{21}$$

причому $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, що є наслідком голоморфності функцій $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$.

Коефіцієнти A_0 і B_0 характеризують напружений стан пластинки на нескінченності і відповідно дорівнюють

$$A_0 = \frac{p+q}{4}, \quad B_0 = -\frac{p-q}{2}. \tag{22}$$

Функції внутрішніх зусиль в перерізі кільця V_τ і M подано в формі комплексних рядів Фур'є:

$$V_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha}_n \sigma^{-n};$$

$$M = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\beta}_n \sigma^{-n}. \tag{23}$$

Підставляючи (21) і (23) в крайові умови (20) і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях σ, приходимо до таких систем алгебраїчних рівнянь:

$$\varkappa \overline{A}_0 - A_0 + B_2 = 2\mu \left(\frac{1}{g_1} \alpha_0 + G_1 \beta_0 \right) - \frac{2\mu}{g_1} C_1 - 2\mu r_1 G_2 \cdot C_2 - 2\mu i \theta_0;$$

$$
\begin{gathered}
\bar{A}_0+A_0-B_2=\frac{\alpha_0}{2hr_1}, \quad \frac{\alpha_0}{g_1}+r_1G_2\beta_0=0; \\
\varkappa\bar{A}_1+B_1=2\mu\beta_1(G_1-r_1G_2); \\
\varkappa\bar{A}_2+B_0=2\mu\left[\frac{\alpha_2}{2g_1}+\beta_2\left(G_1-\frac{r_1G_2}{2}\right)\right]; \\
A_2-B_0=\frac{1}{2h}\left[\frac{2\beta_2}{r_1^2}-\frac{1}{r_1}\left(\frac{2\varepsilon_1}{r_1}+1\right)\alpha_2\right];
\end{gathered} \tag{24}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\varkappa\bar{A}_n&=2\mu\left[\frac{\alpha_n}{g_1}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\beta_n\left(G_1-\frac{r_1G_2}{n}\right)\right] \\
\bar{A}_n&=\frac{1}{2h}\left[\frac{n(n-1)}{r_1^2}\beta_n-\frac{n-1}{r_1}\left(\frac{\varepsilon_1}{r_1}n+1\right)\alpha_n\right]
\end{aligned}\right\} n=3,\ 4,\ 5\ldots;
$$

$$
\left.\begin{aligned}
-(1+n)A_n+B_{n+2}&=2\mu\left[\frac{\bar{\alpha}_n}{g_1}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\bar{\beta}_n\left(G_1+\frac{r_1G_2}{n}\right)\right] \\
(1+n)A_n-B_{n+2}&=\frac{1}{2h}\left[\frac{n(n+1)}{r_1^2}\bar{\beta}_n+\frac{n+1}{r_1}\left(1-\frac{\varepsilon_1}{r_1}n\right)\bar{\alpha}_n\right]
\end{aligned}\right\} n=1,\ 2\ldots
$$

Тут C_1 і C_2 — стала інтегрування:

$$
C_1=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n-\bar{\alpha}_n}{n}, \quad C_2=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n-\bar{\beta}_n}{n}.
$$

З систем (24) знаходимо

$$
\begin{gathered}
\alpha_0=\frac{2h(1+\varkappa)g_1G_2r_1}{g_1G_2-4h\mu(G_1-r_1G_2)}\cdot A_0; \\
\beta_0=-\frac{2h(1+\varkappa)}{g_1G_2-4h\mu(G_1-r_1G_2)}\cdot A_0; \\
\alpha_2=-\frac{2h(1+\varkappa)r_1^2g_1(N-6)}{Q(N-6)-3P(L+2\varkappa)}\cdot B_0; \\
\beta_2=\frac{6h(1+\varkappa)r_1^2P}{Q(N-6)-3P(L+2\varkappa)}\cdot B_0; \\
A_2=\frac{R(N-6)-3P(L-2)}{Q(N-6)-3P(L+2\varkappa)}\cdot B_0; \\
B_2=\frac{(1-\varkappa)g_1G_2-8h\mu(G_1-r_1G_2)}{g_1G_2-4h\mu(G_1-r_1G_2)}\cdot A_0; \\
B_4=\frac{3(N-6)(S+2r_1g_1)-9P(L+2\varkappa)}{Q(N-6)-3P(L+2\varkappa)}B_0.
\end{gathered} \tag{25}
$$

Тут

$$
\begin{aligned}
N&=-2hr_1^2\mu(2G_1+r_1G_2); \\
L&=-2hr_1^2\mu(2G_1-r_1G_2); \\
P&=-2hr_1^2\mu-g_1(r_1-2\varepsilon_1); \\
Q&=-2hr_1^2\mu-g_1\varkappa(r_1+2\varepsilon_1); \\
R&=-2hr_1^2\mu+g_1(r_1+2\varepsilon_1); \\
S&=-2hr_1^2\mu+g_1\varkappa(r_1-2\varepsilon_1).
\end{aligned} \tag{26}
$$

Решта коефіцієнтів дорівнюють нулеві. Сталі C_1, C_2 і θ_0 перетворюються в нуль внаслідок того, що всі коефіцієнти шуканих функцій є величини дійсні. При $\varepsilon_1=0$ коефіцієнти (25) збігаються з відповідними коефіцієнтами, наведеними в [1].

Для підкріплювального кільця прямокутного перерізу коефіцієнти (25) виразимо в безрозмірних величинах δ і γ, поклавши

$$\delta=\frac{b}{r_1};\quad \gamma=\frac{h}{h^*};\quad I'\approx I_z=\frac{h^*b^3}{6};\quad \varepsilon_1=\frac{b}{2};$$

$$g_1=2h^*bE^*;\quad g_2=E^*\frac{h^*b^3}{6}.$$

Одержимо

$$\alpha_0=\frac{2hb(1+\varkappa)[\delta^2+3(2-\delta)^2]E^*}{E^*[\delta^3+3\delta(2-\delta)^2]+3\gamma\mu(2-\delta)^3}\cdot A_0;$$

$$\beta_0=-\frac{1}{2}\frac{2hb^2(1+\varkappa)\delta(2-\delta)E^*}{E^*[\delta^3+3\delta(2-\delta)^2]+3\gamma\mu(2-\delta)^3}\cdot A_0;$$

$$B_2=\frac{(1-\varkappa)E^*[\delta^3+3\delta(2-\delta)^2]+6\gamma\mu(2-\delta)^3}{E^*[\delta^3+3\delta(2-\delta)^2]+3\gamma\mu(2-\delta)^3}\cdot A_0; \tag{27}$$

$$L=-\frac{2\mu\gamma[\delta^2-3(1-\delta)(2-\delta)^2]}{E^*\delta^3(2-\delta)};$$

$$N=-\frac{6\mu\gamma[\delta^2+(1+\delta)(2-\delta)^2]}{E^*\delta^3(2-\delta)};$$

$$P=-2h^*r_1^2[\gamma\mu+E^*\delta(1-\delta)]; \tag{28}$$

$$Q=-2h^*r_1^2[\gamma\mu+E^*\varkappa\delta(1+\delta)];$$

$$R=-2h^*r_1^2[\gamma\mu-E^*\delta(1+\delta)];$$

$$S=-2h^*r_1^2[\gamma\mu-E^*\varkappa\delta(1-\delta)];$$

$$r_1g_1=2h^*r_1^2E^*\delta.$$

Знаючи функції $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$, можемо визначити напруження, що виникають в пластинці, за формулами

$$\sigma_\vartheta=2A_0+\frac{r_1^2}{r^2}B_2+\left(\frac{r_1^4}{r^4}B_4+B_0\right)\cos 2\vartheta;$$

$$\sigma_r=2A_0-\frac{r_1^2}{r^2}B_2+\left(4\frac{r_1^2}{r^2}A_2-\frac{r_1^4}{r^4}B_4-B_0\right)\cos 2\vartheta;$$

$$\tau_{r\vartheta}=\left(B_0-\frac{r_1^4}{r^4}B_4+2\frac{r_1^2}{r^2}A_2\right)\sin 2\vartheta. \tag{29}$$

Нормальні напруження в перерізі кільця визначаються за формулою (17).

Для підкріплюваного кільця прямокутного перерізу формулу (17) в безрозмірних величинах можна подати так:

$$\sigma=\frac{V_\tau}{2h^*b}+\frac{\eta M}{2h^*b^2}; \tag{30}$$

де

$$\eta=\frac{8k(1-\delta)(\delta^2-3\delta+3)-3(2-\delta)^3}{k\delta(1-\delta)(2-\delta)};$$

$$k=\frac{r}{r_2},\quad \delta=\frac{b}{r_1};\quad \frac{r_1}{r}=\frac{1}{k(1-\delta)}.$$

Зусилля в перерізі кільця визначаються такими формулами:

$$
\begin{aligned}
&V_\tau = \alpha_0 + 2\alpha_2 \cos 2\vartheta;\\
&M = \beta_0 + 2\beta_2 \cos 2\vartheta;\\
&V_n = -\frac{4}{r_1}(\beta_2 - \varepsilon_1 \alpha_2) \sin 2\vartheta.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

В таблиці наведені результати обчислень σ_ϑ для мідної пластинки, підкріпленої стальним кільцем різної ширини, при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Пластинка розтягується в напряму осі x зусиллям P. Пружні сталі беруться такі, як і в працях [1] і [3]: $\mu = 4{,}42 \cdot 10^5$ *кг/см*^{2}, $\varkappa = 2{,}08$, $E^* = 2{,}1 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}, $\gamma = 1$, $\nu = 0{,}3$.

Для порівняння наводяться в таблиці також значення $\sigma_\vartheta = \sigma_{1\vartheta}$, одержані при $\varepsilon_1 = 0$, і значення $\sigma_\vartheta = \sigma_{2\vartheta}$, взяті з праці Г. М. Савина [3] для аналогічної задачі, в якій напружений стан в кільці визначається методом плоскої задачі. Напруження в таблиці дані в частинах від P.

Через σ_ϑ^* позначено напруження, яке відповідає тому випадкові, коли при складанні рівнянь рівноваги елемента кільця не враховувати його розмірів, тобто у виразі (15) для V_n покласти $\varepsilon_1 = 0$.

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$	$\delta = \frac{1}{4}$				$\delta = \frac{1}{16}$			
k	σ_ϑ	σ_ϑ^*	$\sigma_{1\vartheta}$	$\sigma_{2\vartheta}$	σ_ϑ	σ_ϑ^*	$\sigma_{1\vartheta}$	$\sigma_{2\vartheta}$
1,00	4,780	5,039	4,098	4,416	4,943	4,942	4,633	4,958
1,02	4,557	4,783	3,889	4,197	4,698	4,694	4,399	4,720
1,04	4,342	4,536	3,688	3,995	4,462	4,455	4,174	4,503
$1\frac{1}{15}$	4,069	4,221	3,433	3,751	$\frac{4{,}161}{2{,}353}$	$\frac{4{,}151}{2{,}354}$	$\frac{3{,}888}{2{,}402}$	$\frac{4{,}240}{2{,}349}$
1,20	2,883	2,858	2,324	2,843	1,910	1,911	1,942	1,908
$1\frac{1}{3}$	$\frac{1{,}935}{1{,}210}$	$\frac{1{,}767}{1{,}191}$	$\frac{1{,}437}{1{,}596}$	$\frac{2{,}256}{1{,}301}$	1,646	1,646	1,666	1,644
1,40	1,188	1,173	1,508	1,262				
1,60	1,141	1,132	1,332	1,182				

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$	$\delta = \frac{1}{51}$			
k	σ_ϑ	σ_ϑ^*	$\sigma_{1\vartheta}$	$\sigma_{2\vartheta}$
1,00	5,264	5,256	5,143	5,286
1,02	$\frac{5{,}014}{2{,}770}$	$\frac{5{,}007}{2{,}767}$	$\frac{4{,}898}{2{,}773}$	$\frac{5{,}044}{2{,}776}$
1,04	2,654	2,652	2,658	2,651
$1\frac{1}{15}$	2,516	2,514	2,519	2,513

В наведеній таблиці числа, написані у вигляді дробу, характеризують напруження σ_ϑ на контурі спаю кільця з пластинкою: чисельник характеризує напруження в кільці, а знаменник — напруження в пластинці.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Пластинки с подкрепленным краем. Изд. Львов. ун-та, 1960.
2. М. М. Филоненко-Бородич и др. Курс сопротивления материалов, т. I. М., 1955.
3. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. М., 1951.

Т. Л. МАРТЫНОВИЧ

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ КОНТУРОМ, ПОДКРЕПЛЕННЫМ УПРУГИМ КОЛЬЦОМ

(резюме)

В работе дается вывод граничных условий задачи об упругом равновесии изотропной пластинки, край которой подкреплен упругим стержнем (кольцом) постоянного сечения, с учетом контактных касательных напряжений от изгиба стержня.
В основу расчета стержня положена гипотеза нормального жесткого сечения.
Приводится числовой пример для бесконечной пластинки с круговым отверстием, подкрепленным тонким кольцом.

Стаття надійшла у видавництво в кінці 1962 р.