ВІСНИК ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ім. Ів. ФРАНКА
Серія механіко-математична

І. О. ПРУСОВ

НАПРУЖЕНИЙ СТАН В ПЛОЩИНІ З ЗАПРЕСОВАНОЮ ШАЙБОЮ З ЩІЛИНАМИ

Нехай в отвір, обмежений колом L радіуса R, недеформованої безмежної ізотропної площини вставляється рівномірно стиснута шайба з щілинами на дугах $L'_k=a_kb_k$ $(k=1, 2, \dots n)$ кола L, і на дугах $L''_k=b_ka_{k+1}$ склеюється з матеріалом площини. Потім знімаються сили, якими спочатку була деформована шайба.

Приймемо, що шайба в недеформованому стані має радіус $R'=R+\varepsilon$, а краї щілин при деформації не стикаються між собою.

Позначимо через $L'=L'_1+L'_2+\dots+L'_n$ і $L''=L''_1+L''_2+\dots+L''_n$ сукупність дуг L'_k і L''_k; S_1 і S_2 — зовнішність і внутрішність L, μ_j і $\varkappa_j$ — пружні сталі S_j. Треба визначити напружений стан в S_j, який залежить від посадки ε, а також розтягуючих зусиль на безмежності, навантаження на щілинах L'_k та зосереджених сил X_j+iY_j і моментів M_j, прикладених в точках z_j області S_j.

Без врахування посадки і зосереджених сил розв'язок аналогічної задачі різними методами наведений в роботах [2—5]. Наведений нижче розв'язок за методом аналогічний [4—5]. Деякі випадки урахування зосереджених сил розглянуті іншим методом в роботі [6].

Виберемо початок координат в центрі кола L та позначимо через $\Phi_j(z)$ і $\Psi_j(z)$ комплексні потенціали в S_j $(j=1, 2)$.

Йдучи слідом за М. І. Мусхелішвілі [1], введемо функції

$$\Omega_j(z)=-\bar{\Phi}_j\left(\frac{R^2}{z}\right)+\frac{R^2}{z}\bar{\Phi}'_j\left(\frac{R^2}{z}\right)+\frac{R^2}{z^2}\bar{\Psi}_j\left(\frac{R^2}{z}\right). \qquad (1)$$

Тоді напружено-деформований стан в S_j визначається за формулами

$$\sigma_r+\sigma_\theta=2\left[\Phi_j(z)+\overline{\Phi_j(z)}\right] \qquad (z=re^{i\theta}); \qquad (2)$$

$$\sigma_r+i\tau_{r\theta}=\Phi_j(z)-\frac{R^2}{r^2}\Omega_j\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)+\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\left[\overline{\Phi_j(z)}-\bar{z}\overline{\Phi'_j(z)}\right]; \qquad (3)$$

$$2\mu_j\left(\frac{\partial u}{\partial\theta}+i\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)=iz\left\{\varkappa_j\Phi_j(z)+\frac{R^2}{r^2}\Omega_j\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)-\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\left[\overline{\Phi_j(z)}-\bar{z}\overline{\Phi'_j(z)}\right]\right\}, \qquad (4)$$

а переміщення $u+iv$ і головний вектор $X+iY$ зусиль, які діють на дугу AB справа при переміщенні від A до B, за формулами

$$\mu_j(u+iv)=\varkappa_j\varphi_j(z)-\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)z\overline{\Phi_j(z)}+\omega_j\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)+C; \qquad (5)$$

$$X+iY=-i\left[\varphi_j(z)+\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)z\overline{\Phi_j(z)}-\omega_j\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)\right]_A^B, \qquad (6)$$

де

$$\omega_j(z)=\int\Omega_j(z)\,dz,\quad \varphi_j(z)=\int\Phi_j(z)\,dz.$$

При $|z|$ великих функція $\Phi_1(z)$ має вигляд

$$\Phi_1(z)=\Gamma-\frac{X_0+iY_0}{2\pi(1+\varkappa_1)}\quad\frac{1}{z}+0\left(\frac{1}{z^2}\right). \tag{7}$$

Функції $\Phi_j(z)$ і $\Omega_j(z)$ можна зобразити у вигляді

$$\Phi_j(z)=A_j(z)+\Phi_{0j}(z);\quad \Omega_j(z)=B_j(z)+\Omega_{0j}(z), \tag{8}$$

де

$$B_j(z)=-\frac{\varkappa_j p_j}{z-\alpha}+\frac{[\bar{p}_j(R^2-z_j\bar{z}_j)+iM_{0j}z_j]R^2}{\bar{z}_j^3(z-\alpha_j)^2}+k_j\left[\frac{\bar{\Gamma}'R^2}{z^2}+\frac{\varkappa_1(X_0+iY_0)}{2\pi z(1+\varkappa_1)}\right];$$

$$A_j(z)=-\frac{p_j}{z-z_j},\quad \alpha_j=\frac{R^2}{\bar{z}_j},\quad p_j=\frac{X_j+iY_j}{2\pi(1+\varkappa_j)},\quad k_j=\begin{cases}1 \text{ при } j=1,\\ 0 \text{ при } j=2;\end{cases}$$

$$\Gamma=\frac{1}{4}(N_1+N_2),\quad \Gamma'=\frac{1}{2}(N_2-N_1)e^{-2i\alpha},\quad M_{0j}=\frac{M_j}{2\pi};$$

N_1 і N_2 — головні напруження на нескінченності; α — кут, утворений віссю, що відповідає N_1, та віссю Ox; X_0+iY_0 — головний вектор всіх зовнішніх зусиль, прикладених на скінченних віддалях від початку координат; $\Phi_{0j}(z)$ і $\Omega_{0j}(z)$ — голоморфні функції в S_j.

Припустимо, що точка z_2 прикладення сили в S_2 не збігається з точкою $z=0$. Для того, щоб у точці $z=0$ напружено-деформований стан був обмеженим, функції $\Phi_2(z)$ і $\Omega_2(z)$ повинні задовольняти деякі умови.

Так, якщо в околі нуля і безмежності

$$\Phi_2(z)=A_0+A_1z+A_2z^2+\ldots\qquad (|z|<R);$$

$$\Omega_2(z)=B_0+\frac{B_1}{z}+\frac{B_2}{z^2}+\ldots\qquad (|z|>R),$$

то для обмеженості напружено-деформованого стану в точці $z=0$ необхідно й достатньо, щоб

$$A_0+\bar{B}_0=0,\ B_1=0. \tag{9}$$

З рівнянь (3) і (4) маємо на L

$$\begin{aligned}&\Phi_1^-(t)-\Omega_1^+(t)=(\sigma_r+i\tau_{r\theta})^-;\quad \varkappa_1\Phi_1^-(t)+\Omega_1^+(t)=2\mu_1g'(t)^-;\\ &\Phi_2^+(t)-\Omega_2^-(t)=(\sigma_r+i\tau_{r\theta})^+;\quad \varkappa_2\Phi_2^+(t)+\Omega_2^-(t)=2\mu_2g'(t)^+.\end{aligned} \tag{10}$$

Тут $g'(t)$ — похідна по t від переміщень $u+iv$.

Лінійна комбінація рівнянь (10) дає

$$[\Phi_2(t)-\Omega_1(t)]^++[\Phi_1(t)-\Omega_2(t)]^-=2p(t), \tag{11}$$

$$[\Phi_2(t)+\Omega_1(t)]^+-[\Phi_1(t)+\Omega_2(t)]^-=2q(t); \tag{12}$$

$$[r_0\varkappa_2\Phi_2(t)-\Omega_1(t)]^+-[\varkappa_1\Phi_1(t)-r_0\Omega_2(t)]^-=2\mu_1g_1'(t); \tag{13}$$

$$[r_0\varkappa_2\Phi_2(t)+\Omega_1(t)]^++[\varkappa_1\Phi_1(t)+r_0\Omega_2(t)]^-=2\mu_1g_2'(t), \tag{14}$$

де

$$2p(t)=(\sigma_r+i\tau_{r\theta})^++(\sigma_r+i\tau_{r\theta})^-;\quad 2q(t)=(\sigma_r+i\tau_{r\theta})^+-(\sigma_r+i\tau_{r\theta})^-;$$

$$g_k'(t)=g_k'(t)^++(-1)^kg_k'(t)^-;\quad g_1'(t)=-\varepsilon R^{-1}\text{ на } L'',\quad r_0=\frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Далі покладемо, що

$$\Phi_2(z)+\Omega_1(z)=F(z)\,(S_2);\quad r_0\varkappa_2\Phi_2(z)-\Omega_1(z)=Q(z)-\varepsilon_0\,(S_2);$$
$$\Phi_1(z)+\Omega_2(z)=F(z)\,(S_1);\quad \varkappa_1\Phi_1(z)-r_0\Omega_2(z)=Q(z)\,(S_1), \qquad (15)$$

де функції $F(z)$ і $Q(z)$ такі, що $F^+(t)=F^-(t)$ на L'', $Q^+(t)=Q^-(t)$ на L'', $\varepsilon_0=2\mu_1\varepsilon R^{-1}$. При цьому, як неважко переконатися, умови на проміжках спаю L'' виконуються тотожньо при будь-яких умовах на щілинах L'. Явний вираз функцій $F(z)$ і $Q(z)$ знайдемо, задовольняючи інші крайові умови.

Розглядаючи лише випадок першої основної задачі, з рівнянь (11), (12) і (15), після нескладних перетворень, маємо

$$F^+(t)-F^-(t)=2q(t) \text{ на } L;$$
$$[Q(t)+mF(t)]^+ +\lambda\,[Q(t)+mF(t)]^- =f(t)+\varepsilon_0 \text{ на } L', \qquad (16)$$

де

$$m=\frac{r_0(1-\varkappa_1\varkappa_2)}{r_0(\varkappa_2+1)+\varkappa_1+1};\quad \lambda=\frac{1+r_0\varkappa_2}{r_0+\varkappa_1};$$
$$f(t)=(1+r_0\varkappa_2)\left[P(t)+\frac{r_0(\varkappa_2+1)-\varkappa_1-1}{r_0(\varkappa_2+1)+\varkappa_1+1}\,q(t)\right].$$

Враховуючи (8) і (15), розв'язки рівнянь (16) можна зобразити у вигляді

$$F(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L'}\frac{q(t)\,dt}{t-z}+D_0+\sum_j[A_j(z)+B_j(z)]; \qquad (17)$$

$$Q(z)+mF(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L'}\frac{f(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}+X(z)\,[P_n(z)+R_n(z)]+\frac{\varepsilon_0}{1+\lambda}, \qquad (18)$$

де

$$X(z)=\prod_k(z-a_k)^{\gamma}(z-b_k)^{\overline{\gamma}},\quad \gamma=-\frac{1}{2}+i\beta,\quad \beta=\frac{\ln\lambda}{2\pi};$$
$$R_n=\frac{D_1}{z}+\frac{D_2}{z^2}+\sum_j\left[U_jA_j(z)+V_jB_j(z)+\frac{V_j^0}{R^2-z\,\overline{z}_j}\right];$$
$$U_j=\frac{(r_0+\varkappa_1)\lambda_2}{X(z_j)},\quad V_j=-\frac{(1+r_0\varkappa_2)\lambda_2}{X(\overline{z}_j)};$$
$$V_j^0=V_j\left[\overline{P}_j(\overline{z}_j)^{-1}(R^2-z_j\overline{z}_j)R^2+\frac{iM_jR^2}{2\pi}\right]\sum_k\left(\frac{\gamma}{R^2-\overline{z}_ja_k}+\frac{\overline{\gamma}}{R^2-\overline{z}_jb_k}\right);$$

C_k і D_k — довільні сталі, $P_n(z)=C_0z^n+C_1z^{n-1}+\ldots+C_n$.

Позначивши праву частину (18), за винятком останнього доданка, через $E(z)$, з (15) будемо мати

$$\Phi_1(z)=\frac{E(z)}{r_0+\varkappa_1}+\lambda_1F(z)+\varepsilon';\quad \Phi_2(z)=\frac{E(z)}{1+r_0\varkappa_2}+\lambda_2F(z)-\varepsilon';$$
$$\Omega_1(z)=-\frac{E(z)}{1+r_0\varkappa_2}+\lambda_1F(z)+\varepsilon';\quad \Omega_2(z)=-\frac{E(z)}{r_0+\varkappa_1}+\lambda_2F(z)-\varepsilon'; \qquad (19)$$
$$N=r_0(1+\varkappa_2)+\varkappa_1+1;\quad \lambda_1=\frac{r_0(1+\varkappa_2)}{N};\quad \lambda_2=\frac{1+\varkappa_1}{N};\quad \varepsilon'=\frac{2\mu_1\varepsilon}{RN}.$$

Довільні сталі, які входять в розв'язок (19), знайдемо за умовами (7), (9) і умовою однозначності переміщень при обході щілин L'_k яка дає $n-1$ незалежних рівнянь

$$\int_{L'_k} [\varkappa_1 \Phi_1^-(t) + \Omega_1^+(t)]\, dt = r_0 \int_{L'_k} [\varkappa_2 \Phi_2^+(t) + \Omega_2^-(t)]\, dt. \qquad (20)$$

Причому друга з умов (9) виконується автоматично при виконанні умови (7).

Аналогічно розв'язується друга основна задача, враховуючи (13), (14), (15), а також змішана задача на підставі (15) і лінійної комбінації (10). Попередніми формулами визначається термопружний стан, враховуючи, що $\varepsilon = R[\alpha_2(T_2 - T_0) - \alpha_1(T_1 - T_0)]$, де α_j, T_j — лінійний коефіцієнт розширення і температура S_j; T_0 — початкова температура S_j.

Якщо лінія L розділу неоднорідності пряма, покладемо, що $\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon' = 0$ і позначимо через S_1 і S_2 нижню і верхню півплощини. Інші позначення такі, як і в попередньому випадку. Тоді напружено-деформований стан в S_j визначається за формулами

$$X_x + Y_y = 2[\Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)}]\ (z = x + iy); \qquad (21)$$

$$Y_y - iX_y = \Phi_j(z) - \Omega_j(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'_j(z)}; \qquad (22)$$

$$2\mu_j \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \varkappa_j \Phi_j(z) + \Omega_j(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_j(z)}. \qquad (23)$$

У цьому випадку умови на L також приводяться до (10—14), а розв'язок задачі визначається за формулами (19), враховуючи, що

$$A_j(z) = -\frac{p_j}{z - z_j}; \quad B_j(z) = -\frac{\varkappa_j p_j}{z - \bar{z}_j} + \frac{\overline{p_j}(z_j - \bar{z}_j) - iM_{0j}}{(z - \bar{z}_j)^2}; \quad M_{0j} = \frac{M_j}{2\pi}; \qquad (24)$$

$$D_1 = D_2 = 0; \quad V_j^0 = -[\overline{p}_j(z_j - \bar{z}_j) - iM_{0j}] \sum_k \left(\frac{\gamma}{\bar{z}_j - a_k} + \frac{\bar{\gamma}}{\bar{z}_j - b_k} \right) V_j.$$

Довільні сталі визначаються за умовами (20) та умовами на безмежності.

П р и к л а д. Запресована шайба з одною щілиною. Нехай матеріали шайби і площини однакові, зовнішнє навантаження відсутнє, а щілина з центральним кутом 2ω симетрична відносно осі Ox. Тоді функції $E(z)$ і $F(z)$ в (19) будуть

$$E(z) = X(z)(C_0 z + C_1 R); \quad F(z) = D_0; \quad X(z) = (z - a_1)^{-1/2}(z - b_k)^{-1/2};$$

$$C_0 = -\frac{4\mu\varepsilon}{(3 - \cos\omega) R}, \quad D_0 = \frac{2(1 + \cos\omega)\varepsilon\mu}{(1 + \varkappa)(3 - \cos\omega) R}; \quad C_1 = -C_0 \cos\omega. \qquad (25)$$

Компоненти напружень в пластинці на лінії спаю L'' такі:

$$\sigma_r = \frac{2(1 + \cos\omega)\sin\frac{1}{2}\theta}{(1 + \varkappa)\sqrt{2|\cos\omega - \cos\theta|}} C_0; \quad \tau_{r\theta} = -\frac{2(1 - \cos\omega)\cos\frac{1}{2}\theta}{(1 + \varkappa)\sqrt{2|\cos\omega - \cos\theta|}} C_0. \qquad (26)$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.

2. Д. В. Грилiцький. Основні граничні задачі для безмежної пластинки, спаяної з шайбою з розрізами на лінії спаю. Питання механіки і математики. Вид. Львів. ун-ту, вип. 9, 1962.
3. Г. П. Черепанов. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 1, 1961.
4. І. О. Прусов. Напружений стан в неоднорідній площині з щілинами по коловій лінії розділу неоднорідності. «Прикладна механіка», т. 7, в. 6, 1961.
5. І. О. Прусов. Зауваження до статті І. О. Прусова, «Прикладна механіка», т. 8, в. 5, 1962.
6. Д. В. Грилицкий. Докторская диссертация, 1964.

И. А. ПРУСОВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ПЛОСКОСТИ С ЗАПРЕССОВАННОЙ ШАЙБОЙ СО ЩЕЛЯМИ

(резюме)

Приведено решение задачи о напряженном состоянии упругой изотропной пластинки с запрессованной шайбой со щелями с учетом внешней нагрузки на краях щелей и сосредоточенных воздействий в произвольной точке области. При отсутствии посадочных напряжений формулами (19—24) определяется решение аналогичной задачи для спаянных со щелями полуплоскостей из разных материалов.

Стаття надійшла у видавництво в 1963 р.