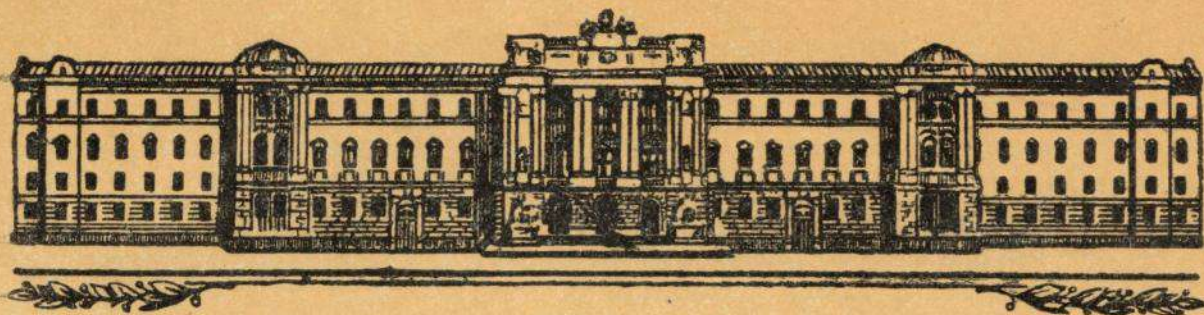




ЛЬВІВСЬКИЙ ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ім. Ів. ФРАНКА

ВІСНИК

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 1

1965

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК

ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ім. ІВАНА ФРАНКА

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК 1

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
1965

531+51

Л89

Друкується за рішенням Редакційно-видавничої ради
Львівського ордена Леніна державного університету ім. Ів. Франка

В даному збірнику, який є продовженням
попереднього збірника «Питання механіки і ма-
тематики» (випуск дев'ятий), вміщені оригінальні
наукові статті з теорії функцій, диференціаль-
них рівнянь, алгебри і теорії пружності.

Відповідальний редактор
професор О. С. Кованько

О. М. ВВЕДЕНСЬКИЙ

КРУЧЕННЯ ЕЛІПТИЧНИХ КРИВИХ НАД ЛОКАЛЬНИМ ПОЛЕМ

Нехай k — поле алгебраїчних чисел (тобто кінцеве розширення поля Q раціональних чисел), A — абелева многовидність, визначена над k , A_k — група точок A , раціональних над k .

Теорема Морделла—Вейля стверджує, що A_k має кінцеве число твірних.

Питання про рівномірну обмеженість числа твірних A_k (k — фіксоване) залишається відкритим. Існувала думка, що p — компонента абелевої многовидності над локальним полем $\mathbb{F}$ -адичних чисел ($\mathbb{F}$ ділить p) рівномірно обмежена.

Тут будується контрприклад: A — еліптична крива над Q_p (поповнення Q по простому дивізору p , p — просте число, більше як три); A можна вибрати так, щоб кручення A_{Q_p} ділилось на будь-яке наперед задане число.

0. Нагадаємо деякі співвідношення з теорії еліптичних функцій Вейерштраса $\wp(u)$ з періодами ω_1 і ω_2 , де

$$\wp'(u)^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3.$$

Розглянемо функцію

$$\wp(nu) - \wp(u). \quad (1)$$

Вона перетворюється в безмежність при $u=0$ і при всіх тих u^* , які мають вигляд:

$$u^* = \frac{v_1\omega_1 + v_2\omega_2}{n}, \quad (2)$$

де v_1 і v_2 — довільні цілі числа.

Визначаємо (при $n > 1$)

$$\psi_n(u)^2 = n^2 \prod_{v_1, v_2} \left[\wp(u) - \wp\left(\frac{v_1\omega_1 + v_2\omega_2}{n}\right) \right], \quad (3)$$

де (v_1, v_2) пробігає повну систему лишків по $\text{mod } n$, за винятком $(0, 0)$ і $\psi_1 = 1$.

Звідси одержуємо

$$\begin{aligned} n \text{ не парне: } \psi_n &= P_n; \\ n \text{ парне: } \psi_n &= \wp'(u) P_n. \end{aligned}$$

де P_n — ціла раціональна функція від $\wp(u)$ степеня $\frac{n^2-1}{2}$ при n непарному і степеня $\frac{n^2-4}{2}$ при n парному; тоді $P_1=1$; $P_2=-1$;

$$P_3=3\wp(u)^4-\frac{3}{2}g_2\wp(u)^2-3g_3\wp(u)-\frac{g_2^2}{16}; \quad (4)$$

$$P_4=-2\wp(u)^6+\frac{5}{2}g_2\wp(u)^4+10g_3\wp(u)^3+\frac{5}{2}g_2^2\wp(u)^2+ \\ +\frac{1}{2}g_2g_3\wp(u)+g_3^2-\frac{g_2^3}{32}.$$

Для обчислення ψ_n і P_n існують рекурентні формули:

$$\psi_{m-n}(u)\psi_{m+n}(u)=\psi_{m+1}(u)\psi_{m-1}(u)\psi_n^2(u)-\psi_{n+1}(u)\psi_{n-1}(u)\psi_m^2(u); \quad (5)$$

$$P_{2n+1}=\wp'(u)^4P_{n+2}P_n^3-P_{n+1}^3P_{n-1}, \quad n \text{ парне}; \quad (6)$$

$$P_{2n+1}=P_{n+2}P_n^3-\wp'(u)^4P_{n+1}^3P_{n-1}, \quad n \text{ непарне};$$

$$P_{2n}=-P_n(P_{n+2}P_{n-1}^2-P_{n+1}^2P_{n-2}). \quad (6')$$

Звідси всі P_n раціонально виражаються через P_1 , P_2 , P_3 і P_4 . З (5) виходить

$$\psi_{m-2}(u)\psi_{m+2}(u)=\psi_{m+1}(u)\psi_{m-1}(u)\psi_2^2(u)-\psi_3(u)\psi_m^2(u). \quad (7)$$

1. Розглянемо криву

$$y^2=(x-\varepsilon)^2(x+2\varepsilon) \quad (8)$$

і покажемо (позначаючи через $\bar{P}_n$ і $\bar{\psi}_m$ відповідні P_n , ψ_m з пункту 0 для цієї кривої), що

$$\bar{P}_{2k+1}=a^{k(2k+1)}(b^k+r_1ab^{k-1}+\dots+r_ka^k); \quad (9)$$

$$\bar{P}_{2k+2}=a^{k(2k+3)}(-b^k+s_1ab^{k-1}+\dots+s_ka^k),$$

де $a=x-\varepsilon$, $b=12\varepsilon$; $r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_k$ — цілі числа.

Зручніше доводити більш точний результат: при параметризації

$$x=\varepsilon\left(1+\frac{12t}{(t-1)^2}\right), \quad y=3\varepsilon\sqrt{3\varepsilon}\frac{4t(t+1)}{(t-1)^3} \quad (10)$$

додаванню точок на кривій (за винятком особливої точки $x=\varepsilon$, $y=0$) відповідає множення параметрів (за винятком $t=0$ і $t=\infty$, які дають подвійну особливу точку (8)), тому має місце

Лема 1. Має місце при $k \geq 1$:

$$\bar{P}_{2k+1}=\frac{b^{2k(k+1)}t^{k(2k+1)}}{(t-1)^{4k(k+1)}}\cdot\frac{t^{2k+1}-1}{t-1}; \quad (11)$$

$$\bar{P}_{2k+2}=-\frac{b^{2k(k+2)}t^{k(2k+3)}}{(t-1)^{4k(k+2)}}\cdot\frac{t^{2k+2}-1}{t^2-1}.$$

Доведення. Доводимо по (7):

$$\bar{P}_{2k+3}\bar{P}_{2k-1}=\bar{P}_{2k+2}\bar{P}_{2k}\bar{\psi}_2^4-\bar{P}_3\bar{P}_{2k+1}^2; \quad (12)$$

$$\bar{P}_{2k+4}\bar{P}_{2k}=\bar{P}_{2k+3}\bar{P}_{2k+1}-\bar{P}_3\bar{P}_{2k+2}^2; \quad (13)$$

для $\bar{P}_3, \bar{P}_4, \bar{P}_5, \bar{P}_6$ ці формули дають вирази (11) при відповідних k . Далі доведення проводимо за індукцією, тому що

$$\bar{\psi}_2^2 = \frac{b^3 t^2 (t+1)^2}{(t-1)^6}, \quad (14)$$

і вважаючи $\bar{P}_{2k-1}, \bar{P}_{2k}, \bar{P}_{2k+1}, \bar{P}_{2k+2}$ заданими по (11), одержуємо, поділивши праву частину співвідношення (12) на $\bar{P}_{2k-1}$, відповідний вираз для $\bar{P}_{2k+3}$, а потім, переходячи до співвідношення (13), одержуємо $\bar{P}_{2k+4}$.

2. Переходимо тепер до основної кривої:

$$y^2 = (x - \varepsilon)^2 (x + 2\varepsilon) + \delta p^l. \quad (15)$$

Одержимо деякі відомості про многочлени P_n цієї кривої, використовуючи результати пункту 1. Оскільки (поклавши $\delta p^l = c$)

$$\begin{aligned} \psi_2^2 &= a^2(b+4a)+4c, & P_3 &= a^3(b+3a)+c(b+12a); \\ P_4 &= a^5(-b-2a)+ac(-b^2-10ab-40a^2)+16c^2, \end{aligned} \quad (16)$$

то при вазі a рівній вазі $b=1$, вазі $c=3$, одержуємо:

Лема 2. Всі одночлени, які входять в розклад многочлена P_n від невідомих a, b і c , мають при вазі a рівній вазі $b=1$, вазі $c=3$ одну і ту саму вагу:

$$\begin{aligned} &\frac{n^2-1}{2} \text{ при } n \text{ непарному,} \\ &\frac{n^2-4}{2} \text{ при } n \text{ парному.} \end{aligned}$$

Доведення йде за індукцією з використанням (6).

Лема 3. При $k \geq 1$

$$P_{2k+1} = \bar{P}_{2k+1} + a^{(k-1)(2k+1)} c (b^{3k-2} + a f_{2k+1}(a, b)) + c^2 g_{2k+1}(a, b, c);$$

$$P_{2k+2} = \bar{P}_{2k+2} + a^{2k^2+k-2} c (-b^{3k-1} + a f_{2k+2}(a, b)) + c^2 g_{2k+2}(a, b, c),$$

де $f_{2k+1}(a, b)$, $f_{2k+2}(a, b)$, $g_{2k+1}(a, b, c)$, $g_{2k+2}(a, b, c)$ — многочлени з цілими коефіцієнтами; всі одночлени в їх розкладах мають при вазі a рівній вазі $b=1$, вазі $c=3$ одну й ту саму вагу, відповідно рівну $3k-3$, $3k-2$, $2k^2+2k-6$, $2k^2+4k-6$.

Д о в е д е н н я. Фактично доведення вимагає лише твердження, що одночлен в розкладі P_n ($n \geq 3$), який містить найменший степінь a серед всіх одночленів, що містять c в першому степені, має вигляд, вказаний в лемі 3. Доведення проводиться з використанням формули (6). Особливість доведення в тому, що одночлени з P_n можуть у формулах (6) частково знищуватися, але їх знищення ми можемо прослідкувати за лемою 1; навпаки, серед одночленів, які містять c в першому степені, знаходиться один, який містить найменший степінь a .

Можна йти далі в тому ж напрямі, розглядаючи одночлени, які містять найменший степінь a серед тих, які містять c^2 , і т. д. Після досить складних обчислень за принципом пункту 2 ми приходимо до такого висновку: якщо покласти вагу $a=1$, вагу $c=n$, то всі одночлени, які містять c^2 , мають вагу, більшу як $\frac{n^2-4}{2}$ при n парному, і $\frac{n^2-1}{2}$ при n непарному.

Теорема. Існують еліптичні криві, кручення яких ділиться на будь-яке задане наперед число.

Доведення. Візьмемо криву (15), де ε і δ — одиниці з Q_p .
Покладемо $x - \varepsilon = u p^{\frac{l}{n}}$, де u — невідома одиниця з Q_p (тут припускаємо, що l кратне n) і продовжуємо розв'язок по модулю зростаючих степенів p .

На закінчення висловлюю щире подяку І. Р. Шафаревічу, під керівництвом якого виконана ця робота.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. Вебер. Lehrbuch der Algebra, Bd. III. Braunschweig, 1908.

О. Н. ВВЕДЕНСКИЙ

КРУЧЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ НАД ЛОКАЛЬНЫМ ПОЛЕМ

(резюме)

На основе исследования уравнений деления на эллиптических кривых, близких (в p -адической топологии) к кривым с особыми точками, доказано, что кручение эллиптических кривых над полем p -адических чисел может делиться на любое наперед заданное число.

С. В. ДЕНИСКО

ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ ПРЯМОЛІНІЙНОЇ КОНГРУЕНЦІЇ, СКЛАДЕНОЇ З ДОТИЧНИХ ДО ЛІНІЙ КРИВИНИ

В статті доводиться така теорема:

Теорема. Віддаль між фокальними точками прямолінійної конгруенції, складеної з дотичних до ліній кривини одного сімейства, дорівнює абсолютній величині радіуса геодезичної кривини ортогональних траєкторій цього сімейства.

Доведення. Рівняння конгруенції дотичних до ліній кривини одного сімейства поверхні $\bar{r}(u^1, u^2)$ запишемо в вигляді

$$\bar{R} = \bar{r}(u^1, u^2) + \lambda \bar{a}(u^1, u^2), \quad (1)$$

де $\bar{a}$ — одиничний вектор.

Візьмемо таку лінійчатую поверхню цієї конгруенції, яка б дотикалась поверхні $\bar{r}(u^1, u^2)$ вздовж ортогональної траєкторії поля вектора $\bar{a}$. Оскільки лінії кривини утворюють спряжену сітку, то ця поверхня є розгортна, а отже, точка її ребра звороту є фокус конгруенції. Згідно з (1), абсциса цього фокуса знаходиться за формулою

$$\lambda_0 = - \frac{\delta \bar{a} \delta \bar{r}}{\delta \bar{a}^2} \quad (2)$$

(δ — символ диференціювання вздовж ортогональної траєкторії поля вектора $\bar{a}$).

Відомо, що [1]

$$d\bar{a} = (\alpha_i \bar{a} + \pi_{ij} a^j \bar{n}) du^i, \quad (3)$$

де a^j — контраваріантна координата вектора $\bar{a}$, α_i і $\bar{n}$ — відповідно трансверсальний і доповняльний вектори поля $\bar{a}$, а π_{ij} — другий основний тензор поверхні $\bar{r}(u^1, u^2)$, для якої одиничний вектор $\bar{n}$ є нормальним.

Оскільки на поверхні $\bar{r}(u^1, u^2)$ напрями векторів $\bar{a}$ і $\bar{n}$ спряжені, то має місце рівність

$$\pi_{ij} a^i a^j = 0. \quad (4)$$

Очевидно,

$$\frac{\bar{a}^1}{\delta u^1} = \frac{\bar{a}^2}{\delta u^2}. \quad (5)$$

Згідно з (3), (4) і (5),

$$\delta \bar{a} = \alpha_i \delta u^i \tilde{a}. \quad (6)$$

Підставивши (6) в (2), дістанемо

$$\lambda_0 = - \frac{\tilde{a}_j \delta u^j}{\alpha_i \delta u^i},$$

або, в силу (5),

$$\lambda_0 = - \frac{1}{\alpha_i \tilde{a}^i}. \quad (7)$$

Але

$$\alpha_i \tilde{a}^i = k_a^{\sim},$$

де $k_a^{\sim}$ — геодезична кривина ортогональної траєкторії поля вектора $\bar{a}$ [1]. Тому (7) набирає вигляду

$$\lambda_0 = - \frac{1}{k_a^{\sim}}.$$

Беручи до уваги останню рівність, а також враховуючи, що точка дотику променя конгруенції (1) до поверхні $\bar{r}(u^1, u^2)$ є фокус цієї конгруенції, переконуємось у справедливості теореми.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. П. Норден. Теория поверхностей. М., Гостехиздат, 1956.

С. В. ДЕНИСКО

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ КОНГРУЭНЦИИ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ КАСАТЕЛЬНЫХ К ЛИНИЯМ КРИВИЗНЫ

(р е з ю м е)

В статье доказана следующая теорема.

Теорема. Расстояние между фокальными точками прямолинейной конгруэнции, составленной из касательных к линиям кривизны одного семейства, равно абсолютной величине радиуса геодезической кривизны ортогональных траекторий этого семейства.

Є. С. ДОРОЖОВСЬКИЙ, Б. М. КОРДУБА, В. Г. КОСТЕНКО

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ПЛОСКОЇ ЕЛЕКТРОСТАТИКИ

В даній роботі зовнішня задача Діріхле для плоскої електростатики в необмеженій області розв'язується методом Г. М. Положого [1] шляхом зведення останньої до внутрішньої задачі в прямокутнику для рівняння Пуассона.

Використовуючи симетрію задачі, вдалося на машині «Урал-1» розв'язати систему алгебраїчних рівнянь, яка при цьому виникає, а також за порівняно простою формулою сумарних зображень знайти поле потенціалу.

§ 1. ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ГРАНИЦІ І ГРАНИЧНИХ УМОВ

Нехай між двома відрізками паралельних прямих (екранами) довільної довжини, віддалі між якими 120 мм, симетрично розміщені три пари паралельних електродів (щілин) однакової довжини 15 мм,

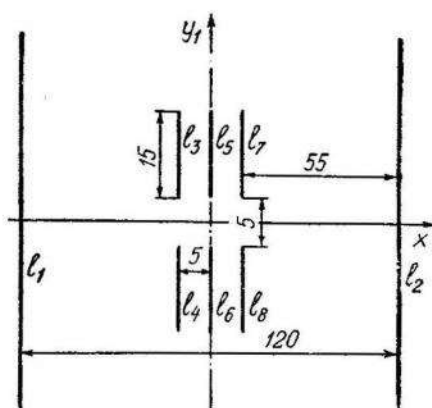


Рис. 1

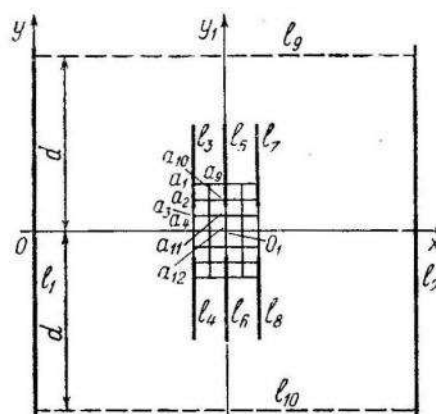


Рис. 2

а віддалі між двома сусідніми електродами 5 мм (рис. 1). На екранах і прилеглих до них електродах задається потенціал $u=1$, а на інших електродах $u=0$. При цих умовах необхідно знайти поле потенціалу даної системи, причому в першу чергу найбільший інтерес являє собою частина поля R , що лежить між електродами.

Математично задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

на площині при заданих граничних умовах

$$\begin{aligned} u &= 1 \text{ на } l_1, l_2, l_3, l_4, l_7, l_8; \\ u &= 0 \text{ на } l_5, l_6. \end{aligned} \quad (2)$$

Природно замінити задачу (1), (2) для необмеженої області такою ж задачею для обмеженої області, наприклад прямокутника. Замкнемо систему в прямокутник, провівши для цього на одній і тій же віддалі d по обидві сторони від осі ox два відрізки паралельних прямих l_9 і l_{10} до перетину з екранами. Для збереження між l_1, l_3, l_4 і між l_2, l_7, l_8 приблизно однорідного поля задамо на l_9 і l_{10} $u=1$.

Таким чином, приходимо до внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad (1)$$

в прямокутнику з щілинами при граничних умовах

$$\begin{aligned} u &= 1 \text{ на } l_1, l_2, l_3, l_4, l_7, l_8, l_9, l_{10}; \\ u &= 0 \text{ на } l_5, l_6. \end{aligned} \quad (3)$$

Нижче буде визначено віддаль d , при якій вплив границі і граничних умов на l_9 і l_{10} в межах потрібної точності не буде впливати на значення розв'язку задачі (1), (2) в області, що нас цікавить.

Спочатку розглядалася задача (1), (3) в прямокутнику розміром 120×60 мм ($d=30$ мм), яка була замінена задачею Діріхле для рівняння Пуассона

$$\Delta U = q(x, y) \quad (4)$$

в тому ж прямокутнику, де $q(x, y)=0$ всюди всередині прямокутника, за винятком щілин, а на останніх $q(x, y)$ знаходиться із умов, щоб

$$U(x, y)|_{l_3, \dots, l_8} = u(x, y)|_{l_3, \dots, l_8}. \quad (5)$$

Крім того,

$$U(x, y)|_{l_1, l_2, l_9, l_{10}} = u(x, y)|_{l_1, l_2, l_9, l_{10}} = 1. \quad (6)$$

Таким чином, задача (1), (3) для многозв'язної області після визначення $q(x, y)$ із умов (5) зводиться до задачі (4), (6) в однозв'язній області.

Методом, який буде викладено нижче, задача (4), (5), (6) розв'язувалась послідовно при $d=30, 60, 90, 120$ мм при одних і тих самих кроках h і h_1 сітки. Виявилося, що при $d=90$ мм і 120 мм розв'язки задачі (4), (5), (6) в області R , що нас цікавить, збігаються з точністю до п'яти знаків. Через це було вибрано прямокутник розміром 120×180 мм і досліджено вплив граничних умов на значення потенціалу в області R . Очевидно, що найменші значення потенціалу задачі (1), (2) на горизонтальних перетинах системи прямими будуть знаходитися в точках перетину цих прямих з віссю o_1y_1 (рис. 2). Якщо на l_9 і l_{10} задати потенціал $U_0 < 1$, а потім підрахувати $U(x, y)$ на осі o_1y_1 , і знайдеться при цьому така вузлова точка на ній, наприклад, на відрізку від електрода l_5 до l_9 , в якій виявиться потенціал $U_1 > U_0$, то, очевидно, задано на l_9 і l_{10} потенціал менший, ніж мінімальне значення потенціалу на l_9 і l_{10} задачі (1), (2). Потім одержане значення U_1 задаємо на l_9 і l_{10} і знову знаходимо $U(x, y)$ на тому ж відрізку осі o_1y_1 . Якщо

при цьому знайдеться така вузлова точка, в якій $U_2 > U_1$, то аналогічно повторюємо даний процес доти, доки максимальне значення потенціалу не виявиться в точці перетину осі o_1y_1 з l_9 і l_{10} . Спочатку було вибрано на l_9 і l_{10} $U_0 = 0,8$ і за вищевказаним способом на машині «Урал-1» знайдено, що значення потенціалу для задачі (1), (2) на горизонтальних прямих l_9 і l_{10} буде знаходитися в межах $0,945003 \leq U \leq 1$.

Після розв'язання задачі (4), (5), (6) при граничних умовах на l_9 і l_{10} $U=1$ і $U=0,945003$ виявилось, що в області R значення потенціалу відрізняються лише в п'ятому знаці. У зв'язку з цим остаточно було вибрано прямокутник розміром 120×180 мм і розглянена в ньому задача (4), (5), (6), розв'язок якої в області R буде відрізнитися від розв'язку задачі (1), (2) лише в п'ятому знаці.

§ 2. РОЗРАХУНОК ПОЛЯ ПЛОСКОЇ ЕЛЕКТРОННОЇ ЛІНЗИ

Розв'язок задачі (4), (5), (6) в прямокутнику розміром 120×180 мм знаходимо за методом Г. М. Положого.

Виберемо прямокутну рівномірну сітку з горизонтальним кроком $h = 0,1$ мм і вертикальним $h_1 = 5/3$ мм. Тоді

$$\gamma = \frac{h}{h_1} = 0,06;$$

$$\eta_k = 1 + \gamma^2 - \gamma^2 \cos \frac{k\pi}{108} > 1;$$

$$\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}; \quad \nu_k = \frac{1}{\mu_k} = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1} \quad (k=1, \dots, 107).$$

Формула сумарних зображень

$$\vec{U}(x_i) = P\Phi(i)\vec{A} + P\Psi(i)\vec{B} + P \sum_{j=1}^{i-1} G(i-j)P[h^2\vec{q}(x_j) - \gamma^2\vec{\omega}(x_j)], \quad (7)$$

де матриця

$$P = \sqrt{\frac{2}{108}} \left\| \sin \frac{ij\pi}{108} \right\|_{i,j=1}^{107};$$

$\Phi(i)$, $\Psi(i)$, $G(i-j)$ — діагональні матриці;

$$\Phi(i) = [\mu_1^i, \dots, \mu_{107}^i]; \quad \Psi(i) = [\nu_1^i, \dots, \nu_{107}^i];$$

$$G(i-j) = \left[\frac{\mu_1^{i-j} - \nu_1^{i-j}}{\mu_1 - \nu_1}, \dots, \frac{\mu_{107}^{i-j} - \nu_{107}^{i-j}}{\mu_{107} - \nu_{107}} \right];$$

$$\vec{A}, \vec{B}, \vec{q}(x_{550}), \vec{q}(x_{600}), \vec{q}(x_{650}), \vec{\omega}(x_j) —$$

n -мірні вектори ($n=107$);

$$\vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_{107});$$

$$\vec{B} = (B_1, B_2, \dots, B_{107});$$

$$\vec{q}(x_{550}) = \vec{q}(x_{650}) = (0, \dots, (43) \dots 0, q_1, \dots, q_9, 0, 0, 0, q_9, \dots, q_1, 0, \dots, (43) \dots 0);$$

$$\vec{q}(x_{600}) = (0, \dots, (43) \dots 0, q_{10}, \dots, q_{18}, 0, 0, 0, q_{18}, \dots, q_{10}, 0, \dots, (43) \dots 0);$$

$$\vec{\omega}(x_j) = (1, 0, \dots, (105) \dots 0, 1),$$

дає розв'язок задачі (4), (6), якщо $q(x_{550})$ і $q(x_{600})$ визначити з умови (5).

Форма стовпців $q(x_{550})$, $q(x_{600})$, $q(x_{650})$ впливає із симетрії розглядуваної задачі відносно осей ox і oy_1 .

Легко показати, що розв'язок, який визначається формулою (7), виявиться симетричним відносно осі ox тільки тоді, коли $A_{2m} = B_{2m} = 0$ ($m = 1, \dots, 53$). Помножуючи рівність (7) на матрицю P зліва і враховуючи, що $PP = E$ (одинична матриця), одержимо

$$P \vec{U}(x_i) = \vec{U}(x_i) = \Phi(i) \vec{A} + \Psi(i) \vec{B} + \sum_{j=1}^{i-1} G(i-j) P [h^2 \vec{q}(x_j) - \gamma^2 \vec{\omega}(x_j)]. \quad (7')$$

Звідси

$$\vec{U}(x_0) = P \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{107} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{107} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{107} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \vec{U}(x_{1200}) = P \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 \mu_1^{1200} \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{107} \mu_{107}^{1200} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \nu_1^{1200} \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{107} \nu_{107}^{1200} \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_{j=1}^{1199} G(1200-j) P [h^2 \vec{q}(x_j) - \gamma^2 \vec{\omega}(x_j)] = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \alpha_{107} \end{pmatrix}, \quad (9) \end{aligned}$$

де α_k ($k = 1, \dots, 107$) — сума всіх елементів k -го рядка матриці P , причому $\alpha_{2m} = 0$ ($m = 1, \dots, 53$), бо для довільних натуральних i, j, n

$$\sin \frac{i(n+1-j)\pi}{n+1} = (-1)^{i-1} \sin \frac{ij\pi}{n+1}.$$

Компоненти стовпця (вектора)

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{1199} G(1200-j) P [h^2 \vec{q}(x_j) - \gamma^2 \vec{\omega}(x_j)] = \\ &= h^2 [G(650) P \vec{q}(x_{550}) + G(600) P \vec{q}(x_{600}) + G(550) P \vec{q}(x_{650})] - \\ &\quad - \gamma^2 \sum_{j=1}^{1199} G(1200-j) P \vec{\omega}(x_j) \end{aligned}$$

з парними індексами також будуть нулями, через те з (8) і (9) для $m=1, \dots, 53$ маємо

$$\begin{aligned} A_{2m} + B_{2m} &= 0; \\ A_{2m} \mu_{2m}^{1200} + B_{2m} \nu_{2m}^{1200} &= 0, \end{aligned}$$

а оскільки $\mu_{2m} > 1$, $\nu_{2m} < 1$, то $A_{2m} = B_{2m} = 0$, що і забезпечує симетрію відносно осі ox розв'язку, який визначається за формулою (7).

Компоненти стовпця

$$\sum_{j=1}^{1199} G(1200-j) P_{\omega}(x_j)$$

з непарними індексами являють собою різниці геометричних прогресій і, таким чином, легко визначаються.

Визначаючи A_{2m+1} і B_{2m+1} ($m=0, 1, \dots, 53$) з (8) і (9) і підставляючи їх в (7), після елементарних перетворень з використанням співвідношення

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{i=1}^n \sin \frac{ik\pi}{n+1} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \frac{2\gamma^2 \sin \frac{k\pi}{n+1}}{(\mu_k - 1)(1 - \nu_k)}$$

($k=1, 3, 5, \dots, n=107$), яке легко перевіряється, знаходимо непарні

компоненти $\tilde{U}_k(x_i)$ стовпця $\tilde{U}(x_i)$:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_k(x_i) &= \alpha_k - 2h^2 \frac{\mu_k^i - \nu_k^i}{\mu_k^{1200} - \nu_k^{1200}} \left[\frac{\mu_k^{650} - \nu_k^{650} + \mu_k^{550} - \nu_k^{550}}{\mu_k - \nu_k} \Phi_k + \frac{\mu_k^{600} - \nu_k^{600}}{\mu_k - \nu_k} \Psi_k \right] + \\ &+ 2h^2 \frac{\mu_k^{i-550} - \nu_k^{i-550}}{\mu_k - \nu_k} \Phi_k, \quad (k=1, 3, \dots, 107), \end{aligned} \quad (10)$$

де $2\Phi_k$ і $2\Psi_k$ — добутки k -го рядка матриці P відповідно на стовпці $\vec{q}(x_{550})$ і $\vec{q}(x_{600})$.

Останній доданок у формулі (10) слід брати тільки при $i > 550$.

Враховуючи, крім того, що парні компоненти стовпця $\tilde{U}(x_i)$ рівні нулеві, визначаємо потім поле потенціалу за формулою

$$\vec{U}(x_i) = P \vec{U}(x_i). \quad (11)$$

При вказаному виборі стовпців $\vec{q}(x_{550}) = \vec{q}(x_{650})$ і $\vec{q}(x_{600})$ поле потенціалу буде симетричним відносно осей лінзи, так що його розрахунок досить провести в одній з чотирьох частин області R , що лежить між осями ox і oy_1 .

Перше, ніж використовувати формули (10) і (11) для практичного розрахунку, необхідно визначити стовпці $\vec{q}(x_{550})$ і $\vec{q}(x_{600})$ з умов (5).

Формула (7) при знайдених $\vec{A}$ і $\vec{B}$ з рівнянь (8) і (9) дозволяє скласти систему 18 рівнянь для визначення $q_1, \dots, q_{18}$.

Справді, якщо взяти компоненти $U_{44}(x_{550}), \dots, U_{52}(x_{550})$ стовпця $\vec{U}(x_{550})$ і $U_{44}(x_{600}), \dots, U_{52}(x_{600})$ стовпця $\vec{U}(x_{600})$ і прирівняти їх до значень $U(x, y)$ на відповідних електродах, то одержимо

$$\begin{aligned} U_{44}(x_{550}) &= \dots = U_{52}(x_{550}) = 1; \\ U_{44}(x_{600}) &= \dots = U_{52}(x_{600}) = 0. \end{aligned}$$

Після деяких спрощень остання система рівнянь приводиться до вигляду

$$h^2 \sqrt{\frac{2}{108}} \left\{ \sin \frac{i\pi}{108} C_1^{(1)} + \sin \frac{3i\pi}{108} C_3^{(1)} + \dots + \sin \frac{107i\pi}{108} C_{107}^{(1)} \right\} = 0$$

$$(i=44, \dots, 52);$$

$$h^2 \sqrt{\frac{2}{108}} \left\{ \sin \frac{i\pi}{108} C_1^{(2)} + \sin \frac{3i\pi}{108} C_3^{(2)} + \dots + \sin \frac{107i\pi}{108} C_{107}^{(1)} \right\} = 1, \quad (12)$$

$$(i=44, \dots, 52),$$

де

$$C_k^{(1)} = \frac{\mu_k^{550} - \nu_k^{550}}{\mu_k^{1200} - \nu_k^{1200}} \left(\frac{\mu_k^{650} - \nu_k^{650} + \mu_k^{550} - \nu_k^{550}}{\mu_k - \nu_k} 2\varphi_k + \frac{\mu_k^{600} - \nu_k^{600}}{\mu_k - \nu_k} 2\psi_k \right);$$

$$C_k^{(2)} = \frac{\mu_k^{600} - \nu_k^{600}}{\mu_k^{1200} - \nu_k^{1200}} \left(\frac{\mu_k^{650} - \nu_k^{650} + \mu_k^{550} - \nu_k^{550}}{\mu_k - \nu_k} 2\varphi_k + \frac{\mu_k^{600} - \nu_k^{600}}{\mu_k - \nu_k} 2\psi_k \right) - \frac{\mu_k^{50} - \nu_k^{50}}{\mu_k - \nu_k} 2\varphi_k.$$

$$(k=1, 3, \dots, 107).$$

Коефіцієнти системи (12) при $q_1, \dots, q_{18}$, а також її розв'язок знаходилися на машині «Урал-1» за допомогою нижче наведеного алгоритму. Так, наприклад, коефіцієнти при $q_1, \dots, q_9$ першого рівняння системи (12) одержуються шляхом матричних множень 44-го рядка матриці P на діагональну матрицю M , а потім на 44-й, ..., 52-й стовпці матриці P відповідно; коефіцієнти при $q_{10}, \dots, q_{18}$ одержуються таким же чином з заміною M на N , де $M = [M_1, 0, M_3, \dots, 0, M_{107}]$, $N = [N_1, 0, N_3, \dots, 0, N_{107}]$ — діагональні матриці

$$M_k = \frac{\mu_k^{550} - \nu_k^{550}}{\mu_k^{1200} - \nu_k^{1200}} \frac{\mu_k^{650} - \nu_k^{650} + \mu_k^{550} - \nu_k^{550}}{\mu_k - \nu_k};$$

$$N_k = \frac{\mu_k^{550} - \nu_k^{550}}{\mu_k^{1200} - \nu_k^{1200}} \frac{\mu_k^{600} - \nu_k^{600}}{\mu_k - \nu_k}.$$

Коефіцієнти при $q_1, \dots, q_{18}$ в рівняннях 10-му, ..., 18-му одержуються аналогічно з заміною M на $D=2N$, а N на L , де $L = [L_1, 0, L_3, \dots, 0, L_{107}]$ — діагональна матриця;

$$L_k = \frac{\mu_k^{600} - \nu_k^{600}}{\mu_k^{1200} - \nu_k^{1200}} \cdot \frac{\mu_k^{600} - \nu_k^{600}}{\mu_k - \nu_k}.$$

Наведемо одержані розв'язки системи (12):

$$\begin{array}{lll} q_1 = -2,67413288, & q_7 = -2,08982148, & q_{13} = 4,04628036, \\ q_2 = -2,10746734, & q_8 = -2,15679288, & q_{14} = 4,02365408, \\ q_3 = -2,07640248, & q_9 = -2,86814022, & q_{15} = 4,03016458, \\ q_4 = -2,07414378, & q_{10} = 6,71528776, & q_{16} = 4,07999798, \\ q_5 = -2,07392362, & q_{11} = 4,45520488, & q_{17} = 4,29559054, \\ q_6 = -2,07688882, & q_{12} = 4,13167588, & q_{18} = 6,01150428, \end{array}$$

а також частину поля області R , яку знайдено на машині «Урал-1» за формулами (10) і (11).

$$\begin{array}{lll} U(a_1) = 0,999999990, & U(a_5) = 0,512817898, & U(a_9) = 0,000000108, \\ U(a_2) = 0,999999996, & U(a_6) = 0,532734096, & U(a_{10}) = 0,000000362, \\ U(a_3) = 0,823573202, & U(a_7) = 0,570955280, & U(a_{11}) = 0,385614520, \\ U(a_4) = 0,792885028, & U(a_8) = 0,586709876, & U(a_{12}) = 0,457856240. \end{array}$$

Не викликає після цього великих труднощів знаходження траєкторій розглядуваної електронної лінзи. Однак ми викладемо це питання в роботі, присвяченій більш важливій електронно-оптичній системі.

Примітка. При підрахунку поля всередині прямокутника з постійними граничними умовами $U=a$ на його границі за допомогою заміни $U=V+a$ можна було б дещо простіше одержати розрахункові формули для поля і коефіцієнтів системи рівнянь для визначення $q(x,y)$. Однак використаний тут спосіб спрощення може виявитися корисним при розгляді подібних задач з різними постійними умовами на різних сторонах прямокутника.

ЛІТЕРАТУРА

1. Г. Н. Положий. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд. Киев. ун-та, 1962.

Е. С. ДОРОЖОВСКИЙ, Б. М. КОРДУБА, В. Г. КОСТЕНКО

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ

(резюме)

В работе решается внешняя задача Дирихле для плоской электростатики в неограниченной области методом Г. Н. Положего путем сведения последней к внутренней задаче в прямоугольнике для уравнения Пуассона.

Используя симметрию задачи, на ЭВМ решена возникающая при этом система алгебраических уравнений, а также по сравнительно простой формуле суммарных представлений найдено поле потенциала.

О. М. КОСТОВСЬКИЙ

ЗАСТОСУВАННЯ ДОБУТКІВ ЛОБАЧЕВСЬКОГО—ГРЕФФЕ В МЕТОДАХ ЧИСЕЛЬНОГО ВИЗНАЧЕННЯ НУЛІВ ФУНКЦІЙ

§ 1. ДОБУТОК ЛОБАЧЕВСЬКОГО—ГРЕФФЕ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Нехай D область, яка є кругом або кільцем з центром в початку координат.

Означення I. Функція $f(z)$ називається парною функцією k -го порядку в області D , якщо $f(\varepsilon_0 z) = f(\varepsilon_1 z) = \dots = f(\varepsilon_{k-1} z)$ для всіх значень z даної області. ε_i — означають корені k -ої степені із одиниці.

Зокрема, при $k=2$ дістанемо звичайне означення парної функції.

Теорема I. Для того щоб ряд Лорана (ряд Тейлора або поліном) був парною функцією k -го порядку в області D , необхідно і достатньо, щоб змінна входила тільки в степенях, кратних k .

Дійсно, якщо ряд Лорана зображає функцію, парну k -го порядку, то

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{k} [f(\varepsilon_0 z) + f(\varepsilon_1 z) + \dots + f(\varepsilon_{k-1} z)] = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\varepsilon_0^i + \varepsilon_1^i + \dots + \varepsilon_{k-1}^i) a_i z^i = \frac{1}{k} \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ki} k z^{ki} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ki} z^{ki}. \end{aligned}$$

Обернене твердження очевидне.

Означення II. Добуток Лобачевського—Греффе k -го роду* функцій $f_0(z), f_1(z), \dots, f_{k-1}(z)$, заданих в області D , називається функція

$$F_k(z) = \frac{1}{k!} \sum \prod_{j=0}^{k-1} f_{ij}(\varepsilon_j z) = \frac{1}{k!} \sum \prod_{j=0}^{k-1} f_j(\varepsilon_{ij} z), \quad (1)$$

де сумування поширюється на всі $k!$ перестановок індексів $0, 1, 2, \dots, k-1$. Далі добуток Лобачевського—Греффе k -го роду (або скорочено ДЛГ (k)) будемо позначати символом $\odot$ і писати

$$F_k(z) = f_0 \odot f_1 \odot \dots \odot f_{k-1} = \prod_{j=0}^{k-1} f_j.$$

* Або перетворення Лобачевського—Греффе k -го роду.

Із визначення парної функції k -го порядку безпосередньо витікає.

Теорема II. ДЛГ (k) є парною функцією k -го порядку.

Таким чином, якщо функції $f_i(z)$ є рядами Лорана, які мають спільну область D збіжності, то ДЛГ (k) від цих функцій також буде рядом Лорана (відповідно поліномом або степеневим рядом), збіжним в області D . Причому даний ряд Лорана містить змінну тільки в степенях, кратних числу k .

В окремих випадках формула (1) запишеться так:

I. Якщо $f_0 = f_1 = \dots = f_{k-1} = f$, то

$$F_k(z) = f_k(z^k) = f \odot f \odot \dots \odot f = f(\varepsilon_0 z) \cdot f(\varepsilon_1 z) \dots f(\varepsilon_{k-1} z). \quad (2)$$

II. Якщо $f_0 = f_1 = \dots = f_{k-2} = f$, $f_{k-1} = g$, то

$$\begin{aligned} g_k(z^k) &= f \odot f \odot \dots \odot f \odot g = \\ &= \frac{1}{k} [f(\varepsilon_0 z) \dots f(\varepsilon_{k-2} z) g(\varepsilon_{k-1} z) + \dots + g(\varepsilon_0 z) f(\varepsilon_1 z) \dots f(\varepsilon_{k-1} z)], \end{aligned} \quad (3)$$

де в квадратних дужках стоїть k доданків.

III. Якщо ДЛГ (k) утворено із функцій $f_1(z), f_2(z), \dots, f_r(z)$, взятих відповідно $k_1, k_2, \dots, k_r$ раз кожна, де $k = k_1 + k_2 + \dots + k_r$, то

$$\begin{aligned} &f_1 \odot \dots \odot f_1 \odot f_2 \odot \dots \odot f_2 \odot \dots \odot f_r \odot \dots \odot f_r = \\ &= \frac{k_1! k_2! \dots k_r!}{k!} [f_1(\varepsilon_0 z) \dots f_1(\varepsilon_{k_1} z) f_2(\varepsilon_{k_1+1} z) \dots f_2(\varepsilon_{k_1+k_2} z) \dots f_r(\varepsilon_{k-k_1} z) + \dots], \end{aligned}$$

де в квадратних дужках міститься $\frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_r!}$ доданків.

Із визначення II безпосередньо витікають такі властивості ДЛГ (k) .

IV. ДЛГ (k) є комутативним відносно операції $\odot$, тобто

$$f_0 \odot f_1 \odot \dots \odot f_{k-1} = f_{i_0} \odot f_{i_1} \odot \dots \odot f_{i_{k-1}},$$

де $i_0, i_1, \dots, i_{k-1}$ довільна перестановка чисел $0, 1, 2, \dots, k-1$.

V. Якщо a_i постійний множник функції $f_i(z)$, то

$$(a_0 f_0) \odot (a_1 f_1) \odot \dots \odot (a_{k-1} f_{k-1}) = a_0 a_1 \dots a_{k-1} (f_0 \odot f_1 \odot \dots \odot f_{k-1}).$$

VI.

$$\bigodot_{j=0}^{k-1} \left(\sum_{i_j=1}^{n_j} a_j^{(i_j)} f_j^{(i_j)} \right) = \sum_{i_0=1}^{n_0} \sum_{i_1=1}^{n_1} \dots \sum_{i_{k-1}=1}^{n_{k-1}} (a_0^{(i_0)} a_1^{(i_1)} \dots a_{k-1}^{(i_{k-1})}) (f_0^{(i_0)} \odot f_1^{(i_1)} \odot \dots \odot f_{k-1}^{(i_{k-1})}).$$

VII. Якщо $f_i(z) = D(z) \tilde{f}_i(z)$, $i = 0, 1, \dots, k-1$ (зокрема, $D(z)$ може бути найбільшим спільним дільником), то

$$F_k = f_0 \odot f_1 \odot \dots \odot f_{k-1} = (D \odot D \odot \dots \odot D) (\tilde{f}_0 \odot \tilde{f}_1 \odot \dots \odot \tilde{f}_{k-1}) = D_k \tilde{F}_k.$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{1}{k!} [f_0(\varepsilon_0 z) \dots f_{k-1}(\varepsilon_{k-1} z) + \dots + f_{k-1}(\varepsilon_0 z) \dots f_0(\varepsilon_{k-1} z)] = \\ &= D(\varepsilon_0 z) D(\varepsilon_1 z) \dots D(\varepsilon_{k-1} z) \frac{1}{k!} [\tilde{f}_0(\varepsilon_0 z) \dots \tilde{f}_{k-1}(\varepsilon_{k-1} z) + \dots + \tilde{f}_{k-1}(\varepsilon_0 z) \dots \tilde{f}_0(\varepsilon_{k-1} z)] = \\ &= (D \odot D \odot \dots \odot D) (\tilde{f}_0 \odot \tilde{f}_1 \odot \dots \odot \tilde{f}_{k-1}). \end{aligned}$$

Із теореми I і II витікає.

VIII. Якщо функції $f_0(z), f_1(z), \dots, f_{k-1}(z)$ є поліномами відповідно степеней $n_0, n_1, \dots, n_{k-1}$, то ДЛГ (k) (1) також буде поліномом степені, не більшим від числа

$$k \times \text{antier} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} n_i \right).$$

Теорема III. Якщо $f_0(z), f_1(z), \dots, f_{k-1}(z)$ є парні функції відповідно $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{k-1}$ порядків, то ДЛГ (k) (1) буде парною функцією $m = kd$ -го роду, де d — найбільший спільний дільник $\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_{k-1}$.

Доведення. За умовою маємо

$$F(\varepsilon_{0,m}z) = F(\varepsilon_{1,m}z) = \dots = F(\varepsilon_{m-1,m}z) = F(z), \quad (\varepsilon_{0,m} = 1)$$

1

$$f_i(\varepsilon_{0,d}z) = f_i(\varepsilon_{1,d}z) = \dots = f_i(\varepsilon_{d-1,d}z) = f_i(z), \quad (\varepsilon_{0,d} = 1), \\ (i=0, 1, \dots, k-1),$$

де в $\varepsilon_{j,m}$ другий індекс m показує, що цей символ є коренем m -го степеню із одиниці. Справедливість останніх рівностей витікає з того, що кожне κ_i є кратне d і $\varepsilon_{l,m} = \varepsilon_{i,k} \varepsilon_{j,d}$. Із останніх рівностей можемо записати

$$F(\varepsilon_{l,m}z) = \frac{1}{k!} \{f_0[\varepsilon_{0,k}(\varepsilon_{l,k} \varepsilon_{j,d}z)] \dots f_{k-1}[\varepsilon_{k-1,k}(\varepsilon_{l,k} \varepsilon_{j,d}z)] \dots\} = \\ = \frac{1}{k!} \{f_0(\varepsilon_{0,k} \varepsilon_{l,k} z) \dots f_{k-1}(\varepsilon_{k-1,k} \varepsilon_{l,k} z) + \dots\} = F(\varepsilon_{l,k}z) = F(z). \\ l=0, 1, 2, \dots, m-1.$$

Розглянемо тепер ДЛГ (k) від одної функції (2) у випадку, коли $k = k_1, k_2 \dots k_r$ (k_i — цілі числа).

Нехай спочатку $k = k_1 k_2$. Складемо спочатку ДЛГ (k) від функції f :

$$f_{k_1} = f \odot f \odot \dots \odot f, \quad (4)$$

а потім аналогічний добуток k_2 -го роду від функції f_{k_1} :

$$(f_{k_1})_{k_2} = f_{k_1} \odot f_{k_1} \odot \dots \odot f_{k_1}. \quad (5)$$

Підставляючи значення f_{k_1} із (4) в (5) і беручи до уваги, що $\varepsilon_{l,k} = \varepsilon_{j,k_1} \varepsilon_{l,k_2}$, безпосередньо дістанемо, що $(f_{k_1})_{k_2}$ в (5) є ДЛГ $(k_1 k_2)$.

Так само встановлюється справедливість оберненого твердження, тобто ДЛГ $(k_1 k_2)$ від функції f можна звести до ДЛГ (k_2) від функції, яка, в свою чергу, є ДЛГ (k_1) від функції f . Ці твердження легко узагальнюються методом математичної індукції на довільне число множників, на яке розкладається число k . Тільки що сказане може бути сформульоване у вигляді такої теореми.

Теорема IV. Нехай задана послідовність добутків Лобачевського—Греффе

$$f^{(1)} = f_{k_1} = f \odot f \odot \dots \odot f, \quad k_1\text{-го роду від функції } f; \\ f^{(2)} = f_{k_2}^{(1)} = f^{(1)} \odot f^{(1)} \odot \dots \odot f^{(1)}, \quad k_2\text{-го роду від функції } f^{(1)}; \\ \dots \dots \dots; \quad (6) \\ f^{(r)} = f_{k_r}^{(r-1)} = f^{(r-1)} \odot f^{(r-1)} \odot \dots \odot f^{(r-1)}, \quad k_r\text{-го роду від функції } f^{(r-1)}.$$

Тоді $f^{(r)}$ буде ДЛГ $(k_1 k_2 \dots k_r)$ від функції f ($f^{(r)} = f_k$). І, навпаки, ДЛГ $(k_1 k_2 \dots k_r)$ від функції f можна звести до ДЛГ (k_r) від функ-

Приклад. $k=12=2 \cdot 3 \cdot 2$;

$$f_{12} = [(f \odot f) \odot (f \odot f) \odot (f \odot f)] \odot [(f \odot f) \odot (f \odot f) \odot (f \odot f)].$$

Складемо ДЛГ (k) від функції f і g :

$$g^{(1)} = g_k = f \odot \dots \odot f \odot g;$$

$$g^{(2)} = g^{(1)} = f^{(1)} \odot \dots \odot f^{(1)} \odot g^{(1)}; \quad (7)$$

$$g^{(r)} = g_k^{(r-1)} = f^{(r-1)} \odot \dots \odot f^{(r-1)} \overline{\odot} g^{(r-1)},$$

Теорема V. Функція $g^{(r)}$ є ДЛГ $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ від функції f , взятої $k-1$ разів і функції g . Навпаки, ДЛГ $(k_1, k_2, \dots, k_r)$ функції f і g , заданий формулою (3), можна звести до ДЛГ (k_r) від функцій $f^{(r-1)}$ і $g^{(r-1)}$, функція $g^{(r-1)}$, в свою чергу, може бути зображена у вигляді ДЛГ (k_{r-1}) від функції $f^{(r-2)}$ і функції $g^{(r-2)}$ і т. д.

§ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ДОБУТКУ ЛОБАЧЕВСЬКОГО—ГРЕФФЕ В МЕТОДАХ ЧИСЕЛЬНОГО ВИЗНАЧЕННЯ НУЛІВ ФУНКЦІЙ

В роботах [3], [4], [5] були дані узагальнені формули перетворення функцій (поліномів, степеневих рядів і рядів Лорана) в методі Лобачевського—Греффе чисельного визначення нулів. При цьому були використані формули перетворень (6) ДЛГ (κ'), де $\kappa \geq 2$. Цей спосіб перетворення функцій був названий способом « κ -ювання нулів» початкового рівняння.

За допомогою ДЛГ (k) типу (7) в методі Бродетського—Сміла і Лемера легко встановити формулу, яка виражає функцію $g^{(r)}$ через нулі початкового полінома $f(z)$, де $g^{(0)}=f'(z)$ і $k=k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_r$, зокрема можна покласти $k_1=k_2=\dots=k_r \geq 2$.

$$f(z) = \prod_{v=1}^n (z_v - z) = \sum_{i=1}^n a_i z^i,$$

тоді

$$\begin{aligned} f_k(z^k) &= f \odot f \odot \dots \odot f = \prod_{v=1}^n (z_v - \varepsilon_0 z) \dots \prod_{v=1}^n (z_v - \varepsilon_{k-1} z) = \\ &= \prod_{v=1}^n (z_v + (-1)^k \varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{k-1} z^k) = \prod_{v=1}^n (z_v^k - z^k). \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} g_k(z^k) &= f \odot \dots \odot f \odot g = \frac{1}{k} \left\{ \prod_{v=1}^n (z_v - \varepsilon_0 z) \dots \prod_{v=1}^n (z_v - \varepsilon_{k-3} z) \times \right. \\ &\times \left[- \sum_{i=1}^n \prod_{v=1, v \neq i}^n (z_v - \varepsilon_{k-1} z) \right] + \dots + \left[- \sum_{i=1}^n \prod_{v=1, v \neq i}^n (z_v - \varepsilon_0 z) \right] \times \\ &\times \prod_{v=1}^n (z_v - \varepsilon_1 z) \dots \prod_{v=1}^n (z_v - \varepsilon_{k-1} z) \left. \right\} = - \frac{1}{k} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\prod_{j=1, j \neq k-1}^n (z_i - \varepsilon_j z) \times \right. \right. \\ &\times \left. \prod_{v=1, v \neq i}^n (z_v^k - z^k) \right] + \dots + \sum_{i=1}^n \left[\prod_{j=0, j \neq 0}^{k-1} (z_i - \varepsilon_j z) \prod_{v=1, v \neq i}^n (z_v^k - z^k) \right] \left. \right\} = \\ &= - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \left[\sum_{l=0}^{k-1} \prod_{j=0, j \neq l}^{k-1} (z_i - \varepsilon_j z) \prod_{v=1, v \neq i}^n (z_v^k - z^k) \right] = \\ &= - \sum_{i=1}^n z_i^{k-1} \prod_{v=1, v \neq i}^n (z_v^k - z^k), \end{aligned} \quad (9)$$

де $\sum_{l=0}^{k-1} \prod_{j=0, j \neq l}^{k-1} (z_i - \varepsilon_j z) = k z_i^{k-1}$.

В методі Лобачевського—Греффе використовуються ДЛГ (k) для однієї функції $f(z)$.

Метод Лемера використовує ДЛГ (k) для однієї функції $f(z)$ формули (6) і ДЛГ (k) для двох функцій $f(z)$ і $g(z) = z^2 f'(z)$ формули (7). В роботі [11] було показано, що в методі Лемера можна брати $g(z) = f'(z)$.

В роботі [5] ці результати узагальнені. Показано, що можна покласти $g(z) = z \cdot u(z) f'(z)$, де $u(z)$ — довільна аналітична функція в області аналітичності $f(z)$ (функція $f(z)$ — поліном, степеневий ряд або ряд Лорана); це дало можливість знайти новий чисельний метод розкладу $f(z)$ на множники. У всіх цих випадках фактично використовувались ДЛГ (k) типу (6) і (7), тобто від однієї даної функції або від даної функції і її похідної, помноженої на деякий множник.

Тепер ми покажемо, як можна використовувати ДЛГ (k) для визначення двох рівнів за модулем нулів полінома з комплексними коефіцієнтами.

Нехай $f_0(z) = \prod_{v=1}^n (z_v - z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$ поліном з комплексними коефіцієнтами, тоді

$$g_0(z) = f'_0(z) = - \sum_{i=1}^n \prod_{v=1, v \neq i}^n (z_v - z), \quad (10)$$

$$\varphi_0(z) = f''_0(z) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \prod_{v=1, v \neq i, j}^n (z_v - z)$$

$$F_0(z) = f_0(z) + h g_0(z) + \frac{1}{2} h^2 \varphi_0(z), \quad (11)$$

де ми нехтуємо членами, які містять h^3 і вищі степені h .

Покладемо тепер в (6) $k_1 = \dots = k_r = 2$ і складемо ДЛГ (k) функції $F_0(z)$, де $k = 2r$, дістанемо ($\varepsilon_0 = +1$, $\varepsilon_1 = -1$);

$$\begin{aligned} F_1(z^2) &= F_0(z) F_0(-z) = f_0(z) f_0(-z) + 2h \frac{1}{2} [f_0(z) g_0(-z) + f_0(-z) g_0(z)] + \\ &+ h^2 \left\{ \frac{1}{2} [f_0(z) \varphi_0(-z) + f_0(-z) \varphi_0(z)] + g_0(z) g_0(-z) \right\} = \\ &= f_1(z^2) + 2h g_1(z^2) + 2h^2 \varphi_1(z^2), \end{aligned}$$

де

$$\varphi_1(z^2) = \frac{1}{2} [(f_0 \odot \varphi_0) + (g_0 \odot g_0)] = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}_0 + \tilde{g}_0]; \quad (12)$$

$$F_2(z^2) = f_2(z^2) + 4h g_2(z^2) + \frac{4^2}{2} h^2 \varphi_2(z^2),$$

де

$$\varphi_2(z^2) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}_1 + \tilde{g}_1];$$

$$F_r(z^2) = F_{r-1}(z) F_{r-1}(-z) = f_r(z^2) + k h g_r(z^2) + \frac{k^2}{2} h^2 \varphi_r(z^2),$$

де

$$\varphi_r(z^2) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}_{r-1} + \tilde{g}_{r-1}].$$

Підставляючи $f_0(z)$, $g_0(z)$ і $\varphi_0(z)$ з (10) в (12), дістанемо

$$\begin{aligned} F_0(z^2) &= \prod_{v=1}^n (z_v - z) - h \sum_{i=1}^n \prod_{v=1, v \neq i}^n (z_v - z) + \frac{1}{2} h^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \prod_{v=1, v \neq i, j}^n (z_v - z); \\ F_1(z^2) &= F_0(z) F_0(-z) = \prod_{v=1}^n (z_v^2 - z^2) - 2h \sum_{i=1}^n z_i \prod_{v=1, v \neq i}^n (z_v^2 - z^2) + \\ &+ \frac{2^2}{2} h^2 \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n z_i z_j \prod_{v=1, v \neq i, j}^n (z_v^2 - z^2) + \frac{2-1}{2} \sum_{i=1}^n z_i^0 \prod_{v=1, v \neq i}^n (z_v^2 - z^2) \right]; \quad (13) \end{aligned}$$

$$F_r(z^2) = F_{r-1}(z)F_{r-1}(-z) = \prod_{v=1}^n (z_v^k - z^2) - kh \sum_{i=1}^n z_i^{k-1} \prod_{v=1, v \neq i}^n (z_v^k - z^2) + \\ + \frac{k^2}{2} h^2 \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n z_i^{k-1} z_j^{k-1} \prod_{v=1, v \neq i, j}^n (z_v^k - z^2) + \frac{k-1}{k} \sum_{i=1}^n z_i^{k-2} \prod_{v=1, v \neq i}^n (z_v^k - z^2) \right], \\ k=2^r.$$

з (12) і (13), після заміни z^2 на z , можемо записати

$$f_r(z) = \sum_{i=1}^n a_i^{(r)} z^i = \prod_{v=1}^n (z_v^k - z), \quad (a_n \neq 0); \\ g_r(z) = \sum_{i=1}^n b_i^{(r)} z^i = \sum_{i=1}^n z_i^{k-1} \prod_{v=1, v \neq i}^n (z_v^k - z), \quad (b_n = 0); \\ \varphi_i(z) = \sum_{i=1}^n c_i^{(r)} z^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n z_i^{k-1} z_j^{k-1} \prod_{v=1, v \neq i, j}^n (z_v^k - z) + \\ + \frac{k-1}{k} \sum_{i=1}^n z_i^{k-2} \prod_{v=1, v \neq i}^n (z_v^k - z) = 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j > i}^n z_i^{k-1} z_j^{k-1} \prod_{v=1, v \neq i, j}^n (z_v^k - z) + \\ + \left(1 - \frac{1}{k}\right) \sum_{i=1}^n z_i^{k-2} \prod_{v=1, v \neq i}^n (z_v^k - z), \quad (c_{n-1} = c_n = 0). \quad (14)$$

Зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях z^l , дістанемо

$$\frac{a_l^{(r)}}{a_0^{(r)}} = (-1)^r S(z_1^{-k} z_2^{-k} \dots z_l^{-k}); \\ \frac{b_l^{(r)}}{a_0^{(r)}} = (-1)^{r+1} S(z_1^{-k} \dots z_l^{-k} z_{l+1}^{-1}); \\ \frac{c_l^{(r)}}{a_0^{(r)}} = (-1)^r \left[2S(z_1^{-k} \dots z_l^{-k} z_{l+1}^{-1} z_{l+2}^{-1}) + \left(1 - \frac{1}{k}\right) S(z_1^{-k} \dots z_l^{-k} z_{l+1}^{-2}) \right],$$

де S — симетричні функції відповідних аргументів і $a_0^{(r)} = z_1^k \dots z_n^k$. Припустимо тепер, що модулі коренів $f(z)$ задовольняють нерівностям

$$|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|. \quad (15)$$

Крім того, нехай $|z_l| < |z_{l+1}|$. Тоді для достатньо великих $k=2^r$ можемо записати

$$\frac{a_l^{(r)}}{a_0^{(r)}} = (-1)^r z_1^{-k} z_2^{-k} \dots z_l^{-k} \quad (16)$$

і

$$\frac{b_l^{(r)}}{a_l^{(r)}} = -(z_{l+1}^{-1} + z_{l+2}^{-1} + \dots + z_n^{-1}); \quad (17)$$

$$\frac{c_l^{(r)}}{a_l^{(r)}} = 2(z_{l+1}^{-1} z_{l+2}^{-1} + z_{l+1}^{-1} z_{l+3}^{-1} + \dots + z_{n-1}^{-1} z_n^{-1}) + \left(1 - \frac{1}{k}\right) (z_{l+1}^{-2} + \dots + z_n^{-2}). \quad (18)$$

Із (16), (17), (18) при умовах $|z_l| < |z_{l+1}|$ і $|z_m| < |z_{m+1}|$ будемо мати

$$p_{l,m}^{(r)} = \frac{b_l^{(r)}}{a_l^{(r)}} - \frac{b_m^{(r)}}{a_m^{(r)}} = -(z_{l+1}^{-1} + z_{l+2}^{-1} + \dots + z_m^{-1}); \quad (19)$$

$$h_l^{(r)} = \left(\frac{b_l^{(r)}}{a_l^{(r)}} \right)^2 - \frac{c_l^{(r)}}{a_l^{(r)}} = \frac{1}{k} (z_{l+1}^{-2} + z_{l+2}^{-2} + \dots + z_n^{-2});$$

$$q_{l,m}^{(r)} = h_l^{(r)} - h_m^{(r)} = \frac{1}{k} (z_{l+1}^{-2} + z_{l+2}^{-2} + \dots + z_m^{-2}). \quad (20)$$

Коли в нерівностях (19) $m = l+2$, то пара рівних за модулем комплексних коренів може бути визначена із квадратного рівняння

$$u^2 + pu + \frac{1}{2}(p^2 - kq) = 0, \quad (21)$$

яке безпосередньо витікає із (19) і (20), де $p = p_{l,l+2}^{(r)}$, $q = q_{l,l+2}^{(r)}$.

Нехай з (15) $0 < |z_l| < |z_{l+1}|$, тоді із (17) і (18) дістанемо

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{b_l^{(r)}}{a_l^{(r)}} \right)^2 - \frac{c_l^{(r)}}{a_l^{(r)}} \right] = 0.$$

Якщо модулі коренів z_l , z_{l+1} або z_{l+2} , z_{l+3} будуть дуже близькими в (20), то корені z_{l+1} , z_{l+2} визначатимуться із (21) з пониженою точністю.

П р и к л а д.

$$f_0(z) = (-1,6 + 11,2i) + (65,52 - 50,64i)z + (-22,72 + 7,44i)z^2 + \\ + (18,7 + 0,5i)z^3 + z^4 = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4.$$

Знайдемо

$$g_0(z) = f'_0(z) \quad \text{і} \quad \varphi_0(z) = f''_0(z).$$

Позначимо формулу

$$u_m v_m + \sum_{i=1}^r (-1)^i (u_{m-i} v_{m+i} + u_{m+i} v_{m-i}), \quad (r = \min(m, n-m))$$

символом $(u_m v_m)'$ і складемо три послідовності функцій $\{f_v\}$, $\{g_v\}$, $\{\varphi_v\}$, обчислюючи коефіцієнти f_{v+1} , g_{v+1} , φ_{v+1} за допомогою коефіцієнтів функцій f_v , g_v , φ_v по формулах (див. [5], [11])

$$a_m^{(v+1)} = (a_m^{(v)} a_m^{(v)})'; \quad b_m^{(v+1)} = (a_m^{(v)} b_m^{(v)})';$$

$$c_m^{(v+1)} = \frac{1}{2} [(a_m^{(v)} c_m^{(v)})' + (b_m^{(v)} b_m^{(v)})'].$$

Дістанемо

$$f_1(z), f_2(z); g_1(z), g_2(z); \varphi_1(z), \varphi_2(z)$$

і

$$f_3(z) = (1,13273 \cdot 10^8 + 2,43366 \cdot 10^8 i) + (-7,07952 \cdot 10^{14} - 1,52103 \cdot 10^{15} i)z + \\ + (9,31907 \cdot 10^{12} + 5,94156 \cdot 10^{12} i)z^2 + (-2,56002 \cdot 10^{10} - 2,16390 \cdot 10^{12} i)z^3 + z^4 \\ g_3(z) = (6,46489 \cdot 10^8 - 1,85537 \cdot 10^9 i) + (2,48857 \cdot 10^{13} + 4,51052 \cdot 10^{14} i)z + \\ + (-2,74030 \cdot 10^{12} - 3,65601 \cdot 10^{12} i)z^2 + (-1,28000 \cdot 10^9 + 1,6 \cdot 10^2 i)z^3; \\ \varphi_3(z) = (-1,13382 \cdot 10^{10} + 5,74870 \cdot 10^9 i) + (5,64178 \cdot 10^{13} - 1,96856 \cdot 10^{14} i)z + \\ + (6,5549 \cdot 10^{11} - 1,32698 \cdot 10^{12} i)z^2 + (-5,60000 \cdot 10^7 + 3,65 \cdot 10 i)z^3.$$

Визначимо алгоритмом, вказаним в роботі [12], строгі нерівності між модулями коренів даного рівняння $f(z)=0$ і дістанемо

$$|z_1| < |z_2| = |z_3| < |z_4|.$$

Покладемо $l=0$, $m=1$ і $l=3$, $m=4$, тоді за формулою (19) можна написати

$$\begin{aligned} -z_1^{-1} &= \frac{b_0^{(3)}}{a_0^{(3)}} - \frac{b_1^{(3)}}{a_1^{(3)}} = (-5,25000 - 5,100002i) - \\ &\quad - (-0,25000 - 0,10000i) = -5 - 5i, \quad z_1 = 0,1 - 0,1i; \\ -z_4^{-1} &= \frac{b_3^{(3)}}{a_3^{(3)}} - \frac{b_4^{(3)}}{a_4^{(3)}} = (0,050000 - 0,000000i) - 0 = 0,05, \quad z_4 = -20. \end{aligned}$$

Зрештою, по формулах (20), (21), поклавши $l=1$ і $m=3$, знаходимо рівні за модулем корені z_2 і z_3 .

$$p = p_{1,3}^{(3)} = (-0,250000 - 0,100000i) - (0,050000 - 0,000000i) = -0,3 - 0,1i;$$

$$q = q_{1,3}^{(3)} = h_1^{(3)} - h_3^{(3)} = (0,0396875 - 0,0300000i) - (0,0003125) = -0,04 - 0,03i.$$

$$\frac{1}{2}(p^2 - 8q) = 0,2 + 0,15i; \quad k = 2^3 = 8;$$

$$u^2 + (-0,3 - 0,1i)u + (0,2 + 0,15i) = 0;$$

$$u_1 = z_2^{-1} = 0,3 - 0,4i, \quad u_2 = z_3^{-1} = 0,5i; \quad z_2 = 1,2 + 1,6i, \quad z_3 = -2i.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. G. Polya. Zeitschr. f. Math. u. Phys., vol. 63, 1914, 275—290.
2. І. В. Вітенько. Доп. АН УРСР, т. 9, № 1, 1963, стор. 9.
3. А. Н. Костовский. Материалы научно-технической конференции «Новые разработки в области вычислительной математики и вычислительной техники», К., Изд. ВЦ АН УССР, 1960, стр. 85.
4. А. Н. Костовский. Журнал вычисл. матем. и матем. физики, т. 1, № 2, 1961, стр. 346.
5. І. В. Вітенько, О. М. Костовський. Теоретична і прикладна математика, вип. II, 1962, стор. 31.
6. S. Brodetsky, G. Smeal. Proc. Cambridge Phil. Soc., vol. 22, 1924, 83.
7. D. Lehmer. Math. Tables and Othe Aids Comput., vol. 1, 1945, 377.
8. А. Н. Костовский. Успехи матем. наук, т. XVI, вып. 4 (100), 1961, стр. 202.
9. М. Я. Бартиш. Питання механіки і математики, вип. IX, 1962, стор. 16.
10. А. Н. Костовский. Журнал вычисл. матем. и матем. физики, т. I, № 4, 1961, стр. 719.
11. А. Н. Костовский. Докл. АН СССР, т. 131, № 4, 1960, стр. 738.
12. А. Н. Костовский. Докл. АН СССР, т. 147, № 2, 1962, стр. 287.

А. Н. КОСТОВСКИЙ

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ЛОБАЧЕВСКОГО—ГРЕФФЕ В МЕТОДАХ ЧИСЛЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ НУЛЕЙ ФУНКЦИИ

(резюме)

В данной работе вводится специальное преобразование полиномов, степенных рядов и рядов Лорана, названное автором произведением Лобачевского—Греффе. Это преобразование можно широко использовать в методах численного определения нулей аналитических функций. Предлагается новый метод определения нулей функций.

Стаття надійшла у видавництво в кінці 1962 р.

М. Д. МАРТИНЕНКО

ОСНОВНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ З «ЩІЛИНАМИ»

При розв'язуванні крайових задач для областей з «щілинами» методом інтегральних рівнянь є корисне використання багатозначних потенціалів. У поданій роботі на основі другої формули Гріна будуються багатозначні потенціали першої та другої крайової задачі теорії пружності і з їх допомогою основні крайові задачі теорії пружності зводяться до еквівалентних інтегральних рівнянь, розв'язність яких доводиться. При цьому для простоти розглядається випадок, коли область — весь тривимірний простір з розрізом вздовж незамкненої поверхні Ляпунова з гладкою межею.

1. При побудові багатозначних потенціалів ми користуємося просторами Рімана та функціями Гріна цих просторів. Рімановий простір може бути зображений так. Візьмемо n екземплярів звичайного простору та позначимо в них лінії галуження нашого потенціалу. Потім натягнемо між лініями галуження поверхні довільного вигляду і розріжемо кожний просторовий екземпляр вздовж цієї поверхні. Верхні та нижні частини розрізуючих поверхонь, що так виникають, склеїмо одна з одною аналогічно до того, як це робиться в теорії ріманових поверхонь, і одержимо n — листний простір Рімана. Функцією Гріна ріманового простору називається функція двох точок x і y з такими властивостями:

1) вона неперервна і обмежена всюди у просторі Рімана, за винятком точки $x=y$, де вона має вигляд $\frac{1}{|x-y|} + g(x, y)$, $g(x, y)$ обмежена при $x=y$, $|x-y|$ — віддаль між точками x, y ;

2) вона задовольняє рівняння Лапласа всюди у рімановому просторі, за винятком точки $x=y$ та лінії галуження;

3) вона стає нулем у безмежно далекій точці кожного просторового екземпляра.

А. Діксон [1] довів існування функції Гріна, яка задовольняє ці три умови.

Нехай S — незамкнена поверхня Ляпунова з гладкою межею Γ . Оберемо на поверхні S певний напрям нормалі і приймемо його за додатний напрям; позначимо відповідний орт його через v . Розглянемо подвійний рімановий простір з лінією галуження Γ і позначимо через $\omega(x, y)$ функцію Гріна цього простору. Позначимо через I звичайний тривимірний простір, а через II — простір, який «лежить» над ним у подвійному рімановому просторі; тоді весь наш подвійний рімановий простір є об'єднання $I \cup II$. Позначимо через (I) область у подвійному

рімановому просторі $I \cup II$, яка складається з простору I , обмеженого поверхнею $S_+ \cup S_-$ (тут через S_+ та S_- позначено ті сторони поверхні S , наближення до яких відбувається в напрямі додатньої та від'ємної нормалі відповідно). Аналогічно (II) — це простір II з межею $S_+ \cup S_-$.

2. Систему рівнянь рівноваги однорідного ізотропного пружного тіла у зміщеннях (систему Ламе) можна записати у вигляді

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \partial \partial' u = 0, \quad (1)$$

де λ, μ — пружні константи, Δ — оператор Лапласа,

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix}, \quad \partial = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

штрих означає транспонування.

Далі нам буде потрібне зображення П. Ф. Папковича загального розв'язку системи Ламе через чотири гармонічні функції. Виведемо його у формі, необхідній для наступного.

Зобразимо розв'язок системи Ламе у вигляді

$$u = \partial \Theta + \varphi, \quad (2)$$

де Θ задовольняє рівняння $\Delta \Theta = \partial' u$. Тоді $\partial' \varphi = 0$.

Підставляючи (2) у (1), одержимо

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \Delta \partial \Theta = 0.$$

Звідси випливає, що

$$u = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \partial \Theta + \eta, \quad (2^*)$$

де η задовольняє рівняння Лапласа. Застосовуючи оператор ∂' до обох частин (2*), одержимо

$$\Delta \Theta = -\frac{\lambda + \mu}{\mu} \Delta \Theta + \partial' \eta.$$

Тому

$$\Theta = \frac{\mu}{2(\lambda + 2\mu)} x' \eta - p, \quad (3)$$

де p є гармонічною функцією. Отже, підставляючи (3) у (2*), остаточно одержимо

$$u = \eta + \partial p - \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)} \partial (x' \eta).$$

Використовуючи зображення П. Ф. Папковича, побудуємо фундаментальну матрицю системи (1), однозначну у подвійному рімановому просторі з лінією галуження Γ ; вона буде мати вигляд

$$V(x, y) = \frac{\lambda + \mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \left\{ \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \omega(x, y) - \sum_{i=1}^3 e_i(x-y)' \frac{\partial \omega(x, y)}{\partial x_i} \right\} \quad (4)$$

Фундаментальна матриця нормована так, щоб розв'язок неоднорідної системи Ламе $\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \partial \partial' u = f$ в області D мав вигляд

$$u(x) = \int_D V(x, y) f(y) dy.$$

3. Розглянемо такі вирази:

$$\begin{cases} u_+(x) = \iint_S P(x, y_+) \mu_+(y) dy S, & u_-(x) = \iint_S P(x, y_-) \mu_-(y) dy S, \\ v_+(x) = \iint_S V(x, y_+) \mu_+(y) dy S, & v_-(x) = \iint_S V(x, y_-) \mu_-(y) dy S, \end{cases} \quad (5)$$

де

$$P(x, y) = B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x, y);$$

$$B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \sum_{k=1}^3 \{ \lambda v e'_k + \mu (v_k E + e_k v') \} \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad (6)$$

e_k — орт k -тої осі, $v = \sum_{k=1}^3 v_k e_k$. Через $P(x, y_+)$, $V(x, y_+)$ і $P(x, y_-)$,

$V(x, y_-)$ позначимо граничні значення $P(x, y)$, $V(x, y)$ при наближенні точки y з простору I до поверхні S по напрямку додатньої та від'ємної нормалі відповідно. Тому що функція $\omega(x, y)$ неперервна і обмежена всюди у просторі $I \cup II$ за винятком точки $x=y$, де вона має особливість

типу $\frac{1}{|x-y|}$, функції $u_+(x)$, $u_-(x)$; $v_+(x)$, $v_-(x)$ неперервні всюди у просторі

$I \cup II$, а при наближенні до поверхні S будуть мати місце такі рівності:

$$\begin{cases} [u_+(x)]_+^I = \frac{1}{2} \mu_+(x) + \iint_S P(x_+, y_+) \mu_+(y) dy S \\ [u_+(x)]_-^{II} = -\frac{1}{2} \mu_+(x) + \iint_S P(x_+, y_+) \mu_+(y) dy S \\ [u_+(x)]_-^I = [u_+(x)]_+^{II} = \iint_S P(x_-, y_+) \mu_+(y) dy S \\ [u_-(x)]_+^I = [u_-(x)]_-^{II} = \iint_S P(x_+, y_-) \mu_-(y) dy S \\ [u_-(x)]_-^I = -\frac{1}{2} \mu_-(x) + \iint_S P(x_-, y_-) \mu_-(y) dy S \\ [u_-(x)]_+^{II} = \frac{1}{2} \mu_-(x) + \iint_S P(x_-, y_-) \mu_-(y) dy S \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
\left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v_+(x) \right]_+^I &= -\frac{1}{2} \mu_+(x) + \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_+, y_+) \mu_+(y) d_y S \\
\left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v_+(x) \right]_-^{II} &= \frac{1}{2} \mu_+(x) + \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_+, y_+) \mu_+(y) d_y S \\
\left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v_+(x) \right]_-^I &= \left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v_+(x) \right]_+^{II} = \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_-, y_+) \mu_+(y) d_y S \\
\left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v_-(x) \right]_+^I &= \left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v_-(x) \right]_-^{II} = \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_+, y_-) \mu_-(y) d_y S \\
\left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v_-(x) \right]_-^I &= \frac{1}{2} \mu_-(x) + \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_-, y_-) \mu_-(y) d_y S \\
\left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v_-(x) \right]_+^{II} &= -\frac{1}{2} \mu_-(x) + \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_-, y_-) \mu_-(y) d_y S.
\end{aligned} \tag{3}$$

Тут ми через $[u_+(x)]_+^I$ позначили граничне значення $u_+(x)$ при наближенні точки x до поверхні S з простору I по напрямку додатньої нормалі і т. д. При виведенні цих формул треба враховувати специфіку ріманового простору, внаслідок якої

$$[\varphi(x, y_+)]_+^I = [\varphi(x, y_+)]_-^{II}, \quad [\varphi(x, y_+)]_-^I = [\varphi(x, y_+)]_+^{II} \text{ і т. д.}$$

Тому

$$\begin{aligned}
[v_+(x)]_+^I &= [v_+(x)]_-^{II}, & [v_+(x)]_-^I &= [v_+(x)]_+^{II}, \\
[v_-(x)]_+^I &= [v_-(x)]_-^{II}, & [v_-(x)]_-^I &= [v_-(x)]_+^{II}.
\end{aligned} \tag{9}$$

4. Розглянемо такі крайові задачі:

Задача I — визначити неперервний у всьому просторі I , двічі неперервно-диференційований у $I \setminus S$, розв'язок системи Ламе (1), що стає нулем у нескінченно віддаленій точці і приймає на даній незамкненій поверхні S задані значення f_+ і f_- при наближенні до поверхні S по напрямку додатньої та від'ємної нормалі відповідно.

Задача II — визначити неперервно-диференційований у всьому просторі I , двічі неперервно-диференційований у $I \setminus S$, розв'язок системи Ламе, що стає нулем у нескінченно віддаленій точці і задовольняє такі умови при наближенні до поверхні S в напрямі додатньої та від'ємної нормалі

$$\begin{aligned}
B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x) |_+ &= f_+(x), \\
B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x) |_- &= f_-(x).
\end{aligned} \tag{10}$$

Тут f_+ та f_- — неперервні функції, визначені на поверхні S , що співпадають на Γ .

Зобразимо розв'язок задачі I у вигляді

$$u(x) = \iint_S P(x, y_+) \mu_+(y) d_y S + \iint_S P(x, y_-) \mu_-(y) d_y S, \tag{11}$$

де μ_+ і μ_- — невідомі густини, для визначення яких дістанемо таку систему інтегральних рівнянь другого роду:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mu_+(x) + \iint_S P(x_+, y_+) \mu_+(y) d_y S + \iint_S P(x_+, y_-) \mu_-(y) d_y S = f_+(x) \\ -\frac{1}{2} \mu_-(x) + \iint_S P(x_-, y_+) \mu_+(y) d_y S + \iint_S P(x_-, y_-) \mu_-(y) d_y S = f_-(x). \end{cases} \quad (12)$$

Зобразимо розв'язок задачі II у вигляді

$$v(x) = \iint_S V(x, y_+) \mu_+(y) d_y S + \iint_S V(x, y_-) \mu_-(y) d_y S. \quad (13)$$

одержимо для невідомих густин таку систему інтегральних рівнянь:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \mu_+(x) + \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_+, y_+) \mu_+(y) d_y S + \\ \quad + \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_+, y_-) \mu_-(y) d_y S = f_+(x) \\ \frac{1}{2} \mu_-(x) + \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_-, y_+) \mu_+(y) d_y S + \\ \quad + \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_-, y_-) \mu_-(y) d_y S = f_-(x). \end{cases} \quad (14)$$

Зовсім аналогічно можна звести задачі I і II для області (II) до інтегральних рівнянь. При цьому виявляється, що задача I для області (I) спряжена задачі II для області II і т. д. Цим зауваженням ми скористаємося далі при дослідженні розв'язності системи (12).

Системи (12) і (14) являють собою системи сингулярних інтегральних рівнянь. Покажемо, що до цих систем застосовна теорія Фредгольма.

Розглянемо, наприклад, систему (12). Нехай $x \in S$. Введемо в точці x місцеву систему координат, направляючи вісь x_3 вздовж нормалі v , а вісі x_1, x_2 — у дотичній площині. Тоді у цій системі координат можна зобразити систему (12) у вигляді (після деяких перетворень)

$$\begin{aligned} \mu_1^+(x) - \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \iint_S \frac{y_1}{|x-y|^3} \mu_3^+(y) d_y S + T_1(\mu_+, \mu_-) &= 2f_1^+(x); \\ \mu_2^+(x) - \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \iint_S \frac{y_2}{|x-y|^3} \mu_3^+(y) d_y S + T_2(\mu_+, \mu_-) &= 2f_2^+(x); \\ \mu_3^+(x) + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \iint_S \frac{1}{|x-y|^3} [y_1 \mu_1^+(y) + y_2 \mu_2^+(y)] d_y S + T_3(\mu_+, \mu_-) &= 2f_3^+(x); \\ \mu_1^-(x) + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \iint_S \frac{y_1}{|x-y|^3} \mu_3^-(y) d_y S + T_4(\mu_+, \mu_-) &= -2f_1^-(x); \end{aligned}$$

$$\mu_2^-(x) + \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} \iint_S \frac{y_2}{|x-y|^3} \mu_3^-(y) dy S + T_5(\mu_+, \mu_-) = -2f_2^-(x);$$

$$\mu_3^-(x) - \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} \iint_S \frac{1}{|x-y|^3} [y_1 \mu_1^-(y) + y_2 \mu_2^-(y)] dy S + T_6(\mu_+, \mu_-) = -2f_3^-(x),$$

де $\mu_{\pm} = \sum_{k=1}^3 \mu_k^{\pm} e_k$, T_k — деякі інтегральні оператори з слабкою особливістю. Через те, що $\frac{y_l}{|x-y|^3}$ має особливість типу $\frac{1}{|x-y|^3}$, тому характеристики сингулярних інтегралів, що входять сюди, є $\frac{y_1}{|x-y|} = \cos \Theta$, $\frac{y_2}{|x-y|} = \sin \Theta$; символи таких інтегралів одержуються з характеристик множенням на $2\pi i$. Позначаючи для скорочення $\delta = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}$, одержимо, що символічний визначник останньої системи дорівнює

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -i\delta \cos \Theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i\delta \sin \Theta & 0 & 0 & 0 \\ i\delta \cos \Theta & i\delta \sin \Theta & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & i\delta \cos \Theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & i\delta \sin \Theta \\ 0 & 0 & 0 & -i\delta \cos \Theta & -i\delta \sin \Theta & 1 \end{vmatrix} = (1-\delta^2)^2,$$

що відмінно від нуля при $\delta \neq 1$. Аналогічний висновок має місце і для системи (14). Звідси випливає, що індекс систем (12), (14) дорівнює нулю, і для них вірні теореми Фредгольма.

5. З усього вищесказаного випливає, що для дослідження розв'язності систем (12), (14) нам досить дослідити розв'язність наступної системи, яка при $\lambda = -1$ відповідає задачі II для області (I) з нульовими граничними умовами, а при $\lambda = 1$ — задачі II для області (II) з нульовими граничними умовами:

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{2} \mu_+(x) + \lambda \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_+, y_+) \mu_+(y) dy S + \\ + \lambda \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_+, y_-) \mu_-(y) dy S = 0; \\ \frac{1}{2} \mu_-(x) + \lambda \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_-, y_+) \mu_+(y) dy S + \\ + \lambda \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_-, y_-) \mu_-(y) dy S = 0. \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Перепишемо цю систему в іншому вигляді, скориставшись формулами (8), (13):

$$\left\{ \begin{aligned} (1+\lambda) \left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_-^{II} - (1-\lambda) \left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_+^I &= 0; \\ (1+\lambda) \left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_+^{II} - (1-\lambda) \left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_-^I &= 0. \end{aligned} \right. \quad (15^*)$$

Запишемо аналог першої формули Гріна для рівнянь Ламе для області (I) і для області (II):

$$\begin{aligned} \iint \{u, v\}_I dx &= - \iint_S \left[u'(x) B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_+^I d_x S + \\ &\quad + \iint_S \left[u'(x) B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_-^I d_x S; \\ \iint \{u, v\}_{II} dx &= - \iint_S \left[u'(x) B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_+^{II} d_x S + \\ &\quad + \iint_S \left[u'(x) B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_-^{II} d_x S, \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} \{u, v\} &= 2\mu \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \lambda \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \\ &+ \frac{1}{2} \mu \sum_{k \neq j=1}^3 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=1}^3 u_k \left[\mu \Delta v_k + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) \right]. \end{aligned}$$

Якщо $u=v$ і v задовольняє систему Ламе, то $\{u, u\} > 0$.

З формул (16) випливає, що, якщо

$$\left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_+^{I, II} = \left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_-^{I, II} = 0,$$

то $v(x) = \text{const}$. Але з того, що в нескінченно віддаленій точці $v(x)$ стає нулем, випливає, що $v(x) = 0$ всюди у $I \cup II$. Звідси випливає, що $\mu_+(x) = \mu_-(x) = 0$. Насправді, з $v(x) \equiv 0$ випливає $B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \equiv 0$. Спрямовуючи точку x до поверхні S , дістанемо

$$\begin{aligned} \left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_+^I &= -\frac{1}{2} \mu_+(x) + \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_+, y_+) \mu_+(y) d_y S + \\ &\quad + \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_+, y_-) \mu_-(y) d_y S = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_-^{II} &= \frac{1}{2} \mu_+(x) + \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_+, y_+) \mu_+(y) d_y S + \\ &\quad + \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_+, y_-) \mu_-(y) d_y S = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_-^I &= \frac{1}{2} \mu_-(x) + \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_-, y_+) \mu_+(y) d_y S + \\ &\quad + \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_-, y_-) \mu_-(y) d_y S = 0; \end{aligned}$$

$$\left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_+^{\text{II}} = -\frac{1}{2} \mu_-(x) + \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_-, y_+) \mu_+(y) d_y S + \\ + \iint_S B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) V(x_-, y_-) \mu_-(y) d_y S = 0.$$

Звідси

$$\mu_+(x) = \left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_-^{\text{II}} - \left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_+^{\text{I}} = 0; \\ \mu_-(x) = \left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_-^{\text{I}} - \left[B^{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right]_+^{\text{II}} = 0,$$

тобто

$$\mu_+(x) = \mu_-(x) = 0.$$

Перейдемо до дослідження власних чисел системи (15).

1) Власні числа можуть бути тільки дійсними.

Нехай $\lambda = \alpha + i\beta$ — власне число, йому відповідає власна функція $v_0 = v_0^{(1)} + i v_0^{(2)}$. Записуючи формули (16) для $v = v_0$, $u = \bar{v}_0$; $v = \bar{v}_0$, $u = v_0$ і беручи до уваги (9) — (15*), ми прийдемо до такого:

$$(1+\lambda) \iint_{\Sigma} \{ \bar{v}_0, v_0 \}_{\text{II}} dx + (1-\lambda) \iint_{\Sigma} \{ \bar{v}_0, v_0 \}_I dx = 0; \\ (1+\bar{\lambda}) \iint_{\Sigma} \{ v_0, \bar{v}_0 \}_{\text{II}} dx + (1-\bar{\lambda}) \iint_{\Sigma} \{ v_0, \bar{v}_0 \}_I dx = 0.$$

Видокремлюючи дійсну та уявну частини, дістанемо

$$(1+\alpha) \iint_{\Sigma} [\{ v_0^{(1)}, v_0^{(1)} \}_{\text{II}} + \{ v_0^{(2)}, v_0^{(2)} \}_{\text{II}}] dx + \\ + (1-\alpha) \iint_{\Sigma} [\{ v_0^{(1)}, v_0^{(1)} \}_I + \{ v_0^{(2)}, v_0^{(2)} \}_I] dx = 0; \\ \beta \iint_{\Sigma} [\{ v_0^{(1)}, v_0^{(1)} \}_{\text{II}} + \{ v_0^{(2)}, v_0^{(2)} \}_{\text{II}}] dx - \\ - \beta \iint_{\Sigma} [\{ v_0^{(1)}, v_0^{(1)} \}_I + \{ v_0^{(2)}, v_0^{(2)} \}_I] dx = 0.$$

Через те, що $\{ v_0^{(1)}, v_0^{(1)} \}$, $\{ v_0^{(2)}, v_0^{(2)} \}$ додатньо означені форми, то, розглядаючи цю систему як алгебраїчну відносно інтегралів, бачимо, що ці інтеграли можуть набирати тільки нульових значень, тому що визначник системи дорівнює

$$\begin{vmatrix} 1+\alpha & 1-\alpha \\ \beta & -\beta \end{vmatrix} = -2\beta \neq 0.$$

Отже, $\beta = 0$, бо в противному разі $v_0^{(1)} = v_0^{(2)} = 0$ і $\lambda = \alpha + \beta i$ не є власне значення.

2) Власні числа не можуть набирати значень між -1 та $+1$.
Через те, що власні числа дійсні, має місце рівність

$$(1+\lambda) \iiint \{v, v\}_{II} dx + (1-\lambda) \iiint \{v, v\}_I dx = 0.$$

Припускаючи, що $-1 < \lambda < +1$, дістанемо супротивність, тому що об'ємні інтеграли мають однакові знаки і тому приходимо до $v=0$.

3) $\lambda = -1$ та $\lambda = +1$ не є власними числами.

Це твердження випливає з вище написаної формули, до якої приходимо, припускаючи супротивне.

З цього дослідження на основі відомого результату в теорії інтегральних рівнянь випливає розв'язність систем (12), (14) методом послідовних наближень.

6. На закінчення відзначимо, що функції Гріна ріманових просторів побудовані для випадку, коли лінією галуження є пряма, А. Зоммерфельдом, та коли лінією галуження є коло — Е. Гобсоном та З. Нейшtedтером.

Міркування у цій статті для простоти велись для випадку, коли розглядувана область — весь тривимірний простір з одним розрізом вздовж незамкненої поверхні типу Ляпунова, обмеженої гладкою кривою. Застосований метод дозволяє розглядати області більш складних конфігурацій.

ЛІТЕРАТУРА

1. A. C. Dixon. Proceedings of the London Mathematical Society, Serie 2, vol. 1, 1903—1904.
2. С. Г. Михлин. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1963.

М. Д. МАРТЫНЕНКО

ОСНОВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ СО «ЩЕЛЯМИ»

(резюме)

При решении краевых задач для областей со «щелями» методом интегральных уравнений удобно пользоваться многозначными потенциалами. В данной работе на основе второй формулы Грина строятся многозначные потенциалы первой и второй краевых задач теории упругости и с их помощью основные краевые задачи теории упругости приводятся к эквивалентным интегральным уравнениям, разрешимость которых доказывается. При этом для простоты рассматривается случай, когда область — все трехмерное пространство с разрезом вдоль незамкнутой поверхности типа Ляпунова, ограниченной гладкой кривой.

В. Ф. РОГАЧЕНКО

ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ В НЕЕВКЛІДОВИХ ПРОСТОРАХ *

Теорія геометричних побудов в неевклідових просторах, так само як і в евклідовому, не належить тепер до числа основних розділів сучасної геометрії. Однак ця теорія, яка виникла на основі робіт нашого великого геометра М. І. Лобачевського, привертала і продовжує привертати увагу вчених, особливо радянських. Саме радянські вчені здійснили в цій галузі численні і найбільш важливі дослідження, які привели до створення досить повної і стрункої теорії геометричних побудов в гіперболічній площині, яка навряд чи поступається своєю завершеністю класичній теорії геометричних побудов в евклідовій площині.

В розвитку теорії геометричних побудов в площині Лобачевського можна виділити три періоди:

перший період — від відкриття неевклідової геометрії Лобачевського до її загального визнання, тобто до 70-х років XIX ст.;

другий період — 70-і роки — кінець десятих років нашого століття;

третій період — від початку 20-х років нашого століття.

Перший період. Сам М. І. Лобачевський в своїх творах не давав прикладів безпосереднього розв'язку конструктивних задач. Проте ряд відкриттів Лобачевського відіграв першорядну роль у дослідженні і обґрунтуванні геометричних побудов. До їх числа належать в першу чергу: дослідження взаємного розміщення прямих на площині, властивостей паралельних і розбіжних прямих, властивостей орициклу і, особливо, встановлення залежності між елементами прямокутного трикутника і спряженого з ним трипрямокутника, а також вся неевклідова тригонометрія взагалі.

Саме тому роль Лобачевського в підготовці створення геометричних побудов в неевклідовій площині ні в якому разі не слід недооцінювати. Крім того, цілком ймовірно, що Лобачевський володів розв'язками основних задач, в усякому разі побудовою паралелі, що впливає з встановленої ним залежності між трипрямокутником і прямокутним трикутником.

Початок дослідженням у галузі розв'язування конкретних конструктивних задач поклав Я. Больяї, який в своєму «Апендіксі» [2] звернув увагу на розв'язування основних задач на побудову, зв'язаних з постулатом паралельності. Найбільш цікавим результатом Больяї було встановлення ним можливості (при деяких умовах) квадратури

* Ця стаття є скороченим викладом огляду, прочитаного на I-й Всесоюзній геометричній конференції в Києві (травень—червень 1962 р.).

круга в неевклідовій площині за допомогою циркуля і лінійки. У зв'язку з цією задачею Больяї зробив для одного частинного випадку побудову прямокутного трикутника за двома гострими кутами.

Велика заслуга Больяї полягає в тому, що він поставив питання про розв'язування конкретних конструктивних задач і показав шляхи до їх розв'язку. Це тим більш цікаво, що ні Лобачевський, ні Больяї ще не знали конкретних реалізацій неевклідової геометрії.

Другий період. На початку цього періоду зусилля дослідників — Жерара [6], Сімона [5, 25, 35, 36], Енгеля [9, 10, 11], Барбарена [13], Лібмана [22, 23, 24, 31, 32], Гільберта [17], Пунда [29] і інших були спрямовані головним чином на здійснення і строге обґрунтування розв'язку за допомогою циркуля і лінійки чотирьох основних задач — побудови паралелі, відрізка і кута паралельності і спільного перпендикуляра двох розбіжних прямих. Для виконання цих побудов більшістю дослідників була використана встановлена Лобачевським залежність між прямокутним трикутником і спряженим з ним трипрямокутником. Розв'язувались також задачі на побудову трикутників, зокрема, Лібману [15] належить перший розв'язок задачі про побудову трикутника за трьома кутами.

Сімоном [5, 7, 35, 41] і Лібманом [23] розв'язувались також задачі, які належать до різних модифікацій кола — побудова дотичних, визначення точок перетину цих ліній з прямою і одна з другою.

Нарешті, з'являються перші роботи [18, 27, 25, 28, 39], які присвячені дослідженню питання про розв'язність лінійкою і циркулем деяких задач: про поділ відрізка і кута на рівні частини, про квадратуру круга і циркулятуру квадрата.

Найбільш цікавими роботами цього періоду є ті, в яких для дослідження побудов в площині Лобачевського застосовуються засоби проективної геометрії, зокрема проективна інтерпретація цієї площини. Першою в цьому напрямі була робота професора Московського університету О. К. Власова [14], в якій на основі розвиненої ним теорії лінійних систем конічних перерізів був знайдений розв'язок декількох конструктивних задач, зв'язаних з колом, еквідистантою і орициклом.

Потім з'являються праці Гросмана [20, 21, 30, 33] і Кубота [34], в яких використовуються моделі Клейна гіперболічної площини. Зокрема, вони показали розв'язність задач 2-го степеня за допомогою однієї лінійки, якщо в площині задані деякі допоміжні фігури, тобто для площини Лобачевського була розв'язана задача, яку Штейнер розв'язав для евклідової площини.

Найбільш цікавою і багатою результатами є велика робота Фреда [37], в якій на основі моделі Клейна, крім конкретних задач, в тому числі чотирьох основних, був розглянутий ряд таких загальних питань, як критерій розв'язності задач 2-го степеня і побудови обмеженими засобами. Однак результати Фреда залишились непоміченими і не мали ніякого впливу на дальший розвиток теорії.

Третій період з повним правом можна назвати радянським періодом, тому що роботи радянських вчених як за кількістю, так і за їх значенням значно переважають над роботами іноземних вчених, яким належить менш як 20% публікацій, що присвячені теорії геометричних побудов в площині Лобачевського. Слід мати на увазі, що на останні 40 років припадає дві третини всіх досліджень, причому половина з цього числа — це публікації після 1945 року. Як бачимо, інтерес до цих питань не тільки не зменшився, а навпаки, значно зріс. Інтерес у дослідженнях перемістився від розв'язку частинних конструк-

тивних задач і обґрунтування основних побудов до вивчення загальних питань теорії.

Першими радянськими роботами, які поклали початок дослідженням в цьому напрямі, були статті Д. Д. Мордухай-Болтовського [40, 42, 46]. Особливо велике значення має його друга робота, в якій були закладені основи загальної теорії геометричних побудов в площині Лобачевського, зокрема, був розроблений загальний метод застосування гіперболічної тригонометрії до розв'язування конструктивних задач і також були знайдені достатні умови розв'язності всякої конструктивної задачі 2-го степеня. В роботі [46] показано, що ці умови разом з тим є і необхідними. Ці роботи стимулювали розвиток теорії і в значній мірі визначили характер і напрям дальших досліджень.

Сказане стосується передусім учня Мордухай-Болтовського — Н. М. Несторовича, який в ряді робіт (1937—1955 рр.) досліджував конструктивну потужність основних комплексів інструментів, які використовуються для розв'язування задач на площині Лобачевського.

З 1945 р. почали з'являтися численні роботи О. С. Смогоржевського і інших дослідників, які здебільшого є його учнями або учнями Мордухай-Болтовського і Несторовича. В цих роботах післявоєнних років досліджувались як загальні питання теорії, так і розв'язувались численні конкретні задачі.

Перш ніж говорити про основні результати, коротко торкнемося того, як в теперішній час ставиться питання про розв'язок конструктивної задачі на площині Лобачевського і які інструменти використовуються для розв'язання такої задачі.

Як і в евклідовій площині, задача на побудову в площині Лобачевського полягає в тому, щоб побудувати за допомогою даних інструментів деяку фігуру, якщо дана деяка інша фігура і вказані деякі співвідношення між елементами даної і шуканої фігур.

При цьому можливі два різні підходи для здійснення побудови.

I. Побудова мислиться здійсненою в площині Лобачевського. В цьому випадку описання побудови полягає в перерахуванні найпростіших конструктивних операцій, які повинні бути виконані в площині Лобачевського, для того щоб вона була здійснена. При цьому для більшої наочності і з'ясування взаємного розміщення даної і шуканої фігур, а також ліній, які проводяться в процесі розв'язування задачі, часто виконують на площині рисунка (звичайно евклідовий!) деяку умовну фігуру так, що прямі і кола Лобачевського зображаються звичайними прямими і колами, орицикли і еквідистанти деякими кривими лініями і т. д.

II. Побудова спочатку здійснюється на одній із моделей площини Лобачевського (Пуанкаре або Бельтрамі-Клейна). В цьому випадку побудова виконується або евклідовою лінійкою, або евклідовим циркулем, або обома цими інструментами, але з певними обмеженнями, в залежності від того, якою моделлю і якими інструментами в просторі ми користуємося. Після того, за допомогою відповідного словника, описання побудови, виконаної на моделі, легко перевести в описання побудови, яку ми виконуємо в площині Лобачевського.

Оскільки в площині Евкліда є тільки два види ліній постійної кривини — пряма і коло, то, відповідно до цього, маємо два основні інструменти — лінійку і циркуль, за допомогою яких викреслюються ці лінії. В площині ж Лобачевського, як відомо, є чотири види ліній постійної кривини — прямі і три модифікації кола — власне коло, орицикл і еквідистанта. Відповідно до цього можна говорити про чотири основні креслярські інструменти в просторі Лобачевського — лі-

нійку, циркуль, орициркуль і гіперциркуль, за допомогою яких мислиться проведення відповідних чотирьох ліній в площині Лобачевського і які зображаються у вигляді деяких матеріально здійснених приборів. Так само як і в Евклідовій геометрії, використання кожного з цих інструментів як засобу для розв'язування конструктивних задач визначається відповідними постулатами.

У своїх роботах Д. Д. Мордухай-Болтовський вважав необхідним користуватися при розв'язуванні задач 2-го степеня комплексом трьох інструментів — лінійкою, циркулем і гіперциркулем. Однак пізніше виявилось, що в тих випадках, коли деякі задачі розв'язувалися за допомогою всіх чотирьох інструментів, вдавалося знаходити розв'язок, правда більш складний, тільки лінійкою і циркулем.

Тому, природньо, виникло питання: чи не є взагалі гіперциркуль і орициркуль зайвими інструментами, тобто чи не можна обійтись використанням лише лінійки і циркуля у всіх тих випадках, коли при розв'язуванні задач проводяться прямі і всі три модифікації кола?

Позитивну відповідь на це питання дав Н. М. Несторович [53, 54, 58], показавши, що комплекс інструментів «лінійка—циркуль» достатній для розв'язування будь-якої конструктивної задачі 2-го степеня, а використання гіперциркуля і орициркуля лише спрощує розв'язки деяких з них. Пізніше В. Ф. Каган [71] і М. В. Гіршович [67, 88] ці ж результати одержали, виходячи з інших міркувань.

Після цього виникло питання про можливість заміни циркуля гіперциркулем або орициркулем при розв'язуванні задач 2-го степеня. І на це питання була дана позитивна відповідь незалежно і одночасно О. С. Смогоржевським [68], Н. М. Несторовичем [72, 73, 74] і, частково, Н. П. Хоменко [70]. Виявилось, що лінійка і гіперциркуль, а також лінійка і орициркуль достатні для розв'язування цих задач. Більше того, О. С. Смогоржевським показано, що будь-яку задачу 2-го степеня можна розв'язати лінійкою і гіперциркулем з фіксованою дистанцією, який можна уявляти у вигляді двобортної лінійки, одно ребро якої має дугу еквідистанти, а друге — пряму, яка є базою еквідистанти. При переході до простору Евкліда гіперциркуль з фіксованою дистанцією перетвориться в звичайну лінійку, достатню, як відомо, для розв'язування задач 2-го степеня в площині Евкліда.

Якщо врахувати й те, що, як показав Р. І. Кіріщів [95], для розв'язання задач 2-го степеня в площині Лобачевського, як і в площині Евкліда, достатньо використовувати лінійку і циркуль постійного розхилу, то на основі вказаних вище результатів, а також розглядаючи орицикл і еквідистанту як кола з нескінченно віддаленим або ідеальним центром, приходимо до такого загального твердження.

Для розв'язування будь-якої конструктивної задачі 2-го степеня в площині Лобачевського достатньо використовувати інструменти, за допомогою яких можна креслити прямі і яку-небудь з трьох модифікацій кола будь-якого фіксованого радіуса.

При переході від площини Лобачевського до площини Евкліда це загальне твердження природним чином приводить до відомих тверджень про те, що в площині Евкліда для розв'язування задач 2-го степеня достатньо використовувати лінійку і циркуль постійного розхилу або косинець або двобортну лінійку.

Правда, для випадку орициркуля, який в евклідовій площині перетворюється в косинець, справа ускладнюється тим, що, як відзначив А. І. Костюк [118], доводиться вводити ще один постулат, який збільшує потужність косинця.

В усякому випадку, одержуємо цікаву відповідність між результатами, які торкаються конструктивної потужності різних інструментів при побудовах в площині Лобачевського і в площині Евкліда. Цю ж відповідність одержуємо і при розгляді побудов в площині Лобачевського, аналогічних побудовам Штейнера і Маскероні.

О. С. Смогоржевський [68, 75], Н. П. Хоменко [76, 82], Р. І. Демаховська [87] піддали систематичному вивченню всі найбільш цікаві допоміжні фігури, за допомогою яких, користуючись лише однією лінійкою, можна розв'язувати будь-яку конструктивну задачу 2-го степеня, тобто виконати в площині Лобачевського побудови, аналогічні штейнеровським побудовам в евклідовій площині. Ці допоміжні фігури повинні бути обрані так, щоб вони визначали п'ять точок абсолютної площини Лобачевського і дозволяли за допомогою лінійки знаходити точки перетину довільної прямої з абсолютним. До числа таких фігур відносяться, наприклад, пара паралельних прямих разом з колом і його центром, або з орициклом і його віссю, або з еквідистантою і її базисом; два кола, або два орицикла, або дві еквідистанти, і, відповідно, центр, вісь або базис одної з них і т. д. Деякі з цих результатів були знову перевідкриті канадським математиком Ф. Хандестом [99].

Пізніше Л. І. Мозгова [98] і А. І. Костюк [110] розглянули деякі інші допоміжні фігури і, зокрема, показали, що досить задавати в цих допоміжних фігурах не всю лінію постійної кривини, а лише її скінченну дугу.

Розглядаючи аналог побудов Маскероні, О. С. Смогоржевський показав [67], що будь-яку конструктивну задачу 2-го степеня можна розв'язати без допомоги лінійки, якщо одночасно використовувати циркуль, орицикуль і гіперцикуль. При цьому ним істотно було використано перетворення інверсії в площині Лобачевського.

Пізніше В. Ф. Рогаченко [85, 86] показав, що досить використовувати або циркуль разом з гіперцикулем, або орицикуль разом з гіперцикулем. При цьому в обох випадках вдалося звільнитися від використання перетворення інверсії, що значно спростило розв'язування задач. Потім К. К. Мокрищев [84, 92, 94] наклав на побудови без допомоги лінійки ще більші обмеження, показавши, що достатньо використовувати або один лише гіперцикуль, або один лише орицикуль.

В останні роки детально вивчалось також питання про конструктивну потужність деяких інших інструментів. Так, розглядалися різні види лінійки: двобортна лінійка з паралельними краями і відміченою на одному з них довільною точкою (К. К. Мокрищев [94], Ф. Хандест [99]), двобортна лінійка з розбіжними краями і відміченою на одному з них довільною точкою (Р. І. Кіріщів [101, 115]), однобортна лінійка з жорстко скріпленою з нею точкою (шаблон, Р. І. Кіріщів [103]). Виявилось, що кожний з цих інструментів достатній для розв'язання всякої задачі 2-го степеня.

Те ж саме показав А. І. Костюк [110] відносно косинця з перпендикулярними сторонами, а Р. І. Кіріщів [113], крім того, — відносно косинця, сторони якого утворюють довільний кут, — гострий або тупий.

Таким чином, були одержані результати, аналогічні відомому твердженню Адлера про побудови в площині Евкліда за допомогою кута. Розуміється, використання кожного з вищезгаданих інструментів обґрунтовується за допомогою відповідних постулатів.

Відзначимо ще цікаві дослідження М. Н. Гафурова [106], який показав еквівалентність двох комплексів інструментів: лінійка — еталон довжини і лінійка-бісектор. Кожний з цих комплексів недостатній,

однак для розв'язування задач 2-го степеня. Якщо ж в площині побудови задати ще додатково пару паралельних прямих, то кожен з цих двох комплексів стає достатнім для розв'язування всякої задачі 2-го степеня.

В більшості вказаних вище робіт дослідження конструктивної потужності тих або інших інструментів базується на таких загальних міркуваннях.

В площині Лобачевського всяка конструктивна задача 2-го степеня розв'язувана за допомогою циркуля і лінійки, тобто, кінець кінцем, вона зводиться до розв'язування трьох задач, які одержали назву головних:

1) знайти точку перетину двох прямих, заданих відповідними парами точок;

2) знайти точки перетину даної прямої і кола, центр і радіус якого дані;

3) знайти точки перетину двох кіл, центри і радіуси яких дані.

За допомогою циркуля і лінійки головні задачі розв'язуються безпосередньо. Якщо ж розглядається інший комплекс інструментів, то для доведення розв'язності задач 2-го степеня з його допомогою досить показати, що цими інструментами можна розв'язати три головні задачі. Розв'язування ж трьох головних задач базується на попередньому розв'язуванні декількох допоміжних задач, список, порядок і метод розв'язування яких залежить, розуміється, від використаного комплексу інструментів. До числа цих допоміжних задач належать штейнеровські елементарні побудови (поділ і подвоєння відрізків і кутів, проведення перпендикулярів) і чотири основні задачі в площині Лобачевського, зв'язані з особливостями теорії паралельності в ній.

Зокрема, якщо в даний комплекс інструментів входить однобортна лінійка, то, як показав Р. І. Кіріщів [122], кількість цих допоміжних задач може бути зведена до двох.

Поряд з загальними дослідженнями про конструктивну потужність різних інструментів проводилось також аналітичне дослідження розв'язності циркулем і лінійкою окремих задач: про поділ відрізка на довільне число частин (А. В. Космаков [60]), про квадратуру круга і циркулятуру квадрата (Н. М. Несторович [65, 79], О. С. Смогоржевський [81]), про поділ кола на довільне число частин, трисекцію кута, відрізка, трикутника (М. В. Гіршович [88], К. К. Мокрищев [93], Л. І. Мозгова [97]).

У процесі розв'язування великої кількості різноманітних конструктивних задач застосовувались різні методи. З'явилась необхідність узагальнити і систематизувати нагромаджений матеріал, сформулювати основні принципи, які лежать в основі того чи іншого методу і, таким чином, намітити в теорії геометричних побудов на площині Лобачевського спеціальний розділ, який присвячений методам розв'язування конструктивних задач. В значній мірі розв'язування цієї задачі було просунуто в відомих монографіях Н. М. Несторовича [80] і О. С. Смогоржевського [81].

Потрібно, однак, вказати на необхідність продовження роботи, яка стосується загального дослідження методів розв'язування конструктивних задач.

Відзначимо, що Н. М. Несторович і О. С. Смогоржевський розробили і широко застосовували методи порівняльної геометрографічної оцінки простоти розв'язування конструктивних задач різними комплексами інструментів. Ці методи використовувались і іншими дослідниками. Зокрема, було з'ясовано, що з трьох модифікацій циркуля звичайний

циркуль — найбільш зручний інструмент, користування яким значно знижує коефіцієнт простоти побудови.

Таким чином, на третьому етапі розвитку теорії геометричних побудов в площині Лобачевського велика увага була приділена дослідженню загальних питань теорії. Однак одночасно з цим проводилось також розв'язування різноманітних конкретних задач, кількість яких значно перевищує кількість задач, які розв'язувалися на попередніх етапах.

Незважаючи на велику і, здавалось би, вичерпну роботу, проведenu раніше по розв'язуванню чотирьох основних задач (побудови паралелі, відрізка і кута паралельності і спільного перпендикуляра двох розбіжних прямих), О. С. Смогоржевському [63, 68, 81] вдалося одержати і обґрунтувати нові, простіші розв'язки цих задач. Він же дав кілька нових і більш простих побудов трикутника за трьома кутами, а також за деякими іншими даними.

Н. М. Несторович [80] розглянув ряд неосновних випадків побудови трикутників, заданих різними елементами, а також розглянув задачі, які стосуються перетворення трикутників і многокутників у рівновеликі їм трикутники. Він же провів детальне дослідження і дав побудову різних модифікацій прямокутного і косокутного трикутників, в яких одна, дві або всі три вершини стають ідеальними, а також дав їх застосування до розв'язування різних конструктивних задач.

Відмітимо ще задачу про побудову правильних n -кутників, яка має розв'язок в площині Лобачевського при тих же n , що і в евклідовій площині, але істотно іншими методами. Барбарен [45] вказав побудову для $n=5, 6, 10, 15$. О. С. Смогоржевський [66] розв'язав задачу побудови правильного 17-кутника, а В. І. Коба — ще більш складну задачу про побудову правильного 257-кутника.

З робіт іноземних вчених слід вказати на роботу іракських математиків Аль-Джахіра і Шекури [109], яка присвячена розв'язуванню задач на побудову дотичних до кіл і орициклів при різних додаткових умовах.

Нарешті, Р. Г. Диманов [96, 114, 121] розглянув всі випадки розв'язків задачі Аполонія про побудову кола, яке дотикається трьох даних кіл, і просторовий аналог цієї задачі.

Таким чином, за останні десятиріччя була проведена велика кількість цікавих досліджень, зв'язаних з дальшою розробкою класичної спадщини М. І. Лобачевського, і був створений великий розділ не-евклідової геометрії Лобачевського, який містив як численні результати загального характеру, так і велику кількість розв'язків конкретних задач, кожна з яких розкриває все нові і нові властивості гіперболічного простору.

В результаті цього стала можливою поява окремих монографій, які були спеціально присвячені теорії геометричних побудов в площині Лобачевського. Майже одночасно з'явилися дві монографії — О. С. Смогоржевського [75, 81] і Н. М. Несторовича [80]. В курси основ геометрії О. С. Смогоржевського [63, 91] і В. Ф. Кагана [71] включаються окремі розділи, які містять виклад основ теорії геометричних побудов в гіперболічній площині.

Значно менше приділялось уваги вивченню питань, зв'язаних з геометричними побудовами у двовимірній еліптичній геометрії як у формі власне еліптичної геометрії, так і у більш наочній формі сферичної геометрії. Можна відзначити лише кілька робіт з цього питання.

В згаданій вже роботі Є. Фреда [37] одночасно з дослідженням геометричних побудов в площині Лобачевського проведено дослідження деяких загальних питань і для побудов в еліптичній площині: необхідні і достатні умови розв'язності конструктивних задач циркулем і лінійкою і використання цих умов при дослідженні розв'язності ряду конкретних задач.

Д. Д. Мордухай-Болтовський [47], розглядаючи побудови на сфері, показав, що всяка конструктивна задача 2-го степеня може бути розв'язана за допомогою двох приладів, один з яких викреслює «сферичні прямі», тобто великі кола сфери (за термінологією Д. Д. Мордухай-Болтовського, циркуль I, який мислиться як циркуль постійного сферичного розхилу, рівного $\frac{\pi}{2}$), а другий викреслює малі кола сфери (циркуль II — циркуль змінного розхилу, меншого як $\frac{\pi}{2}$). Далі він

показав, що ті ж задачі розв'язуються за допомогою одного лише циркуля I, якщо дано мале коло з центром, або навіть його дуга з центром. Таким чином, він показав можливість штейнеровських побудов на сфері.

Н. М. Несторович [57] вказує, що інструмент, який викреслює «сферичні прямі», можна уявляти не у вигляді циркуля I, а у вигляді сферичної лінійки, яка накладається на сферу по її великому колу. При такому підході уявлення про звичайну евклідову лінійку більш природньо переноситься на побудови на сфері або в еліптичній площині, оскільки операції з такою лінійкою визначаються, по суті, тими ж постулатами, що і в евклідовій площині. Н. М. Несторович розглянув різні випадки побудови трикутників в еліптичній площині за допомогою такої лінійки і циркуля II.

Побудови на сфері також розглядав Л. Бібербах в своїй монографії [83, §§ 29 і 30]. Тут він, спираючись на результати [12, 48, 52], розглянув побудови за допомогою циркуля і сферичної лінійки, а також за допомогою одного лише циркуля. А. Лебег [78] також розглядав побудови на сфері за допомогою циркуля і лінійки.

Нарешті, відзначимо ще роботи А. І. Костюка [111, 120], присвячені геометричним побудовам в еліптичній площині, в яких показана розв'язність задач 2-го степеня за допомогою еліптичних циркуля і лінійки. Крім того, показана достатність одної тільки лінійки для розв'язування таких задач, якщо в площині накреслені деякі допоміжні фігури. Показується також достатність рухомого прямого кута для розв'язності задач 2-го степеня. Ці ж результати без труднощів переносяться на випадок побудов на сфері.

Вказаними роботами, по суті, вичерпуються дослідження побудов в еліптичній площині і на сфері.

Таким чином, залишається ще багато недосліджених питань теорії геометричних побудов в еліптичній площині і на сфері. До їх числа можна віднести дослідження нових методів розв'язування конструктивних задач і дальшу розробку таких відомих методів, як алгебраїчний і метод геометричних місць. Далі, необхідно більш детально вивчити конструктивну потужність різних можливих креслярських інструментів, наприклад інструмента (його можна назвати гіперциркулем), який викреслює кола, розглядувані як еквідистанти на сфері і в еліптичній площині — з заданою базою і дистанцією.

Ми вже говорили про те, що є багато конкретних конструктивних задач, які, наскільки нам відомо, ще не вивчалися, хоч вони можуть мати і безпосередньо практичне значення, якщо йде мова про побудови на сфері. До їх числа можна віднести задачі про побудову дотичних, правильних n -кутників і т. д.

Так само не вивчалися ще питання конструктивної геометрії в площинах з виродженою неевклідовою метрикою. Тут з'являються нові труднощі, які потребують особливого підходу до трактування конструктивних задач, зв'язані з тим, що метрика кутів в цих площинах є гіперболічною або параболічною і, таким чином, порушується звичайне уявлення про коло як лінію, яка може бути описана неперервним обертанням циркуля.

В теорії геометричних побудов в гіперболічній площині все ще залишається ряд питань, які чекають свого розвитку або розв'язання. До їх числа треба віднести дальшу розробку методів розв'язування конструктивних задач на площині, а також дослідження просторових задач. В далеко просунутій теорії побудов обмеженими засобами до цього часу залишається відкритим питання про розв'язність задач 2-го степеня одним лише звичайним циркулем або двобортною лінійкою без відміченої на одному з бортів точки. Не дістали ще достатнього розвитку аналітичні методи, які дозволяли б встановлювати критерії розв'язності тих або інших конструктивних задач і їх класів за допомогою тих або інших інструментів. Останнє, зрозуміло, стосується не тільки гіперболічної площини.

Являє також інтерес вивчення задач вищих степенів, в першу чергу — третього і четвертого, і дослідження мінімальних засобів, достатніх для їхнього розв'язання.

ЛІТЕРАТУРА ПО ГЕОМЕТРИЧНИХ ПОБУДОВАХ В НЕЕВКЛІДОВИХ ПРОСТОРАХ

1. Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. I. М.—Л., 1946, стр. 185—261.
2. Я. Болъан. Appendix. Приложение, содержащее науку о пространстве абсолютно истинную. Пер., вступ. статьи и примечания В. Ф. Кагана. М.—Л., 1960.
3. Н. И. Лобачевский. Новые начала геометрии с полной теорией параллельных. Полн. собр. соч., т. II. М.—Л., 1949, стр. 147—454.
4. N. Lobatschewsky. Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin, Fincke, 1840. Переклад див: Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч., т. I. М.—Л., 1946, стр. 79—127.
5. M. Simon. Journ. für die reine und angew. Math., 107, 1891, S. 84—86.
6. L. Gérard. Sur la géométrie non-euclidienne. Thèse. Paris, 1892.
7. M. Simon. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinigung, 3, 1894, S. 80—82.
8. M. Simon. Math. Ann., 48, 1897, S. 607.
9. Ф. Энгель. Изв. Каз. физ.-мат. о-ва, (2), 7, № 3, 1897, стр. 118—121.
10. F. Engel. Berichte der Kön. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. 50, 1898, S. 181—187.
11. F. Engel. Lobatschewskij. Lpz., 1898.
12. T. Bonnesen. Nyt Tidsskr. for Mat., 10, 1899, S. 1—13, 25—35.
13. P. Barbarin. Etudes de géométrie analytique non-euclidienne. Bruxelles, 1900.
14. А. К. Власов. Уч. зап. Моск. ун-та, отд. физ.-мат., 18, 1901.
15. H. Liebmann. Berichte d. Kön. Sächs. Gesellsch. der Wiss., 53, 1901, S. 477—491.
16. F. Schur. Math. Ann., 55, 1902, S. 265—292.
17. D. Hilbert. Math. Ann., 57, 1903, S. 137—150. Рос. перекл. в книзі: Д. Гильберт. Основания геометрии. М.—Л., 1948, 3-й додаток.
18. H. Liebmann. Archiv der Math. und Physik, (3), 5, 1903, S. 213—215.
19. R. Bonola. Rendiconti di reale Istituto Lombardo di scienze e lettere, (2), 37, 1904, p. 254—258.
20. M. Grossman. Math. Ann., 58, 1904, S. 578—582.
21. M. Grossman. Die fundamentalen Konstruktionen der nichteuclidischen Geometrie. Frauenfeld, 1904.

22. H. Liebmann. Math. Ann., 59, 1904, S. 110—128.
23. H. Liebmann. Nicht-euklidische Geometrie. Lpz., 1905, 3-e Aufl. 1923.
24. H. Liebmann. Math. Ann., 61, 1905, S. 185—199.
25. M. Simon. Math. Ann., 61, 1905, S. 587—588.
26. R. Bonola. La geometria non-euclidea. Bologna, 1906, Рос. пер.: Р. Бонола. Неевклидова геометрия. Спб., 1910 (особливо додаток III).
27. H. Liebmann. Berichte d. Kön. Sächs. Gesellsch. d. Wiss., 58, 1906, S. 560—570.
28. Е. И. Григорьев. Вестник оп. физ. и элем. матем., № 472, 1908, стр. 368—369.
29. O. Pund. Archiv der Mathem. und Physik, (3), 14, 1909, S. 21—22.
30. M. Grossman. Math. Ann., 68, 1910, S. 141—144.
31. H. Liebmann. Berichte der Sächs. Gesellsch. der Wiss., Math.—Phys. Klasse, 62, 1910, S. 35—41.
32. H. Liebmann. Jahresber. d. Deutsch. Math.—Ver., 20, 1911, S. 56—69.
33. M. Grossman. Verhandlungen der Schweiz. Naturforsch. Gesellsch., 35, 1912.
34. T. Kubota. Tohoku Mathem. Journ., 1, 1912, p. 106—119.
35. M. Simon. Archiv der Math. und Phys., (3), 19, 1912, S. 368—369.
36. M. Simon. Archiv der Math. und Phys., (3), 19, 1912, S. 368.
37. E. Freda. Giorn. di Mat. di Battaglini, 51, 1913, p. 343—365.
38. M. Zacharias. Enz. der Math. Wiss., IIIABG, 1914—1921, S. 859—1172. (Про геометричні побудови в площині Лобачевського — див. стор. 1149—1150 та 1157—1162).
39. P. Barbarin. Comptes Rendus de l'Acad. des sc., 166, 1918, p. 202—204.
40. Д. Д. Мордухай-Болтовской. О геометрических построениях в пространстве Лобачевского. Самара, 1922.
41. M. Simon. Nichteuklidische Geometrie in elementarer Behandlung. Lpz., 1925.
42. Д. Д. Мордухай-Болтовской. Сб. «In memoriam Lobatschevskii», vol. 2, 1927, стр. 67—82.
43. F. Schur. Там же, стр. 99—102.
44. R. Baldus. Nichteuklidische Geometrie. Berlin, 1927. Рос. перекл.: Р. Бальдус. Неевклидова геометрия. М.—Л., 1933.
45. P. Barbarin. La géométrie non-euclidienne. 3-me ed., Paris, 1928.
46. Д. Д. Мордухай-Болтовской. Журн. мат. цикла ВУАН, 1, 3, 1933, стр. 15—30.
47. Д. Д. Мордухай-Болтовской. Мат. сб., т. 42, вып. 5, 1935, стр. 535—546.
48. D. Fog. Mat. Tidsskr., 1935, S. 16—24.
49. Н. М. Несторович. Уч. зап. НИИ мат. и физ. при Ростов. гос. ун-те, 1, 1937, стр. 64—65.
50. W. Fröhlich. Lotos, 85, 1937, S. 43—47.
51. F. Schilling. Pseudosphärische, hyperbolisch-sphärische und elliptisch-sphärische Geometrie. Lpz. und Berlin, 1937.
52. B. Wiedemann. Dtsch. Mathematik, 2, 1937, S. 520—544; 7, 1942, S. 178—184.
53. Н. М. Несторович. Уч. зап. НИИ мат. и физ. при Ростов. гос. ун-те, 3, 1939, стр. 93—125.
54. Н. М. Несторович. ДАН СССР, 22, № 5, 1939, стр. 233—235.
55. Н. М. Несторович. Уч. зап. НИИ мат. и физ. при Ростов. гос. ун-те, 4, 1940, стр. 41—65.
56. Н. М. Несторович. Там же, стр. 66—80.
57. Н. М. Несторович. Изв. Ростов. н/Д. пед. ин-та, т. X, 1940.
58. Н. М. Несторович. ДАН СССР, 43, № 5, 1944, стр. 186—188.
59. А. С. Смогоржевский. ДАН СССР, 50, 1945, стр. 61—63.
60. А. В. Космаков. Уч. зап. Иркутск. пед. ин-та, IX, 1946, стр. 8—13.
61. А. С. Смогоржевский. Сообщения о научно-исслед. работе Киев. политехн. ин-та, V, 1946, стр. 3—4.
62. Н. М. Несторович. Тезисы докладов конф. научн. работников Дона и Сев. Кавказа. Ростов н/Д., 1947.
63. О. С. Смогоржевський. Основи геометрії. Київ, 1947.
64. М. В. Гиршович. ДАН СССР, 60, № 5, 1948, стр. 757—759.
65. Н. М. Несторович. ДАН СССР, 63, № 3, 1948, стр. 613—614.
66. О. С. Смогоржевський. Наук. зап. Київ. пед. ін-ту, 6, фіз.-мат. сер., № 3, 1948, стор. 27—34.
67. О. С. Смогоржевський. Наук. зап. Київ. держ. ун-ту, 7, вип. 4, Матем. збірник № 2, 1948, стор. 151—156.
68. А. С. Смогоржевский. Сб. «50 лет Киев. политехн. ин-та». К., 1948, стр. 621—642.

69. А. С. Смогоржевский. Сообщения о научно-исслед. работе Киев. политехн. ин-та, 7, 1948, стр. 107—108.
70. Н. П. Хоменко. Там же, стр. 109—110.
71. В. Ф. Каган. Основания геометрии, ч. I. М.—Л., 1949, разд. IX.
72. Н. М. Несторович. Тезисы докладов научн. конференции, посвященной 80-летию Ростов. ун-та, вып. II, 1949, стр. 88—89.
73. Н. М. Несторович. ДАН СССР, 66, № 6, 1949, стр. 1051—1053.
74. Н. М. Несторович. ДАН СССР, 69, № 6, 1949, стр. 731—734.
75. О. С. Смогоржевський. Теорія геометричних побудов в просторі Лобачевського. Київ, 1949.
76. Н. П. Хоменко. Изв. Киев. политехн. ин-та, 10, 1950, стр. 141—145.
77. L. Rajčić. Hrvatsko Prirodoslovno Društvo, Glasnik Mat. Fis. Astr. (2), 5, 1950, p. 57—120.
78. H. Lebesgue. Leçons sur les constructions géométriques. Paris, 1950.
79. Н. М. Несторович. Уч. зап. Ростов. н/Д. гос. ун-та, 14, Тр. физ.-мат. ф-та, вып. I, 1951, стр. 55—59.
80. Н. М. Несторович. Геометрические построения в плоскости Лобачевского. М.—Л., 1951.
81. А. С. Смогоржевский. Геометрические построения в плоскости Лобачевского. М.—Л., 1951.
82. Н. П. Хоменко. Наук. зап. Київ. держ. ун-ту, 10, вып. I. Матем. зб., № 5, 1951, стор. 133—140.
83. L. Bieberbach. Theorie der geometrischen Konstruktionen. Basel, 1952.
84. К. К. Мокрищев. ДАН СССР, 91, № 3, 1953, стр. 453—456.
85. В. Ф. Рогаченко. Наук. зап. Львів. ун-ту, 22, сер. фіз.-мат., вып. 5, 1953, стор. 72—83.
86. В. Ф. Рогаченко. ДАН СССР, 88, № 4, 1953, стр. 615—618.
87. Р. И. Демаховская. Изв. Киев. политехн. ин-та, 12, 1953, стр. 130—142.
88. М. В. Гиршович. Уч. зап. Калинин. пед. ин-та, 16, 1953, стр. 7—38.
89. О. С. Смогоржевський. ДАН УРСР, № 6, 1954, стор. 399—401.
90. Р. И. Демаховская. Изв. Киев. политехн. ин-та, 16, 1954, стр. 229—242.
91. О. С. Смогоржевський. Основы геометрії, 2-е вид. К., 1954.
92. К. К. Мокрищев. ДАН УРСР, № 6, 1955, стор. 515—519.
93. К. К. Мокрищев. Уч. зап. Ростов. н/Д. гос. пед. ин-та, вып. 3, 1955, стр. 103—110.
94. К. К. Мокрищев. Уч. зап. Ростов. н/Д. ун-та, т. 32, № 4, 1955, стр. 15—27.
95. Р. И. Киришиев. УМН, т. II, вып. I (67), 1956, стр. 207—208.
96. Р. Г. Дыманов. Уч. зап. Харьков. пед. ин-та, т. 18, вып. 1, 1956, стр. 57—63.
97. Л. И. Мозговая. Изв. Киев. политехн. ин-та, т. 19, 1956, стр. 369—381.
98. Л. И. Мозговая. Там же, стр. 382—388.
99. F. Handest. Canad. J. Math., 8, № 3, 1956, p. 389—394.
100. В. Ф. Каган. Основания геометрии, ч. II. М., 1956, стр. 101—108.
101. Р. И. Киришиев. Тр. Ростов. н/Д. инж.-строит. ин-та, вып. 5, 1956, стр. 236.
102. Р. И. Киришиев. Там же, стр. 235—236.
103. Р. И. Киришиев. Изв. вузов, Математика, № 1, 1957, стр. 161—165.
104. А. Ф. Семенович. Уч. зап. Свердлов. пед. ин-та, вып. 13, 1957, стр. 44—46.
105. Р. Г. Дыманов. Уч. зап. Харьков. пед. ин-та, т. 21, вып. 2, 1957, стр. 131—138.
106. М. Н. Гафуров. Уч. зап. Наманган. пед. ин-та, вып. II, 1957, стр. 223—274.
107. K. Rössler. Mat. Skole, 8, № 3, 1958, S. 134—141.
108. E. Hofmann. Arch. Math., 9, № 3, 1958, S. 219—227.
109. M. W. Al-Dhahir, R. N. Shekoury. Proc. Iraqi Scient. Soc., 2, 1958, p. 1—6.
110. А. И. Костюк. Наук. зап. Луцьк. пед. ін-ту, т. VI, вып. 3, 1958, стор. 37—55.
111. А. И. Костюк. Там же, стор. 57—73.
112. J. Molnár. Ann. Univ. scient. Budapest Sec. Math., 2, 1959, S. 31—32.
113. Р. И. Киришиев. Уч. зап. физ.-мат. ф-та Ростов. н/Д. ун-та, т. 43, № 6, 1959, стр. 127—132.
114. Р. Г. Дыманов. Уч. зап. Харьков. пед. ин-та, т. 34, вып. 3, сер. мат., 1960, стр. 13—20.
115. Р. И. Киришиев. Тр. Ростов. н/Д. инж.-строит. ин-та, вып. 10, 1960, стр. 118—124.
116. Б. А. Бублик. Уч. зап. Ростов. н/Д. пед. ин-та, вып. 5 (42), 1960, стр. 83—88.

117. Н. В. Наумович. Тр. секции теорет. и инж. графики. Ростов н/Д., 1961, стр. 22—31.
118. А. І. Костюк. Наук. зап. Луцьк. пед. ін-ту, т. IX, фіз.-мат. сер., вип. 4, 1961, стор. 10—15.
119. А. І. Костюк. Там же, стор. 16—23.
120. А. І. Костюк. Там же, стор. 24—27.
121. Р. Г. Дыманов. Уч. зап. Харьков. пед. ин-та физ. воспитания, т. 39, 1961, стр. 3—12.
122. Р. И. Кирищев. Изв. вузов, Математика, № 2 (27), 1962, стр. 65—75.
-

Є. С. ДОРОЖОВСЬКИЙ, Б. М. КОРДУБА, В. Г. КОСТЕНКО

РОЗРАХУНОК ПОЛЯ І ТРАЄКТОРІЇ ОДНІЄЇ ПЛОСКОЇ ЕЛЕКТРОННО-ОПТИЧНОЇ СИСТЕМИ

Розглянемо електронно-оптичну систему, що складається з трьох пар паралельних електродів (щілин), довжини і віддалі між якими вказані на рис. 1. На двох парах паралельних електродів однакової

довжини задається потенціал $U=1$, а на третій парі $U=0$.

Задача знаходження поля такої системи міркуваннями, які наведені в роботі [2], зводиться до задачі

$$\Delta U = q(x, y) \quad (1)$$

всередині прямокутника розміром 104×192 мм (рис. 2) з умовою

$$U|_L = 1, \quad (2)$$

де L — границя прямокутника, $q(x, y) = 0$ всередині

прямокутника всюди, за винятком електродів, а на останніх визначається так, щоб на них

$$U(x, y) = u(x, y). \quad (3)$$

Як і в роботі [2], встановлено, що розв'язок задачі (1), (2), (3) в області R (рис. 2), що лежить між електродами, буде давати поле розглядуваної задачі принаймні з п'ятьма вірними знаками.

Розв'язок задачі (1), (2), (3) знайдено методом Г. М. Положого на електронно-обчислювальній машині М-20 з горизонтальним кроком сітки $h=0,1$ мм і вертикальним $h_1=0,64$ мм.

Задовольняючи граничні умови на вертикальних сторонах прямокутника і враховуючи симетрію задачі відносно осей ox і oy_1 , як і в роботі [2], одержимо після відповідних спрощень формули сумарних

представлень компоненти $\tilde{U}_k(x_i)$ стовпця (вектора) $\tilde{U}(x_i)$:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_k(x_i) = & \alpha_k - h^2 \frac{\mu_k^i - \nu_k^i}{\mu_k^{1040} - \nu_k^{1040}} \left[\frac{\mu_k^{540} - \nu_k^{540} + \mu_k^{500} - \nu_k^{500}}{\mu_k - \nu_k} 2\varphi_k + \right. \\ & \left. + \frac{\mu_k^{530} - \nu_k^{530} + \mu_k^{510} - \nu_k^{510}}{\mu_k - \nu_k} 2\psi_k \right] + h^2 \left[\frac{\mu_k^{i-500} - \nu_k^{i-500}}{\mu_k - \nu_k} 2\varphi_k + \frac{\mu_k^{i-510} - \nu_k^{i-510}}{\mu_k - \nu_k} 2\psi_k \right], \quad (4) \end{aligned}$$

де $2\varphi_k$ і $2\psi_k$ — добутки k -го рядка матриці P відповідно на стовпці $\vec{q}(x_{500})=\vec{q}(x_{540})$ і $\vec{q}(x_{510})=\vec{q}(x_{530})$. Перший доданок в останніх дужках формули (4) береться тільки при $500 < i \leq 520$, а другий — при $510 < i \leq 520$.

Завдяки симетрії задачі поле потенціалу досить знайти в чверті прямокутника між його осями симетрії за формулою

$$\vec{U}(x_i) = P \vec{\tilde{U}}(x_i). \quad (5)$$

Стовпці

$$\vec{q}(x_{500}) = \vec{q}(x_{540}) = (0, \dots, (137) \dots 0, q_{36}, \dots, q_{48}, \dots, q_{36}, 0 \dots (137) \dots 0);$$

$$\vec{q}(x_{510}) = \vec{q}(x_{530}) = (0, \dots, (102) \dots 0, q_1, \dots, q_{35}, 0, \dots, (25) \dots 0, q_{35}, \dots, q_1, 0 \dots (102) \dots 0)$$

знаходяться з умов (3) із системи рівнянь

$$h^2 \sqrt{\frac{2}{300}} \left[\sin \frac{i\pi}{300} C_1^{(1)} + \sin \frac{3i\pi}{300} C_3^{(1)} + \dots + \sin \frac{299i\pi}{300} C_{299}^{(1)} \right] = 1; \quad (6)$$

$$(i=138, \dots, 150)$$

$$h^2 \sqrt{\frac{2}{300}} \left[\sin \frac{i\pi}{300} C_1^{(2)} + \sin \frac{3i\pi}{300} C_3^{(2)} + \dots + \sin \frac{299i\pi}{300} C_{299}^{(2)} \right] = 0,$$

$$(i=103, \dots, 137)$$

де

$$C_k^{(1)} = \frac{\mu_k^{500} - \nu_k^{500}}{\mu_k^{1040} - \nu_k^{1040}} \left(\frac{\mu_k^{540} - \nu_k^{540} + \mu_k^{500} - \nu_k^{500}}{\mu_k - \nu_k} 2\varphi_k + \frac{\mu_k^{530} - \nu_k^{530} + \mu_k^{510} - \nu_k^{510}}{\mu_k - \nu_k} 2\psi_k \right);$$

$$C_k^{(2)} = \frac{\mu_k^{510} - \nu_k^{510}}{\mu_k^{1040} - \nu_k^{1040}} \left(\frac{\mu_k^{540} - \nu_k^{540} + \mu_k^{500} - \nu_k^{500}}{\mu_k - \nu_k} 2\varphi_k + \frac{\mu_k^{530} - \nu_k^{530} + \mu_k^{510} - \nu_k^{510}}{\mu_k - \nu_k} 2\psi_k \right) -$$

$$- \frac{\mu_k^{10} - \nu_k^{10}}{\mu_k - \nu_k} 2\varphi_k.$$

$$(k=1, 3, \dots, 299).$$

Алгоритм для машинного підрахунку коефіцієнтів при $q_1, \dots, q_{48}$ в системі (6) такий самий, як і в роботі [2]. Так, наприклад, для першого з перших 13 рівнянь системи (6) коефіцієнти при $q_1, \dots, q_{35}$ одержуються шляхом множення 138-го рядка матриці P на діагональну матрицю N , а потім на 103-й, ..., 137-й стовпці тієї ж матриці P відповідно; при $q_{36}, \dots, q_{48}$ — шляхом множення 138-го рядка матриці P на діагональну матрицю M , а потім на 138-й, ..., 150-й стовпці матриці P відповідно. Аналогічним чином і в інших рівняннях системи (6) з використанням діагональних матриць L і $H=N$ і інших рядків матриці P від 103-го до 150-го.

При цьому

$$N=[N_1, 0, N_3, \dots, 0, N_{299}], \quad M=[M_1, 0, M_3, \dots, 0, M_{299}];$$

$$L=[L_1, 0, L_3, \dots, 0, L_{299}], \quad H=[H_1, 0, H_3, \dots, 0, H_{299}] \text{ — діагональні матриці,}$$

де

$$N_k = \frac{\mu_k^{500} - \nu_k^{500}}{\mu_k^{1040} - \nu_k^{1040}} \frac{\mu_k^{530} - \nu_k^{530} + \mu_k^{510} - \nu_k^{510}}{\mu_k - \nu_k};$$

$$M_k = \frac{\mu_k^{500} - \nu_k^{500}}{\mu_k^{1040} - \nu_k^{1040}} \frac{\mu_k^{540} - \nu_k^{540} + \mu_k^{500} - \nu_k^{500}}{\mu_k - \nu_k};$$

$$L_k = \frac{\mu_k^{510} - \nu_k^{510}}{\mu_k^{1040} - \nu_k^{1040}} \frac{\mu_k^{530} - \nu_k^{530} + \mu_k^{510} - \nu_k^{510}}{\mu_k - \nu_k};$$

$$H_k = \frac{\mu_k^{510} - \nu_k^{510}}{\mu_k^{1040} - \nu_k^{1040}} \frac{\mu_k^{540} - \nu_k^{540} + \mu_k^{500} - \nu_k^{500}}{\mu_k - \nu_k} - \frac{\mu_k^{10} - \nu_k^{10}}{\mu_k - \nu_k} = N_k.$$

$$(k=1, 3, \dots, 299)$$

Розв'язок системи (5) на машині М-20 привів до таких результатів:

$q_1 = -0,290\ 028\ 012,$	$q_{17} = -0,176\ 208\ 951,$	$q_{33} = -2,812\ 483\ 40,$
$q_2 = -0,139\ 893\ 600,$	$q_{18} = -0,191\ 589\ 163,$	$q_{34} = -5,129\ 074\ 28,$
$q_3 = -0,108\ 409\ 681,$	$q_{19} = -0,209\ 236\ 588,$	$q_{35} = -14,048\ 472\ 5,$
$q_4 = -0,097\ 579\ 260,$	$q_{20} = -0,229\ 608\ 369,$	$q_{36} = 14,845\ 526\ 900,$
$q_5 = -0,094\ 315\ 446,$	$q_{21} = -0,253\ 297\ 104,$	$q_{37} = 6,128\ 629\ 140,$
$q_6 = -0,094\ 526\ 445,$	$q_{22} = -0,281\ 081\ 348,$	$q_{38} = 3,717\ 363\ 720,$
$q_7 = -0,096\ 655\ 278,$	$q_{23} = -0,314\ 003\ 983,$	$q_{39} = 2,525\ 429\ 980,$
$q_8 = -0,100\ 061\ 479,$	$q_{24} = -0,353\ 494\ 557,$	$q_{40} = 1,846\ 071\ 680,$
$q_9 = -0,104\ 476\ 143,$	$q_{25} = -0,401\ 568\ 990,$	$q_{41} = 1,433\ 742\ 410,$
$q_{10} = -0,109\ 796\ 618,$	$q_{26} = -0,461\ 176\ 353,$	$q_{42} = 1,174\ 982\ 330,$
$q_{11} = -0,116\ 004\ 603,$	$q_{27} = -0,536\ 833\ 928,$	$q_{43} = 1,009\ 396\ 160,$
$q_{12} = -0,123\ 132\ 257,$	$q_{28} = -0,635\ 873\ 356,$	$q_{44} = 0,902\ 491\ 679,$
$q_{13} = -0,131\ 249\ 096,$	$q_{29} = -0,771\ 054\ 342,$	$q_{45} = 0,833\ 929\ 461,$
$q_{14} = -0,140\ 457\ 849,$	$q_{30} = -0,966\ 414\ 744,$	$q_{46} = 0,791\ 641\ 455,$
$q_{15} = -0,150\ 895\ 539,$	$q_{31} = -1,271\ 226\ 630,$	$q_{47} = 0,768\ 656\ 626,$
$q_{16} = -0,162\ 738\ 341,$	$q_{32} = -1,795\ 690\ 550,$	$q_{48} = 0,761\ 366\ 552,$

Поле потенціалу за формулами (4), (5) підраховане на тій самій машині М-20 в смузї між абсцисами x_{500} і x_{540} , причому виявилося, що на електродах в точках перетину їх з сіткою задане значення потенціалу збігається з розрахунком з точністю не менше як сім знаків.

Траєкторії розглядуваної електронно-оптичної системи задовольняють систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y};$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$$

в безрозмірних координатах. Використовуючи одержане поле потенціалу і застосовуючи екстраполяційну формулу Адамса—Штермера, одержимо траєкторії цієї системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Г. Н. Положий. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента. Изд. Киев. ун-та, 1962.
2. Є. С. Дорожовський, Б. М. Кордуба, В. Г. Костенко. Задача Діріхле плоскої електростатики. Даний збірник.
3. Л. Коллатц. Численные методы решения дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1953.

Е. С. ДОРОЖОВСКИЙ, Б. М. КОРДУБА, В. Г. КОСТЕНКО

**РАСЧЕТ ПОЛЯ ПОТЕНЦИАЛА
ОДНОЙ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ**

(резюме)

В работе решается одна плоская задача электронной оптики. Приводится расчетная формула для потенциала и дается алгоритм для машинного подсчета коэффициентов возникающей при этом системы алгебраических уравнений.

По подсчитанному полю потенциала произведен расчет траекторий полета электронов в данной электронно-оптической системе методом Адамса—Штермера.

Б. В. ВАЛЬКО, И. В. ЛЮДКЕВИЧ, І. О. ПРУСОВ

РОЗРАХУНОК ЕЛЕКТРОСТАТИЧНОГО ПОЛЯ СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОДІВ МАЛОЇ ТОВЩИНИ МЕТОДОМ НЕЛІНІЙНИХ ПАРАМЕТРІВ

Розглянемо деякі основні задачі про знаходження потенціалу системи просторових електродів малої товщини з осьовою симетрією і потенціалу плоскої системи електродів, на кожному з яких потенціал набуває заданого постійного значення. Шуканий розв'язок задається у вигляді потенціалу простого шару для одного електроду системи, не враховуючи сумування по всіх електродах. Визначення невідомої густини зводиться до інтегрального рівняння, знаходження розв'язку якого зв'язане з великими труднощами в обчисленні. Задання густини у вигляді лінійної комбінації деяких функцій з нелінійними параметрами, які спеціально підбираються в процесі розв'язування задачі, значно зменшує ці труднощі. В задачах, в яких допускається, що товщина електродів мало впливає на розподіл поля, приймається, що густини розподілені на серединних поверхнях, а граничні умови задовольняються тільки з одного боку.

1. Осесиметричний потенціал електродів. Нехай на поверхні достатньо гладкого електроду малої товщини $2h$ (взагалі змінної) і радіусу серединної поверхні $R = \text{const}$ заданий потенціал u_1 . Замінімо фізичну густину на поверхні електроду фіктивною густиною $q(\xi)$ на його серединній поверхні, радіус якої R , а твірна $z_1 z_2$. Потенціал цієї густини в точці $M(r, z)$ циліндричної системи координат з точністю до постійного множника виражається формулою

$$U(r, z) = \int_{z_1}^{z_2} \frac{q(\zeta) K(\xi) d\zeta}{V(R+r)^2 + \alpha^2}, \quad K(\zeta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{V1 - k^2 \sin^2 \theta}, \quad (1)$$

$$k^2 = \frac{4Rr}{(R+r)^2 + \alpha^2}, \quad \alpha = \zeta - z.$$

Будемо шукати густину $q(\zeta)$ у вигляді

$$q(\zeta) = \sum_{k=1}^n q_k = \sum_{k=1}^n \frac{a_k b_k}{b_k^2 + (\zeta - \zeta_k)^2} + a_0, \quad (2)$$

де a_k — невідомі параметри, b_k — параметри, задані заздалегідь, ζ_k — вибрані точки на проміжку (z_1, z_2) . Вимагаючи, щоб в $n+1$ точках з

координатами $(R - h_j, \xi'_j)$ на внутрішній стороні електроду потенціал набував заданого значення, дістанемо таку систему рівнянь для визначення невідомих a_k ($k=0, 1, 2, \dots, n$):

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{q(\xi) K(\xi) d\xi}{V(R+r)^2 + \alpha^2} \Big|_{r=R-h_j}^{r=R-h_j} = U_1 (j=1, 2, 3, \dots, n), \quad (3)$$

де $h_j = h(\xi'_j) \neq 0$; ξ'_j — точка максимуму від одної з густин $q_k(\xi)$ ($k=1, \dots, n$); ξ'_j при $j=0$ — точка максимуму потенціалу від густини $q(\xi) = a_0$. При такому виборі точок ξ'_j в матриці коефіцієнтів системи (3) діагональні елементи є найбільшими в кожному рядку. А тому система (3) завжди має розв'язок і, крім цього, потенціал (1) набуває екстремальних значень тільки на електродах. Постійні b_k шляхом проб підбираються так, щоб похибка в граничних умовах в проміжкових точках між ξ'_j була мінімальною.

Таким чином, (1) — (3) являє собою наближений розв'язок задачі для електродів заданої форми і одночасно точним, якщо покласти, що електроди обмежені еквіпотенціальними лініями, які проходять через точки ξ'_j .

Припускаємо, що електроди з товщиною $2h(\xi) \neq 0$ достатньо гладкі, таким чином, густина $q(\xi)$ обмежена, а її похідна $q'(\xi)$ абсолютно інтегрована.

Тому формулу (1) інтегруванням по частинах можна записати у вигляді

$$U(r, z) = \left[q(\xi) \tilde{F}(\alpha) - \int q'(\xi) \tilde{F}(\alpha) d\xi \right]_{\xi=z_1}^{\xi=z_2} + \left[\frac{F(\zeta_0)}{\zeta'_0 - \zeta''_0} + \frac{F(\zeta'_0)}{\zeta'_0 - \zeta''_0} \right] \int_{z_1}^{z_2} q(\zeta) d\zeta, \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\alpha) &= F(\alpha) - \frac{F(\zeta_0)(\xi - \zeta'_0)}{\zeta'_0 - \zeta''_0} - \frac{F(\zeta'_0)(\xi - \zeta'_0)}{\zeta'_0 - \zeta''_0}; \\ F(\alpha) &= \int_0^{\pi/2} \ln \frac{\alpha + \sqrt{m^2 + 4Rr \sin^2 \Theta}}{\alpha + \sqrt{m^2 + 4Rr \Theta^2}} d\zeta + \frac{\pi}{2} \ln(\alpha + n) - \frac{\pi}{2} + \\ &+ \frac{\alpha}{2\sqrt{Rr}} \ln \frac{n + \pi\sqrt{Rr}}{m} + \frac{R-r}{\sqrt{Rr}} \operatorname{arctg} \left[\frac{\pi\sqrt{Rr}(R-r)}{(\alpha+m)(m+n)} \right]; \\ \alpha &= \xi - z, \quad m = \sqrt{\alpha^2 + (R-r)^2}, \quad n = \sqrt{\pi^2 Rr + m^2}, \\ \zeta'_0 &= z_k - \frac{b_k}{\sqrt{3}}, \quad \zeta''_0 = z_k + \frac{b_k}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Система рівнянь в цьому випадку набирає вигляду

$$U(r, z) \Big|_{r=R-h_j}^{r=R-h_j} = U_1, \quad (j=0, 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

У формулах (4) і (5) ядро $F(\alpha)$ регулярне навіть у випадку $h(\xi)=0$. В цьому їх перевага перед формулами (1)–(3), ядро яких сингулярне при $h(\xi)=0$.

Наведений розв'язок, що визначається формулами (1)–(3), легко узагальнюється на випадок, коли серединна поверхня електроду являє собою поверхню обертання деякої кусочно-гладкої лінії. Не зупиняючись на цьому детально, припустимо, що серединна поверхня є поверхнею обертання деякої гладкої кривої, заданої рівнянням $R=R(\xi)$ ($z_1 \leq \xi \leq z_2$). В цьому випадку розв'язок задачі виражається також формулами (1)–(3), якщо вважати, що $R=R(\xi)$.

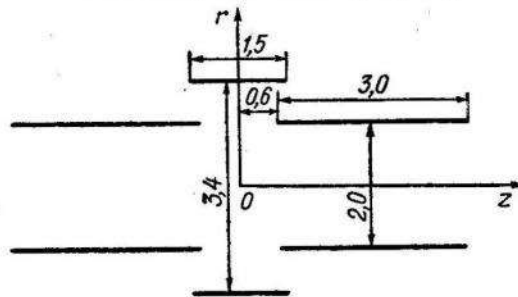


Рис. 1

2. Потенціал плоскої системи електродів. На відміну від пункту 1, покладемо, що поверхня електроду малої товщини $2h$ є циліндричною поверхнею з твірною $2a$. Площину симетрії електроду приймемо за координатну площину XOZ . Лінію перетину серединної поверхні з площиною XOZ позначимо через L .

Якщо твірна достатньо довга, то густину на ній, без особливої похибки на потенціал, в деякому околі L площини XOZ можна вважати незалежною від координати y . Переріз електроду площиною XOZ приймемо за плоский електрод малої товщини $2h$ з серединною лінією L .

Нехай густина плоского електроду розподілена на лінії L . Легко показати, що потенціал в точці $M(x, z)$ поза електродом виражається формулою

$$U(x, z) = \int_L q(s) \ln \frac{R+a}{R-a} ds, \quad (6)$$

де $R = \sqrt{\alpha^2 + \lambda^2 + a^2}$; $\alpha = \zeta - z$; $\lambda = \xi - x$; $q(s)$ — густина на L в точці $M'(\xi, \zeta)$. Вважаючи, що L — відрізок прямої, паралельної осі oz з кінцями в точках (ξ, z_1) і (ξ, z_2) , формулу (6) можна привести до більш вигідного для розрахунку вигляду

$$U(x, z) = q(\zeta) F(\alpha) \Big|_{\zeta=z_1}^{z_2} - \int_{\zeta=z_1}^{z_2} q'(\zeta) F(\alpha) d\zeta, \quad (7)$$

де

$$F(\alpha) = \alpha \ln \frac{R+a}{R-a} + a \ln \frac{R+a}{R-a} - 2\lambda \arctg \frac{\alpha\lambda}{\lambda R};$$

$q(\zeta)$ — виражається формулою (2).

Система рівнянь для знаходження невідомих a_k набирає вигляду

$$\left[\left(q(\zeta) F(\alpha) \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} F(\alpha) q'(\zeta) d\zeta \right) \right]_{\substack{x=\xi-h_j \\ z=\zeta_j}} = u_j \quad (j=0, 1, \dots, n). \quad (8)$$

Для прикладу розглядалися три циліндри (рис. 1) з подвійною симетрією, найменшим радіусом $R=1$ і товщиною $2h=0,04$. П'ять рівнянь системи (3) дають розв'язок, який задовольняє граничні умови в проміжних точках з похибками в [2–4] знаках.

Цей розв'язок виявився більш точним, ніж розв'язок за допомогою 42 рівнянь методом неапроксимованих густин. На закінчення слід відзначити, що вказане зображення густини функціями з нелінійними параметрами не є єдиним. Тепер досліджується ефективність зображення густини функціями вигляду

$$q_k(\zeta) = \frac{a_k}{\sqrt{\sigma_k}} e^{\frac{(\zeta - \zeta_k)^2}{\sigma_k}}, \quad (9)$$

де σ_k — параметри, які підбираються аналогічно.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. IV, 1958.

Б. В. ВАЛЬКО, И. В. ЛЮДКЕВИЧ, И. А. ПРУСОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОДОВ МАЛОЙ ТОЛЩИНЫ МЕТОДОМ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРОВ

(резюме)

В работе решается одна задача электронной оптики. Приводится расчетная формула и дается алгоритм для машинного подсчета потенциала электронной линзы, состоящей из электродов малой толщины в осесимметричном пространственном и плоском случаях.

Т. М. ВОЛОВИК, Л. О. КІЦЕРА

ПРО ДЕЯКІ ЗМІНИ В БЛОЦІ № 5 НАКОПЛЮВАЧА НА МАГНІТНОМУ БАРАБАНІ ЕОМ «УРАЛ-1»

Під час експлуатації електронної лічильної машини «Урал-1» в обчислювальному центрі при Львівському університеті спостерігалось таке небажане явище: при вводі інформації із накоплювачів на пер-

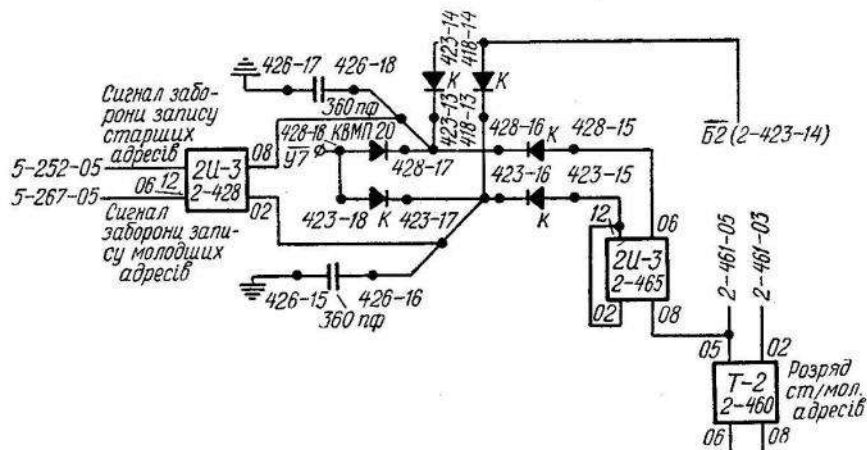


Рис. 1

фоленті та на магнітній ленті по неповних адресах псувався запис першої дев'ятки числа в парних комірках старших адресів (3700—3777) при вводі по молодших адресах і в парних комірках молодших адресів (1700—1777) при вводі по старших адресах.

Пояснюється це таким чином. Коли відбувається запис на магнітний барабан по молодших адресах, в блоці виборки числа (пристрій блоку № 5 магнітного барабана) виробляється сигнал заборони запису по старших адресах (рис. 1); коли ж запис ведеться по старших адресах — виробляється сигнал заборони запису по молодших адресах. Як видно із схеми, наведеної на рис. 1, сигнали заборони запису по старших і молодших адресах вироблялись по інвертованому сигналу $\overline{B2}$ ($\overline{B2}$). Імпульс $\overline{B2}$ в режимі групової операції, тобто при списуванні інформації з перфоленти або з магнітної ленти, має неоднакову тривалість в часі, а саме: при записі в парні комірки тривалість першого імпульсу $\overline{B2}$ залежить від величини адреси — чим більша адреса, тим коротший імпульс.

На діаграмі (рис. 2) розглянуті два такти, що йдуть один за одним, при виконанні групової операції, коли запис ведеться по ве-

ликих адресах. В першому такті, коли адреса неповна і непарна, виробляється, як завжди, 4 імпульси Б1 і два останні імпульси Б2. В цьому такті імпульси Б2 виробляються по Б1 і мають однакову з ними тривалість в часі.

Зовсім інакше відбувається цей процес в другому такті, коли адреса неповна, але парна. Імпульсів Б1 виробляється знову 4, причому перший імпульс Б1 має дещо більшу тривалість за рахунок проміжку між кінцем і початком серії 2048 (новий такт відповідає но-

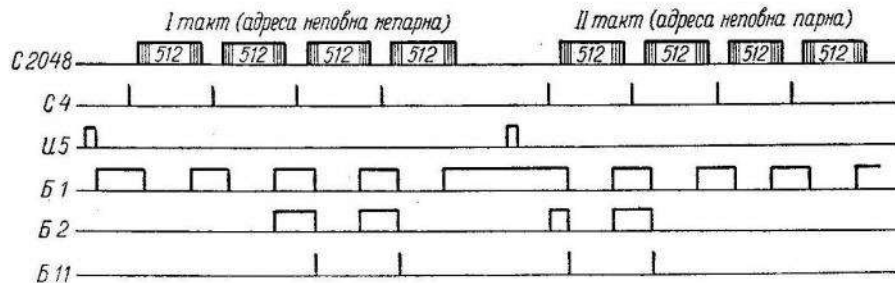


Рис. 2

вому обертowi барабана). При записі в парну адресу виробляються два перші імпульси Б2. Перший із них установлюється не по Б1, як було в попередньому такті, а по серії 4 (С4) і закінчується одночасно з Б1. Другий імпульс Б2 має тривалість, однакову з Б1. Як видно із діаграми, перший імпульс Б2, який установлюється по С4, значно коротший від решти імпульсів Б2.

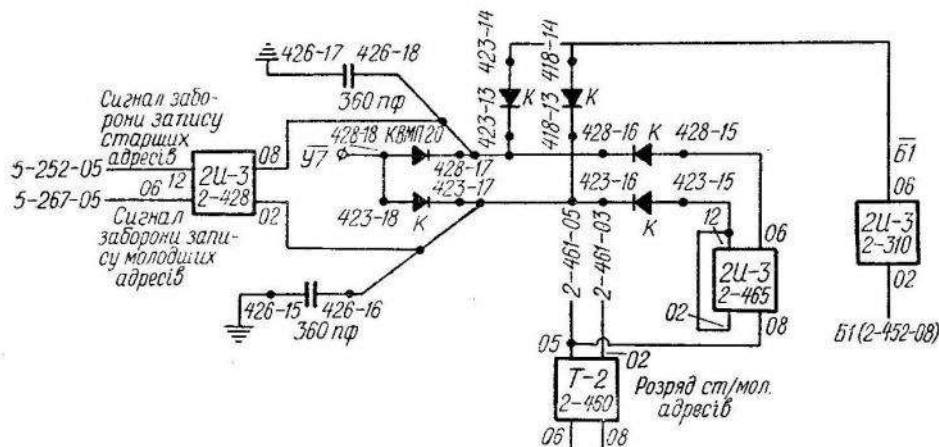


Рис. 3

Це приводить до того, що на вхід інвертора 2И-3 (2-428) (рис. 1) замість вузького прямокутного імпульса заборони запису подається зрізаний трикутний маленький імпульс, який губиться в наступних електричних схемах, тобто сигнал заборони запису пропадає. В цьому випадку перша дев'ятка числа записується як по молодших, так і по старших адресах. Таким чином, в комірках, куди запис не повинен був здійснюватися, інформація псувалася.

Цей недолік в роботі накоплювача на магнітному барабані машини «Урал-1» було усунено таким способом: на схему виробки сигналів заборони запису замість сигналів Б2 було подано сигнали Б1, тривалість яких цілком достатня для утворення чітких сигналів запису.

За новою схемою, при записі інформації на магнітний барабан виробляється завжди 4 сигнали заборони запису, незалежно від того, чи запис ведеться по повних чи неповних комірках. При запису по неповних адресах два із цих сигналів використовуються, а два зайві, але вони ніякої шкоди не приносять, а лише підтверджують закритий стан підсилювачів запису УЗ.

Змінена схема наведена на рис. 3. Як видно з рисунка, проведені дуже незначні зміни в електричних схемах машини. Для одержання інвертованого сигналу Б1 було поставлено інвертор 2-310, на вхід якого подається сигнал Б1, а з виходу знімається $\overline{Б1}$.

Експлуатація машини «Урал-1» з нововведеною схемою виробки сигналів заборони запису протягом 1963 р. показала її повну надійність.

Т. М. ВОЛОВИК, Л. Е. КИЦЕРА

О НЕКОТОРЫХ ИЗМЕНЕНИЯХ В БЛОКЕ № 5 НАКОПИТЕЛЯ НА МАГНИТНОМ БАРАБАНЕ ЭВМ «УРАЛ-1»

(р е з ю м е)

Предлагается новая схема выработки импульсов запрещения записи. Это позволяет более эффективно использовать возможности машины в режиме групповой операции.

В. О. ЛІХАЧОВ

СКРУТ ЦИЛІНДРА, ЯКИЙ СПАЯНИЙ З ЖОРСТКИМ ВАЛОМ

Розглянемо коловий порожнистий циліндр скінченної довжини. Нехай до зовнішньої поверхні циліндра по деякому поясу прикладені дотичні зусилля $\tau_{r\theta}(x, \zeta)$, які не залежать від кута θ , а по всій внутрішній поверхні циліндр спаяний з жорстким валом.

Систему координат вибираємо таким чином, щоб вісь циліндра належала осі oz і початок координат перебував в точці перетину осі oz з нижньою основою циліндра, яка розміщена в площині $z=0$.

Надалі будемо користуватися позначеннями: r_e, r_i — відповідно зовнішній та внутрішній радіуси циліндра; $x = \frac{r}{r_e}, \zeta = \frac{z}{r_e}$ — безрозмірні циліндричні координати; b — висота пояса навантаження бічної поверхні циліндра; $\rho = \frac{r_i}{r_e}$.

В прийнятих позначеннях запишемо граничні умови та розв'язки двох задач, які відрізняються лише умовами на торцях.

Задача перша:

$$u_r(x, \zeta)=0, u_\theta(x, \zeta)=0, u_z(x, \zeta)=0 \text{ при } x=\rho, 0 \leq \zeta \leq \pi;$$

$$\tau_{r\theta}(x, \zeta)=f(\zeta), \tau_{rz}(x, \zeta)=0, \sigma_r(x, \zeta)=0 \text{ при } x=1, 0 \leq \zeta < b;$$

$$\tau_{z\theta}(x, \zeta)=0, \tau_{rz}(x, \zeta)=0, \sigma_r(x, \zeta)=0 \text{ при } x=1, \pi \geq \zeta > b;$$

$$\tau_{z\theta}(x, \zeta)=0, \tau_{rz}(x, \zeta)=0, \sigma_z(x, \zeta)=0 \text{ при } \zeta=0, \zeta=\pi; \rho \leq x \leq 1;$$

$$\frac{1}{\mu} \tau_{r\theta}(x, \zeta) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{x} M_{11}(x, p, \rho) - \frac{p}{2} M_{01}(x, p, \rho)}{L_{11}(p, \rho) - \frac{p}{2} L_{01}(p, \rho)} \bar{f}_c(p) \cos p\zeta + \\ + \frac{1}{\pi} \bar{\tau}_{r\theta}^{(c)}(x, 0);$$

$$\frac{1}{\mu} \tau_{z\theta}(x, \zeta) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p M_{11}(x, p, \rho)}{2L_{11}(p, \rho) - pL_{01}(p, \rho)} \bar{f}_c(p) \sin p\zeta;$$

$$u_\theta(x, \zeta) = \frac{2r_e}{\pi\mu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{11}(x, p, \rho)}{pL_{01}(p, \rho) - 2L_{11}(p, \rho)} \bar{f}_c(p) \cos p\zeta + \frac{r_e}{\pi\mu} \bar{u}_\theta^{(c)}(x, 0).$$

Задача друга:

$$\begin{aligned} u_\theta(x, \zeta) &= 0, \quad u_r(x, \zeta) = 0, \quad u_z(x, \zeta) = 0 \quad \text{при } x = \rho, \quad 0 \leq \zeta \leq \pi; \\ \tau_{r\theta}(x, \zeta) &= \varphi(\zeta), \quad \tau_{rz}(x, \zeta) = 0, \quad \sigma_r(x, \zeta) = 0 \quad \text{при } x = 1, \quad 0 \leq \zeta < b; \\ \tau_{r\theta}(x, \zeta) &= 0, \quad \tau_{rz}(x, \zeta) = 0, \quad \sigma_r(x, \zeta) = 0 \quad \text{при } x = 1, \quad b < \zeta \leq \pi; \\ u_\theta(x, \zeta) &= 0, \quad u_z(x, \zeta) = 0, \quad u_r(x, \zeta) = 0 \quad \text{при } \zeta = 0, \quad \zeta = \pi, \quad \rho \leq x \leq 1; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\mu} \tau_{r\theta}(x, \zeta) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{x} M_{11}(x, p, \rho) - \frac{p}{2} M_{01}(x, p, \rho)}{L_{11}(p, \rho) - \frac{p}{2} L_{01}(p, \rho)} \overline{\varphi_s(p)} \sin p\zeta;$$

$$\frac{1}{\mu} \tau_{z\theta}(x, \zeta) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p M_{11}(x, p, \rho)}{p L_{01}(p, \rho) - 2 L_{11}(p, \rho)} \overline{\varphi_s(p)} \cos p\zeta + \frac{1}{\pi} \overline{\tau_{z\theta}^{(c)}}(x, 0);$$

$$u_\theta(x, \zeta) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{11}(x, p, \rho)}{p L_{01}(p, \rho) - 2 L_{11}(p, \rho)} \overline{\varphi_s(p)} \sin p\zeta,$$

де

$$\begin{aligned} M_{11}(x, p, \rho) &= I_1(px) K_1(p\rho) - K_1(px) I_1(p\rho); \\ M_{01}(x, p, \rho) &= I_0(px) K_1(p\rho) + K_0(px) I_1(p\rho); \\ M_{11}(1, p, \rho) &= L_{11}(p\rho), \quad M_{01}(1, p, \rho) = L_{01}(p\rho); \end{aligned}$$

$\overline{f_c(x, p)}$, $\overline{\varphi_s(x, p)}$, $\overline{\tau_{r\theta}^{(c)}}(x, p)$, $\overline{\tau_{z\theta}^{(s)}}(x, p)$, $\overline{u_\theta^{(c)}}(x, p)$ — синус і косинус трансформанти Фур'є по змінній ζ від відповідних функцій; $I_0(p)$, $I_1(p)$, $K_0(p)$, $K_1(p)$ — функції Бесселя від уявного аргумента.

Розглянемо деякі приклади.

1. $f(\zeta) = q_0 = \text{const}$;

$$\frac{1}{\mu} \tau_{r\theta}(\rho, \zeta) = \frac{2q_0}{\pi\rho} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p L_{01}(p\rho) - 2 L_{11}(p\rho)} \frac{\sin pb}{p} \cos p\zeta + \frac{bq_0}{\pi\rho^2};$$

$$\frac{1}{\mu} \tau_{z\theta}(1, \zeta) = \frac{2q_0}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{L_{11}(p\rho)}{2 L_{11}(p\rho) - p L_{01}(p\rho)} \sin pb \sin p\zeta.$$

2. $\varphi(\zeta) = q_1 \zeta$;

$$\frac{1}{\mu} \tau_{r\theta}(\rho, \zeta) = \frac{2q_1}{\pi\rho} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} \frac{1}{p L_{01}(p\rho) - 2 L_{11}(p\rho)} \left[\frac{\sin pb}{p} - b \cos pb \right] \sin p\zeta;$$

$$\frac{1}{\mu} \tau_{z\theta}(1, \zeta) = \frac{2q_1}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{L_{11}(p\rho)}{p L_{01}(p\rho) - 2 L_{11}(p\rho)} \left[\frac{\sin pb}{p} - b \cos pb \right] \cos p\zeta.$$

3. $\varphi(\zeta) = q_2 \zeta^2$;

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \tau_{r\theta}(\rho, \zeta) &= \frac{2q_2}{\pi\rho} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin p\zeta}{p L_{01}(p\rho) - 2 L_{11}(p\rho)} \times \\ &\times \left[\frac{2b}{p^2} \sin pb - \frac{b^2}{p} \cos pb + \frac{2}{p^3} (\cos pb - 1) \right]; \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\mu} \tau_{z\theta}(\rho, \zeta) = \frac{2q_2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{L_{11}(p\rho) \cos p\zeta}{2L_{11}(p\rho) - pL_{01}(p\rho)} \times \\ \times \left[\frac{2b}{p} \sin pb - b^2 \cos pb + \frac{2}{p^2} (\cos pb - 1) \right].$$

Таблиця 1

Числові значення $\frac{\tau_{r\theta}(x, \zeta)}{\mu}$ для $x = \rho = 0,50; 0,75$ в перетинах
циліндра $\zeta = 0; \frac{\pi}{2}; \pi$ при $f(\zeta) = 1$

ρ	ζ	$b = \frac{\pi}{10}$	$b = \frac{\pi}{5}$	$b = 1$	$b = \frac{\pi}{2}$	$b = \frac{2\pi}{3}$	$b = \pi$
0,50	0	1,66	2,72	3,39	3,80	3,93	4,0
	$\frac{\pi}{2}$	0,13	0,32	0,70	2,00	3,23	4,0
	π	0,01	0,03	0,06	0,20	0,54	4,0
0,75	0	1,37	1,70	1,78	1,78	1,78	1,78
	$\frac{\pi}{2}$		0,01	0,05	0,89	1,71	1,78
	π				0,04	0,10	1,78

Таблиця 2

Числові значення $\frac{\tau_{r\theta}(x, \zeta)}{\mu}$ для $x = \rho = 0,50; 0,75; 0,9$
в перетинах циліндра $\zeta = \frac{\pi}{2}$ при $f(\zeta) = \zeta^2$

ρ	$b = \frac{\pi}{10}$	$b = \frac{\pi}{5}$	$b = 1$	$b = \frac{\pi}{2}$	$b = \frac{2\pi}{3}$	$b = \pi$
0,50	0,11	0,53	1,21	6,50	10,5	13,8
0,75	0,05	0,28	0,50	3,84	6,36	6,62
0,90	0,03	0,21	0,32	2,94	4,61	4,88

Таблиця 3

Числові значення $\frac{\tau_{z\theta}(x, \zeta)}{\mu}$ для $x = 1$ в перетині $\zeta = 0$
при $\varphi(\zeta) = \zeta, \rho = 0,50; 0,75; 0,90$

ρ	$b = \frac{\pi}{10}$	$b = \frac{\pi}{5}$	$b = 1$	$b = \frac{\pi}{2}$	$b = \frac{2\pi}{3}$	$b = \pi$
0,50	0,25	0,58	0,94	1,22	1,35	1,42
0,75	0,21	0,33	0,36	0,37	0,38	0,39
0,90	0,10	0,11	0,12	0,12	0,13	0,13

В. А. ЛИХАЧЕВ

КРУЧЕНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА, СПАЯННОГО С ЖЕСТКИМ ВАЛОМ

(резюме)

Решается смешанная задача о кручении кругового цилиндра конечной длины, спаянного по внутренней поверхности с жестким валом под действием касательных усилий, приложенных к внешней поверхности цилиндра и при однородных условиях для компонентов смещений и напряжений на его внутренней поверхности.

Полученные формулы легко поддаются численному счету.

Приводятся некоторые численные примеры для различной толщины стенок цилиндра.

Т. Л. МАРТИНОВИЧ

ПРУЖНА РІВНОВАГА ПЛАСТИНКИ З КРИВОЛІНІЙНИМ КОНТУРОМ, ПІДКРІПЛЕНИМ ПРУЖНИМ КІЛЬЦЕМ

Загальна постановка задачі про пружну рівновагу пластинки, край якої підкріплений тонким пружним кільцем, і виведення крайових умов з застосуванням їх до простіших задач, належить М. П. Шереметьєву [1].

При цьому підкріплювальне кільце розглядалося досить вузьким, і при аналітичному записі умов сумісної роботи пластинки і кільця припускалося, що дотик пластинки з кільцем відбувається вздовж осі кільця, тобто підкріплюване кільце вважалося за пружну лінію, наділену жорсткістю на згин і розтяг.

Для уточнення постановки задачі будемо вважати, що пластинка дотикається кільця вздовж крайніх волокон, еквідистатних осі кільця. Підкріплювальне кільце може бути такої ширини, щоб до нього ще була застосована гіпотеза нормального плоского перерізу. При складанні рівнянь рівноваги елемента кільця враховуються його розміри.

1. Позначимо вектор внутрішнього (усередненого по висоті) напруження, що передається на кільце з боку пластинки, через $\vec{F}^{(i)}$, а його компоненти по осях натуральної системи nt через $N^{(i)}$ і $T^{(i)}$. Тоді, очевидно, вектор напруження $\vec{F}_1^{(i)}$, що передається з боку кільця на пластинку, буде рівний $\vec{F}_1^{(i)} = -\vec{F}^{(i)}$.

На контурі спаяу пластинки з кільцем L повинні, очевидно, справджуватися такі умови, подані в комплексній формі:

$$\begin{aligned} u_1 - iv_1 &= u - iv; \\ N_1^{(i)} - iT_1^{(i)} &= N^{(i)} - iT^{(i)}, \end{aligned} \quad (1)$$

де через u_1 і v_1 позначені компоненти вектора зміщення точок контура L в декартових координатах xy , які відносяться до пластинки, а через u і v — ті самі величини для кільця.

Контурні рівності (1) можна виразити через дві аналітичні функції $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$ комплексного змінного $z = x + iy$; в результаті одержимо

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_1(t)} - \Phi_1(t) + e^{2ia} \{t\overline{\Phi_1'(t)} + \Psi_1(t)\} &= 2\mu i e^{ia} \frac{d}{ds} (u - iv); \\ \overline{\Phi_1(t)} + \Phi_1(t) - e^{2ia} \{t\overline{\Phi_1'(t)} + \Psi_1(t)\} &= N^{(i)} - iT^{(i)}, \text{ на } L. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут α — кут, утворений зовнішньою нормаллю n з додатним напрямом осі x ; $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ — для плоского напруженого стану; ν — коефіцієнт Пуассона; μ — модуль зсуву.

2. Розглянемо деформацію довільного волокна кільця, еквідистантного його осі. В нашому випадку вісь кільця буде плоска крива, розміщена в площині пластинки xy як до, так і після деформації.

Позначимо вектор переміщення довільної точки цього волокна через $\vec{\delta}$, його проекції на осі нерухомої системи координат xy через u, v , а на осі натуральної (рухомої) системи nt — через u_n і u_τ . Осі nt орієнтовані так само, як і осі xy .

Вектор

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\delta}}{ds} \quad (3)$$

можна розглядати як вектор відносної деформації волокна. При малих деформаціях проекція цього вектора на напрям дотичної до волокна дає, очевидно, відносне подовження волокна, а проекція його на напрям нормалі — кут повороту дотичної до волокна внаслідок його деформації, тобто

$$\varepsilon_\tau = e, \quad \varepsilon_n = -\theta. \quad (4)$$

Додатним напрямом кута повороту θ вважається той, що відповідає додатному повороту дотичної.

Векторна рівність (3) в системі координат nt набуде вигляду

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\delta}}{ds} + \left[\frac{d\alpha}{ds} \times \vec{\delta} \right], \quad (5)$$

де $\vec{\alpha} = \alpha \vec{z}^0$ — елементарний вектор повороту рухомої системи nt при зміні дуги s ; $\vec{z}^0$ — орт осі z ; $\frac{d}{ds}$ — знак локальної похідної.

Враховуючи, що

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{ds} \vec{z}^0 = \frac{1}{r} \vec{z}^0,$$

де r — радіус кривини недеформованого волокна кільця, з рівності (5) знаходимо

$$\begin{aligned} e &= \frac{du_\tau}{ds} + \frac{1}{r} u_n; \\ -\theta &= \frac{du_n}{ds} - \frac{1}{r} u_\tau. \end{aligned} \quad (6)$$

Співвідношення (6) в комплексній формі можемо подати так:

$$-(\theta + ie) = \frac{d}{ds} (u_n - iu_\tau) - \frac{i}{r} (u_n - iu_\tau), \quad (7)$$

або, враховуючи, що

$$e^{i\alpha} (u - iv) = u_n - iu_\tau,$$

а такому вигляді:

$$-(\theta + ie) = e^{ia} \frac{d}{ds} (u - iv). \quad (8)$$

У випадку скінченної деформації волокна, тобто деформації, сумірної з одиницею, відносно подовження волокна e і елементарний вектор повороту дотичної $\vec{\theta}$ визначаються за формулами:

$$e(2+e) = 2\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\delta}}{ds} + \left(\frac{d\vec{\delta}}{ds} \right)^2;$$

$$\vec{\theta} = \frac{1}{1+e} \left[\vec{\tau} \times \frac{d\vec{\delta}}{ds} \right].$$

3. В основу розрахунків кільця покладемо гіпотезу нормального жорсткого перерізу. Виходячи з цієї гіпотези, знайдемо залежність між переміщеннями точок довільного еквідистантного волокна і осі кільця, що лежать на спільній нормалі.

При малому куті повороту нормалі θ будемо мати

$$\vec{\delta} = \vec{\delta}_0 + y\vec{\theta}, \quad (9)$$

де $\vec{\delta}_0$ — вектор переміщення точок осі кільця, y — віддаль волокна кільця від осі в спільній площині. Для волокон, зміщених від осі кільця до центра кривини, y — від'ємне.

Підставляючи (9) в (3) і враховуючи залежність між диференціалами дуг волокон кільця при наявності гіпотези нормального перерізу, одержимо

$$\vec{\varepsilon} = \frac{r_0}{r} \vec{\varepsilon}_0 + y \left(\frac{d\vec{\theta}}{ds} \vec{\tau} - \frac{1}{r} \vec{\theta} n \right), \quad (10)$$

де r_0 — радіус кривини недеформованої осі кільця.

$$\frac{ds_0}{ds} = \frac{r_0}{r}, \quad r = r_0 + y,$$

З останнього векторного співвідношення знаходимо

$$e = \frac{r_0}{r} e_0 + y \frac{d\theta}{ds}. \quad (11)$$

Кут повороту дотичної θ один і той самий для всіх волокон, що також впливає з формул (10).

На підставі формули (11) співвідношення (8) набуде остаточно такого вигляду:

$$e^{ia} \frac{d}{ds} (u - iv) = - \left[\theta + i \left(\frac{r_0}{r} e_0 + y \frac{d\theta}{ds} \right) \right]. \quad (12)$$

4. Тепер розглянемо рівняння рівноваги елемента кільця. В проєкціях на осі натуральної системи координат $n\tau$ при нашому виборі їх

орієнтації ці рівняння, як неважко переконатися, можна подати в такому вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h} \left(\frac{dV_n}{ds_1} - \frac{1}{r_1} V_\tau \right) + N^{(i)} &= \frac{h^* r_2}{h r_1} N; \\ \frac{1}{2h} \left(\frac{dV_\tau}{ds_1} + \frac{1}{r_1} V_n \right) + T^{(i)} &= \frac{h^* r_2}{h r_1} T; \\ \frac{dM}{ds_1} - \frac{r_0}{r_1} V_n - 2h\varepsilon_1 T^{(i)} &= 2h^* \varepsilon_2 \frac{r_2}{r_1} T,\end{aligned}\quad (13)$$

де V_n і V_τ — компоненти головного вектора внутрішніх зусиль, що діють в довільному перерізі кільця, а N і T — компоненти вектора зовнішнього (усередненого по висоті) напруження, прикладеного до кільця, по осях натуральної системи nt ; M — момент внутрішніх зусиль в довільному перерізі кільця; r_1, r_2 — радіуси кривини крайніх волокон кільця, причому під r_1 ми будемо завжди розуміти радіус кривини того крайнього волокна, вздовж якого пластинка дотикається кільця; елемент дуги цього волокна ми позначили через ds_1 ; ε_1 і ε_2 — віддалі крайніх волокон від осі кільця в площині їх кривини; $2h$ — висота пластинки; $2h^*$ — висота того краю кільця, що не контактує з пластинкою.

З системи (13) знаходимо

$$N^{(i)} - iT^{(i)} = -\frac{1}{2h} \left[\frac{d}{ds_1} (V_n - iV_\tau) - \frac{i}{r_1} (V_n - iV_\tau) \right] + \frac{h^* r_2}{h r_1} (N - iT); \quad (14)$$

$$V_n = \frac{dM}{ds_1} + \varepsilon_1 \frac{dV_\tau}{ds_1} - 2h^* b \frac{r_2}{r_1} T, \quad (15)$$

де $b = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ — ширина кільця в площині його осі.

5. При малих деформаціях, приймаючи гіпотезу нормального перерізу і припущення про те, що волокна кільця не тиснуть одне на одне, закон Гука для криволінійного кільця (стержня) зводиться до співвідношень [2]:

$$e_0 = \frac{V_\tau}{g_1} + \frac{M}{r_0 g_1}; \quad (16)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{r_0}{r} \left[\frac{M}{g_2} + \frac{M}{r_0^2 g_1} + \frac{V_\tau}{r_0 g_1} \right],$$

де $g_1 = E^* F$ — жорсткість кільця на розтяг; $g_2 = E^* I'$ — жорсткість кільця на згин; F — площа нормального перерізу кільця; E^* — модуль Юнга для кільця.

$$I' = \int_F \frac{r_0}{r_0 + y} y^2 dF.$$

Для прямокутного перерізу кільця величини I' можна подати рядом [2]:

$$I' = \frac{h^* b^3}{6} \left(1 + \frac{3b^2}{20r_0^2} + \frac{3b^4}{112r_0^4} + \dots \right).$$

На підставі підрахунків можна переконатися, що вже при $r_0 = 4b$ з точністю до 1% величину I' можна замінити моментом інерції перерізу

кільця. Тому при $r_0 \geq 4b$ величину I' в наших формулах замінимо на I_z :

$$I' \approx I_z = \frac{h^* b^3}{6} = \frac{b^2}{12} F.$$

Останнє припущення приводить до такої залежності між жорсткостями кільця:

$$g_1 = \frac{12}{b^2} g_2, \quad r_0 \geq 4b.$$

Нормальні напруження в перерізі кільця визначаються за формулою

$$\sigma = E^* \cdot e = E^* \frac{r_0}{r} e_0 + E^* y \frac{d\theta}{ds},$$

яка, на підставі (16), зведеться до такої:

$$\sigma = \frac{V_\tau}{F} + \frac{M}{r_0 F} + \frac{M y}{I' r_0 + y}. \quad (17)$$

На основі співвідношень (12), (14), (16), одержаних в результаті розгляду деформованого стану кільця, крайові умови (2) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \kappa \overline{\Phi_1(t)} - \Phi_1(t) + e^{2ia} \{ \overline{t\Phi_1'(t)} + \Psi_1(t) \} = 2\mu \left\{ \left(\frac{V_\tau}{g_1} - i \int_0^{s_1} \frac{V_\tau}{r_1 g_1} ds_1 \right) + \right. \\ \left. + \left(MG_1 - i \int_0^{s_1} MG_2 ds_1 \right) - i\theta_0 \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \overline{\Phi_1(t)} + \Phi_1(t) - e^{2ia} \{ \overline{t\Phi_1'(t)} + \Psi_1(t) \} = -\frac{1}{2h} \left[\frac{d}{ds_1} (V_n - iV_\tau) - \frac{i}{r_1} (V_n - iV_\tau) \right] + \\ + \frac{h^* r_2}{h r_1} (N - iT), \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} V_n = \frac{dM}{ds_1} + \varepsilon_1 \frac{dV_\tau}{ds_1} - 2h^* b \frac{r_2}{r_1} T; \\ G_1 = \frac{1}{r_0 g_1} - \varepsilon_1 \frac{r_0}{r_1 g_2}; \quad G_2 = \frac{1}{r_1 r_0 g_1} + \frac{r_0}{r_1 g_2}; \end{aligned}$$

θ_0 — значення кута повороту дотичної при $s=0$.

В тому випадку, коли радіус кривини волокна, вздовж якого пластинка спаяна з кільцем, більший від радіуса кривини осі кільця, тобто $r_1 > r_0$, у виразах (19) потрібно ε_1 і b замінити на $-\varepsilon_1$ і $-b$.

Одержані контурні умови (18) будуть вихідними при розв'язуванні задач про пружну рівновагу пластинки, край якої підкріплений кільцем. Поперечний переріз кільця може бути довільної форми, але симетричний відносно площини кривини осі, тобто площини пластинки.

6. Для прикладу розглянемо нескінченну ізотропну пластинку з круговим отвором радіуса r_1 , край якого підкріплений пружним кільцем сталого перерізу ширини b .

Для простоти обчислень будемо вважати, що кільце вільне від дії зовнішніх зусиль, і напруження на нескінченності обмежені:

$$X_x^\infty = p, \quad Y_y^\infty = q, \quad X_y^\infty = 0.$$

Покладемо $z = \omega(\zeta) = r_1 \zeta$, тоді $t = r_1 \sigma$, $\sigma = e^{i\theta}$, де θ — кут, утворений радіусом r з полярною віссю площини ζ ; крайові умови (18) в цьому випадку зведуться до таких:

$$\begin{aligned} \kappa \overline{\Phi(\sigma)} - \Phi(\sigma) + \sigma^2 \left\{ \frac{1}{\sigma} \Phi'(\sigma) + \Psi(\sigma) \right\} &= 2\mu \left\{ \left(\frac{V_\tau}{g_1} - \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{V_\tau}{g_1} \frac{d\sigma}{\sigma} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(MG_1 - \int_{\sigma_0}^{\sigma} MG_2 r_1 \frac{d\sigma}{\sigma} \right) - i\theta_0 \right\}; \\ \overline{\Phi(\sigma)} + \Phi(\sigma) - \sigma^2 \left\{ \frac{1}{\sigma} \Phi'(\sigma) + \Psi(\sigma) \right\} &= \\ = \frac{\sigma^2}{2hr_1^2} \left(\frac{d^2 M}{d\sigma^2} - \varepsilon_1 \frac{d^2 V_\tau}{d\sigma^2} \right) - \frac{1}{2hr_1} \left(\sigma \frac{dV_\tau}{d\sigma} - V_\tau \right) &\text{ на } \gamma. \end{aligned} \quad (20)$$

Тут

$$\Phi_1[\omega(\zeta)] = \Phi(\zeta), \quad \Psi_1[\omega(\zeta)] = \Psi(\zeta).$$

Функції $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ будуть голоморфні в області пластинки, включаючи і нескінченно віддалену точку, тому їх можна подати у формі ряду

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \zeta^{-n}, \quad \Psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \zeta^{-n}, \quad (21)$$

причому $A_1 = 0$, $B_1 = 0$, що є наслідком голоморфності функцій $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$.

Коефіцієнти A_0 і B_0 характеризують напружений стан пластинки на нескінченності і відповідно дорівнюють

$$A_0 = \frac{p+q}{4}, \quad B_0 = -\frac{p-q}{2}. \quad (22)$$

Функції внутрішніх зусиль в перерізі кільця V_τ і M подано в формі комплексних рядів Фур'є:

$$\begin{aligned} V_\tau &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n \sigma^{-n}; \\ M &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sigma^n + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n \sigma^{-n}. \end{aligned} \quad (23)$$

Підставляючи (21) і (23) в крайові умови (20) і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях σ , приходимо до таких систем алгебраїчних рівнянь:

$$\kappa \bar{A}_0 - A_0 + B_2 = 2\mu \left(\frac{1}{g_1} \alpha_0 + G_1 \beta_0 \right) - \frac{2\mu}{g_1} C_1 - 2\mu r_1 G_2 \cdot C_2 - 2\mu i\theta_0;$$

$$\begin{aligned}
\bar{A}_0 + A_0 - B_2 &= \frac{\alpha_0}{2hr_1}, \quad \frac{\alpha_0}{g_1} + r_1 G_2 \beta_0 = 0; \\
\kappa \bar{A}_1 + B_1 &= 2\mu \beta_1 (G_1 - r_1 G_2); \\
\kappa \bar{A}_2 + B_0 &= 2\mu \left[\frac{\alpha_2}{2g_1} + \beta_2 \left(G_1 - \frac{r_1 G_2}{2} \right) \right]; \\
A_2 - B_0 &= \frac{1}{2h} \left[\frac{2\beta_2}{r_1^2} - \frac{1}{r_1} \left(\frac{2\varepsilon_1}{r_1} + 1 \right) \alpha_2 \right]; \\
\kappa \bar{A}_n &= 2\mu \left[\frac{\alpha_n}{g_1} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \beta_n \left(G_1 - \frac{r_1 G_2}{n} \right) \right] \Bigg\} n=3, 4, 5, \dots; \\
\bar{A}_n &= \frac{1}{2h} \left[\frac{n(n-1)}{r_1^2} \beta_n - \frac{n-1}{r_1} \left(\frac{\varepsilon_1}{r_1} n + 1 \right) \alpha_n \right] \Bigg\} \\
-(1+n) A_n + B_{n+2} &= 2\mu \left[\frac{\bar{\alpha}_n}{g_1} \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \bar{\beta}_n \left(G_1 + \frac{r_1 G_2}{n} \right) \right] \Bigg\} n=1, 2, \dots \\
(1+n) A_n - B_{n+2} &= \frac{1}{2h} \left[\frac{n(n+1)}{r_1^2} \bar{\beta}_n + \frac{n+1}{r_1} \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{r_1} n \right) \bar{\alpha}_n \right] \Bigg\}
\end{aligned} \tag{24}$$

Тут C_1 і C_2 — стала інтегрування:

$$C_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - \bar{\alpha}_n}{n}, \quad C_2 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n - \bar{\beta}_n}{n}.$$

З систем (24) знаходимо

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{2h(1+\kappa)g_1G_2r_1}{g_1G_2 - 4h\mu(G_1 - r_1G_2)} \cdot A_0; \\
\beta_0 &= - \frac{2h(1+\kappa)}{g_1G_2 - 4h\mu(G_1 - r_1G_2)} \cdot A_0; \\
\alpha_2 &= - \frac{2h(1+\kappa)r_1^2g_1(N-6)}{Q(N-6) - 3P(L+2\kappa)} \cdot B_0; \\
\beta_2 &= \frac{6h(1+\kappa)r_1^2P}{Q(N-6) - 3P(L+2\kappa)} \cdot B_0; \\
A_2 &= \frac{R(N-6) - 3P(L-2)}{Q(N-6) - 3P(L+2\kappa)} \cdot B_0; \\
B_2 &= \frac{(1-\kappa)g_1G_2 - 8h\mu(G_1 - r_1G_2)}{g_1G_2 - 4h\mu(G_1 - r_1G_2)} \cdot A_0; \\
B_4 &= \frac{3(N-6)(S+2r_1g_1) - 9P(L+2\kappa)}{Q(N-6) - 3P(L+2\kappa)} B_0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Тут

$$\begin{aligned}
N &= -2hr_1^2\mu(2G_1 + r_1G_2); \\
L &= -2hr_1^2\mu(2G_1 - r_1G_2); \\
P &= -2hr_1^2\mu - g_1(r_1 - 2\varepsilon_1); \\
Q &= -2hr_1^2\mu - g_1\kappa(r_1 + 2\varepsilon_1); \\
R &= -2hr_1^2\mu + g_1(r_1 + 2\varepsilon_1); \\
S &= -2hr_1^2\mu + g_1\kappa(r_1 - 2\varepsilon_1).
\end{aligned} \tag{26}$$

Решта коефіцієнтів дорівнюють нулеві. Сталі C_1 , C_2 і θ_0 перетворюються в нуль внаслідок того, що всі коефіцієнти шуканих функцій є величини дійсні. При $\varepsilon_1=0$ коефіцієнти (25) збігаються з відповідними коефіцієнтами, наведеними в [1].

Для підкріплювального кільця прямокутного перерізу коефіцієнти (25) виразимо в безрозмірних величинах δ і γ , поклавши

$$\delta = \frac{b}{r_1}; \quad \gamma = \frac{h}{h^*}; \quad I' \approx I_z = \frac{h^* b^3}{6}; \quad \varepsilon_1 = \frac{b}{2};$$

$$g_1 = 2h^* b E^*; \quad g_2 = E^* \frac{h^* b^3}{6}.$$

Одержимо

$$\alpha_0 = \frac{2hb(1+\kappa)[\delta^2+3(2-\delta)^2]E^*}{E^*[\delta^3+3\delta(2-\delta)^2]+3\gamma\mu(2-\delta)^3} \cdot A_0;$$

$$\beta_0 = -\frac{1}{2} \frac{2hb^2(1+\kappa)\delta(2-\delta)E^*}{E^*[\delta^3+3\delta(2-\delta)^2]+3\gamma\mu(2-\delta)^3} \cdot A_0;$$

$$B_2 = \frac{(1-\kappa)E^*[\delta^3+3\delta(2-\delta)^2]+6\gamma\mu(2-\delta)^3}{E^*[\delta^3+3\delta(2-\delta)^2]+3\gamma\mu(2-\delta)^3} \cdot A_0;$$

$$L = -\frac{2\mu\gamma[\delta^2-3(1-\delta)(2-\delta)^2]}{E^*\delta^3(2-\delta)};$$

$$N = -\frac{6\mu\gamma[\delta^2+(1+\delta)(2-\delta)^2]}{E^*\delta^3(2-\delta)};$$

$$P = -2h^*r_1^2[\gamma\mu+E^*\delta(1-\delta)];$$

$$Q = -2h^*r_1^2[\gamma\mu+E^*\delta(1+\delta)];$$

$$R = -2h^*r_1^2[\gamma\mu-E^*\delta(1+\delta)];$$

$$S = -2h^*r_1^2[\gamma\mu-E^*\delta(1-\delta)];$$

$$r_1g_1 = 2h^*r_1^2E^*\delta.$$
(27)

Знаючи функції $\Phi(\xi)$ і $\Psi(\xi)$, можемо визначити напруження, що виникають в пластинці, за формулами

$$\sigma_\vartheta = 2A_0 + \frac{r_1^2}{r^2} B_2 + \left(\frac{r_1^4}{r^4} B_4 + B_0 \right) \cos 2\vartheta;$$

$$\sigma_r = 2A_0 - \frac{r_1^2}{r^2} B_2 + \left(4 \frac{r_1^2}{r^2} A_2 - \frac{r_1^4}{r^4} B_4 - B_0 \right) \cos 2\vartheta;$$

$$\tau_{r\vartheta} = \left(B_0 - \frac{r_1^4}{r^4} B_4 + 2 \frac{r_1^2}{r^2} A_2 \right) \sin 2\vartheta.$$
(29)

Нормальні напруження в перерізі кільця визначаються за формулою (17).

Для підкріплюваного кільця прямокутного перерізу формулу (17) в безрозмірних величинах можна подати так:

$$\sigma = \frac{V_\tau}{2h^*b} + \frac{\eta M}{2h^*b^2};$$
(30)

де

$$\eta = \frac{8k(1-\delta)(\delta^2-3\delta+3)-3(2-\delta)^3}{k\delta(1-\delta)(2-\delta)};$$

$$k = \frac{r}{r_2}, \quad \delta = \frac{b}{r_1}; \quad \frac{r_1}{r} = \frac{1}{k(1-\delta)}.$$

Зусилля в перерізі кільця визначаються такими формулами:

$$\begin{aligned} V_r &= \alpha_0 + 2\alpha_2 \cos 2\vartheta; \\ M &= \beta_0 + 2\beta_2 \cos 2\vartheta; \\ V_n &= -\frac{4}{r_1} (\beta_2 - \epsilon_1 \alpha_2) \sin 2\vartheta. \end{aligned} \quad (31)$$

В таблиці наведені результати обчислень σ_ϑ для мідної пластинки, підкріпленої сталним кільцем різної ширини, при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$. Пластинка розтягується в напрямку осі x зусиллям P . Пружні сталі беруться такі, як і в працях [1] і [3]: $\mu = 4,42 \cdot 10^5$ кг/см², $\kappa = 2,08$, $E^* = 2,1 \cdot 10^6$ кг/см², $\gamma = 1$, $\nu = 0,3$.

Для порівняння наводяться в таблиці також значення $\sigma_\vartheta = \sigma_{1\vartheta}$, одержані при $\epsilon_1 = 0$, і значення $\sigma_\vartheta = \sigma_{2\vartheta}$, взяті з праці Г. М. Савина [3] для аналогічної задачі, в якій напружений стан в кільці визначається методом плоскої задачі. Напруження в таблиці дані в частинах від P .

Через σ_ϑ^* позначено напруження, яке відповідає тому випадкові, коли при складанні рівнянь рівноваги елемента кільця не враховувати його розмірів, тобто у виразі (15) для V_n покласти $\epsilon_1 = 0$.

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$	$\delta = \frac{1}{4}$				$\delta = \frac{1}{16}$			
κ	σ_ϑ	σ_ϑ^*	$\sigma_{1\vartheta}$	$\sigma_{2\vartheta}$	σ_ϑ	σ_ϑ^*	$\sigma_{1\vartheta}$	$\sigma_{2\vartheta}$
1,00	4,780	5,039	4,098	4,416	4,943	4,942	4,633	4,958
1,02	4,557	4,783	3,889	4,197	4,698	4,694	4,399	4,720
1,04	4,342	4,536	3,688	3,995	4,462	4,455	4,174	4,503
$1\frac{1}{15}$	4,069	4,221	3,433	3,751	$\frac{4,161}{2,353}$	$\frac{4,151}{2,354}$	$\frac{3,888}{2,402}$	$\frac{4,240}{2,349}$
1,20	2,883	2,858	2,324	2,843	1,910	1,911	1,942	1,908
$1\frac{1}{3}$	$\frac{1,935}{1,210}$	$\frac{1,767}{1,191}$	$\frac{1,437}{1,596}$	$\frac{2,256}{1,301}$	1,646	1,646	1,666	1,644
1,40	1,188	1,173	1,508	1,262				
1,60	1,141	1,132	1,332	1,182				

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$	$\delta = \frac{1}{51}$			
k	σ_ϑ	σ_ϑ^*	$\sigma_{1\vartheta}$	$\sigma_{2\vartheta}$
1,00	5,264	5,256	5,143	5,286
1,02	$\frac{5,014}{2,770}$	$\frac{5,007}{2,767}$	$\frac{4,898}{2,773}$	$\frac{5,044}{2,776}$
1,04	2,654	2,652	2,658	2,651
$1\frac{1}{15}$	2,516	2,514	2,519	2,513

В наведених таблиці числа, написані у вигляді дробу, характеризують напруження σ_z на контурі спаю кільця з пластинкою: чисельник характеризує напруження в кільці, а знаменник — напруження в пластинці.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Пластинки с подкрепленным краем. Изд. Львов. ун-та, 1960.
2. М. М. Филоненко-Бородич и др. Курс сопротивления материалов, т. I. М., 1955.
3. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. М., 1951.

Т. Л. МАРТЫНОВИЧ

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИНКИ С КРИВОЛИНЕЙНЫМ КОНТУРОМ, ПОДКРЕПЛЕННЫМ УПРУГИМ КОЛЬЦОМ

(резюме)

В работе дается вывод граничных условий задачи об упругом равновесии изотропной пластинки, край которой подкреплен упругим стержнем (кольцом) постоянного сечения, с учетом контактных касательных напряжений от изгиба стержня.

В основу расчета стержня положена гипотеза нормального жесткого сечения.

Приводится числовой пример для бесконечной пластинки с круговым отверстием, подкрепленным тонким кольцом.

Стаття надійшла у видавництво в кінці 1962 р.

І. О. ПРУСОВ

НАПРУЖЕНИЙ СТАН В ПЛОЩИНІ З ЗАПРЕСОВАНОЮ ШАЙБОЮ З ЩІЛИНАМИ

Нехай в отвір, обмежений колом L радіуса R , недеформованої безмежної ізотропної площини вставляється рівномірно стиснута шайба з щілинами на дугах $L'_k = a_k b_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) кола L , і на дугах $L''_k = b_k a_{k+1}$ склеюється з матеріалом площини. Потім знімаються сили, якими спочатку була деформована шайба.

Приймемо, що шайба в недеформованому стані має радіус $R' = R + \varepsilon$, а краї щілин при деформації не стикаються між собою.

Позначимо через $L' = L'_1 + L'_2 + \dots + L'_n$ і $L'' = L''_1 + L''_2 + \dots + L''_n$ сукупність дуг L'_k і L''_k ; S_1 і S_2 — зовнішність і внутрішність L , μ_j і κ_j — пружні сталі S_j . Треба визначити напружений стан в S_j , який залежить від посадки ε , а також розтягуючих зусиль на безмежності, навантаження на щілинах L'_k та зосереджених сил $X_j + iY_j$ і моментів M_j , прикладених в точках z_j області S_j .

Без врахування посадки і зосереджених сил розв'язок аналогічної задачі різними методами наведений в роботах [2—5]. Наведений нижче розв'язок за методом аналогічний [4—5]. Деякі випадки урахування зосереджених сил розглянуті іншим методом в роботі [6].

Виберемо початок координат в центрі кола L та позначимо через $\Phi_j(z)$ і $\Psi_j(z)$ комплексні потенціали в S_j ($j=1, 2$).

Ідучи слідом за М. І. Мусхелішвілі [1], введемо функції

$$\Omega_j(z) = -\bar{\Phi}_j\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z} \bar{\Phi}'_j\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2} \bar{\Psi}_j\left(\frac{R^2}{z}\right). \quad (1)$$

Тоді напружено-деформований стан в S_j визначається за формулами

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2[\Phi_j(z) + \bar{\Phi}_j(z)] \quad (z = re^{i\theta}); \quad (2)$$

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = \Phi_j(z) - \frac{R^2}{r^2} \Omega_j\left(\frac{R^2}{z}\right) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)[\bar{\Phi}_j(z) - z\bar{\Phi}'_j(z)]; \quad (3)$$

$$2\mu_j \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = iz \left\{ \kappa_j \Phi_j(z) + \frac{R^2}{r^2} \Omega_j\left(\frac{R^2}{z}\right) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)[\bar{\Phi}_j(z) - z\bar{\Phi}'_j(z)] \right\}, \quad (4)$$

а переміщення $u + iv$ і головний вектор $X + iY$ зусиль, які діють на дугу AB справа при переміщенні від A до B , за формулами

$$\mu_j(u + iv) = \kappa_j \Phi_j(z) - \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) z \bar{\Phi}_j(z) + \omega_j\left(\frac{R^2}{z}\right) + C; \quad (5)$$

$$X + iY = -i \left[\Phi_j(z) + \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) z \bar{\Phi}_j(z) - \omega_j\left(\frac{R^2}{z}\right) \right]_A^B, \quad (6)$$

де

$$\omega_j(z) = \int \Omega_j(z) dz, \quad \Phi_j(z) = \int \Phi_j(z) dz.$$

При $|z|$ великих функція $\Phi_1(z)$ має вигляд

$$\Phi_1(z) = \Gamma - \frac{X_0 + iY_0}{2\pi(1+\kappa_1)} - \frac{1}{z} + o\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (7)$$

Функції $\Phi_j(z)$ і $\Omega_j(z)$ можна зобразити у вигляді

$$\Phi_j(z) = A_j(z) + \Phi_{0j}(z); \quad \Omega_j(z) = B_j(z) + \Omega_{0j}(z), \quad (8)$$

де

$$B_j(z) = -\frac{\kappa_j p_j}{z-\alpha} + \frac{[\bar{p}_j(R^2 - z_j \bar{z}_j) + iM_{0j} z_j] R^2}{z_j^3 (z - \alpha_j)^2} + k_j \left[\frac{\bar{\Gamma}' R^2}{z^2} + \frac{\kappa_1 (X_0 + iY_0)}{2\pi z (1+\kappa_1)} \right];$$

$$A_j(z) = -\frac{p_j}{z-z_j}, \quad \alpha_j = \frac{R^2}{z_j}, \quad p_j = \frac{X_j + iY_j}{2\pi(1+\kappa_j)}, \quad k_j = \begin{cases} 1 & \text{при } j=1, \\ 0 & \text{при } j=2; \end{cases}$$

$$\Gamma = \frac{1}{4}(N_1 + N_2), \quad \Gamma' = \frac{1}{2}(N_2 - N_1)e^{-2i\alpha}, \quad M_{0j} = \frac{M_j}{2\pi};$$

N_1 і N_2 — головні напруження на нескінченності; α — кут, утворений віссю, що відповідає N_1 , та віссю Ox ; $X_0 + iY_0$ — головний вектор всіх зовнішніх зусиль, прикладених на скінченних віддальх від початку координат; $\Phi_{0j}(z)$ і $\Omega_{0j}(z)$ — голоморфні функції в S_j .

Припустимо, що точка z_2 прикладення сили в S_2 не збігається з точкою $z=0$. Для того, щоб у точці $z=0$ напружено-деформований стан був обмеженим, функції $\Phi_2(z)$ і $\Omega_2(z)$ повинні задовольняти деякі умови.

Так, якщо в околі нуля і безмежності

$$\Phi_2(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots \quad (|z| < R);$$

$$\Omega_2(z) = B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \dots \quad (|z| > R),$$

то для обмеженості напружено-деформованого стану в точці $z=0$ необхідно й достатньо, щоб

$$A_0 + \bar{B}_0 = 0, \quad B_1 = 0. \quad (9)$$

З рівнянь (3) і (4) маємо на L

$$\begin{aligned} \Phi_1^-(t) - \Omega_1^+(t) &= (\sigma_r + i\tau_{r\theta})^-; & \kappa_1 \Phi_1^-(t) + \Omega_1^+(t) &= 2\mu_1 g'(t)^-; \\ \Phi_2^+(t) - \Omega_2^-(t) &= (\sigma_r + i\tau_{r\theta})^+; & \kappa_2 \Phi_2^+(t) + \Omega_2^-(t) &= 2\mu_2 g'(t)^+. \end{aligned} \quad (10)$$

Тут $g'(t)$ — похідна по t від переміщень $u + iv$.

Лінійна комбінація рівнянь (10) дає

$$[\Phi_2(t) - \Omega_1(t)]^+ + [\Phi_1(t) - \Omega_2(t)]^- = 2p(t), \quad (11)$$

$$[\Phi_2(t) + \Omega_1(t)]^+ - [\Phi_1(t) + \Omega_2(t)]^- = 2q(t); \quad (12)$$

$$[r_0 \kappa_2 \Phi_2(t) - \Omega_1(t)]^+ - [\kappa_1 \Phi_1(t) - r_0 \Omega_2(t)]^- = 2\mu_1 g'_1(t); \quad (13)$$

$$[r_0 \kappa_2 \Phi_2(t) + \Omega_1(t)]^+ + [\kappa_1 \Phi_1(t) + r_0 \Omega_2(t)]^- = 2\mu_1 g'_2(t), \quad (14)$$

де

$$2p(t) = (\sigma_r + i\tau_{r\theta})^+ + (\sigma_r + i\tau_{r\theta})^-; \quad 2q(t) = (\sigma_r + i\tau_{r\theta})^+ - (\sigma_r + i\tau_{r\theta})^-;$$

$$g'_k(t) = g'_k(t)^+ + (-1)^k g'_k(t)^-; \quad g'_1(t) = -\varepsilon R^{-1} \text{ на } L'', \quad r_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Далі покладемо, що

$$\begin{aligned}\Phi_2(z) + \Omega_1(z) &= F(z)(S_2); & r_0 x_2 \Phi_2(z) - \Omega_1(z) &= Q(z) - \varepsilon_0(S_2); \\ \Phi_1(z) + \Omega_2(z) &= F(z)(S_1); & x_1 \Phi_1(z) - r_0 \Omega_2(z) &= Q(z)(S_1),\end{aligned}\quad (15)$$

де функції $F(z)$ і $Q(z)$ такі, що $F^+(t) = F^-(t)$ на L'' , $Q^+(t) = Q^-(t)$ на L'' , $\varepsilon_0 = 2\mu_1 \varepsilon R^{-1}$. При цьому, як неважко переконатися, умови на проміжках спаю L'' виконуються тотожно при будь-яких умовах на щілинах L' . Явний вираз функцій $F(z)$ і $Q(z)$ знайдемо, задовольняючи інші крайові умови.

Розглядаючи лише випадок першої основної задачі, з рівнянь (11), (12) і (15), після нескладних перетворень, маємо

$$\begin{aligned}F^+(t) - F^-(t) &= 2q(t) \text{ на } L; \\ [Q(t) + mF(t)]^+ + \lambda[Q(t) + mF(t)]^- &= f(t) + \varepsilon_0 \text{ на } L',\end{aligned}\quad (16)$$

де

$$\begin{aligned}m &= \frac{r_0(1-x_1x_2)}{r_0(x_2+1)+x_1+1}; & \lambda &= \frac{1+r_0x_2}{r_0+x_1}; \\ f(t) &= (1+r_0x_2) \left[P(t) + \frac{r_0(x_2+1)-x_1-1}{r_0(x_2+1)+x_1+1} q(t) \right].\end{aligned}$$

Враховуючи (8) і (15), розв'язки рівнянь (16) можна зобразити у вигляді

$$F(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{L'} \frac{q(t) dt}{t-z} + D_0 + \sum_j [A_j(z) + B_j(z)]; \quad (17)$$

$$Q(z) + mF(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{L'} \frac{f(t) dt}{X^+(t)(t-z)} + X(z)[P_n(z) + R_n(z)] + \frac{\varepsilon_0}{1+\lambda}, \quad (18)$$

де

$$X(z) = \prod_k (z-a_k)^\gamma (z-b_k)^{\bar{\gamma}}, \quad \gamma = -\frac{1}{2} + i\beta, \quad \beta = \frac{\ln \lambda}{2\pi};$$

$$R_n = \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} + \sum_j \left[U_j A_j(z) + V_j B_j(z) + \frac{V_j^0}{R^2 - z \bar{z}_j} \right];$$

$$U_j = \frac{(r_0+x_1)\lambda_2}{X(z_j)}, \quad V_j = -\frac{(1+r_0x_2)\lambda_2}{X(\bar{z}_j)};$$

$$V_j^0 = V_j \left[\bar{P}_j(\bar{z}_j)^{-1} (R^2 - z_j \bar{z}_j) R^2 + \frac{iM_j R^2}{2\pi} \right] \sum_k \left(\frac{\gamma}{R^2 - z_j a_k} + \frac{\bar{\gamma}}{R^2 - z_j b_k} \right);$$

C_k і D_k — довільні сталі, $P_n(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \dots + C_n$.

Позначивши праву частину (18), за винятком останнього доданка, через $E(z)$, з (15) будемо мати

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) &= \frac{E(z)}{r_0+x_1} + \lambda_1 F(z) + \varepsilon'; & \Phi_2(z) &= \frac{E(z)}{1+r_0x_2} + \lambda_2 F(z) - \varepsilon'; \\ \Omega_1(z) &= -\frac{E(z)}{1+r_0x_2} + \lambda_1 F(z) + \varepsilon'; & \Omega_2(z) &= -\frac{E(z)}{r_0+x_1} + \lambda_2 F(z) - \varepsilon'; \\ N &= r_0(1+x_2) + x_1 + 1; & \lambda_1 &= \frac{r_0(1+x_2)}{N}; & \lambda_2 &= \frac{1+x_1}{N}; & \varepsilon' &= \frac{2\mu_1 \varepsilon}{RN}.\end{aligned}\quad (19)$$

Довільні сталі, які входять в розв'язок (19), знайдемо за умовами (7), (9) і умовою однозначності переміщень при обході щілин L'_k , яка дає $n-1$ незалежних рівнянь

$$\int_{L'_k} [\kappa_1 \Phi_1^-(t) + \Omega_1^+(t)] dt = r_0 \int_{L'_k} [\kappa_2 \Phi_2^+(t) + \Omega_2^-(t)] dt. \quad (20)$$

Причому друга з умов (9) виконується автоматично при виконанні умови (7).

Аналогічно розв'язується друга основна задача, враховуючи (13), (14), (15), а також змішана задача на підставі (15) і лінійної комбінації (10). Попередніми формулами визначається термопружний стан, враховуючи, що $\varepsilon = R[\alpha_2(T_2 - T_0) - \alpha_1(T_1 - T_0)]$, де α_j , T_j — лінійний коефіцієнт розширення і температура S_j ; T_0 — початкова температура S_j .

Якщо лінія L розділу неоднорідності пряма, покладемо, що $\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon' = 0$ і позначимо через S_1 і S_2 нижню і верхню півплощини. Інші позначення такі, як і в попередньому випадку. Тоді напружено-деформований стан в S_j визначається за формулами

$$X_x + Y_y = 2[\Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(\bar{z})}](z = x + iy); \quad (21)$$

$$Y_y - iX_x = \Phi_j(z) - \overline{\Phi_j(\bar{z})} + (z - \bar{z})\overline{\Phi_j'(z)}; \quad (22)$$

$$2\mu_j \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \kappa_j \Phi_j(z) + \Omega_j(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi_j'(z)}. \quad (23)$$

У цьому випадку умови на L також приводяться до (10—14), а розв'язок задачі визначається за формулами (19), враховуючи, що

$$A_j(z) = -\frac{p_j}{z - z_j}; \quad B_j(z) = -\frac{\kappa_j p_j}{z - z_j} + \frac{\overline{p_j}(z_j - \bar{z}_j) - iM_{0j}}{(z - z_j)^2}; \quad M_{0j} = \frac{M_j}{2\pi}; \quad (24)$$

$$D_1 = D_2 = 0; \quad V_j^0 = -[\overline{p_j}(z_j - \bar{z}_j) - iM_{0j}] \sum_k \left(\frac{\gamma}{z_j - a_k} + \frac{\bar{\gamma}}{\bar{z}_j - b_k} \right) V_j.$$

Довільні сталі визначаються за умовами (20) та умовами на безмежності.

Приклад. Запресована шайба з одною щілиною. Нехай матеріали шайби і площини однакові, зовнішнє навантаження відсутнє, а щілина з центральним кутом 2ω симетрична відносно осі Ox . Тоді функції $E(z)$ і $F(z)$ в (19) будуть

$$E(z) = X(z)(C_0 z + C_1 R); \quad F(z) = D_0; \quad X(z) = (z - a_1)^{-1/2} (z - b_k)^{-1/2}; \quad (25)$$

$$C_0 = -\frac{4\mu\varepsilon}{(3 - \cos \omega)R}, \quad D_0 = \frac{2(1 + \cos \omega)\varepsilon\mu}{(1 + \kappa)(3 - \cos \omega)R}; \quad C_1 = -C_0 \cos \omega.$$

Компоненти напружень в пластинці на лінії спаю L'' такі:

$$\sigma_r = \frac{2(1 + \cos \omega) \sin \frac{1}{2} \theta}{(1 + \kappa) \sqrt{2 |\cos \omega - \cos \theta|}} C_0; \quad \tau_{r\theta} = -\frac{2(1 - \cos \omega) \cos \frac{1}{2} \theta}{(1 + \kappa) \sqrt{2 |\cos \omega - \cos \theta|}} C_0. \quad (26)$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.

2. Д. В. Грилицький. Основні граничні задачі для безмежної пластинки, спаяної з шайбою з розрізами на лінії спаю. Питання механіки і математики. Вид. Львів. ун-ту, вип. 9, 1962.

3. Г. П. Черепанов. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 1, 1961.

4. І. О. Прусов. Напружений стан в неоднорідній площині з щілинами по жоловій лінії розділу неоднорідності. «Прикладна механіка», т. 7, в. 6, 1961.

5. І. О. Прусов. Зауваження до статті І. О. Прусова, «Прикладна механіка», т. 8, в. 5, 1962.

6. Д. В. Грилицький. Докторская диссертация, 1964.

И. А. ПРУСОВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ПЛОСКОСТИ С ЗАПРЕССОВАННОЙ ШАЙБОЙ СО ЩЕЛЯМИ

(резюме)

Приведено решение задачи о напряженном состоянии упругой изотропной пластинки с запрессованной шайбой со щелями с учетом внешней нагрузки на краях щелей и сосредоточенных воздействий в произвольной точке области. При отсутствии посадочных напряжений формулами (19—24) определяется решение аналогичной задачи для спаянных со щелями полуплоскостей из разных материалов.

Стаття надійшла у видавництво в 1963 р.

Н. П. ФЛЕЙШМАН, Ю. Г. РОЗЕНТАЛЬ

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ВІДКРИТОЇ ТОНКОСТІННОЇ КОНСТРУКЦІЇ, ЯКА СКЛАДАЄТЬСЯ З ПЛАСТИН І ОБОЛОНОК

В наших роботах [1] і [2] досліджувався напружений стан в тонкостінній просторовій конструкції коритного профілю, що складається з трьох вузьких смуг нескінченної довжини. При розв'язанні цієї задачі приймалось спрощуюче припущення про нерозтяжність серединних площин цих смуг.

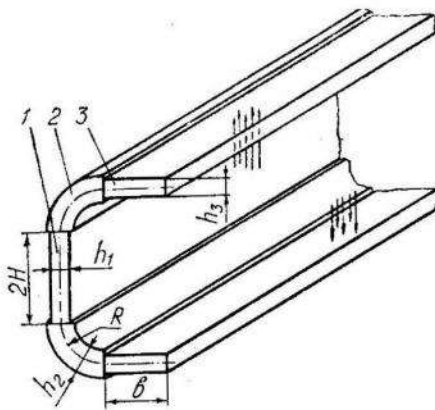


Рис. 1

В даній роботі розглядається більш загальна задача для тонкостінної конструкції (рис. 1), що складається з двох паралельних смуг 3 (полок профілю), двох чвертькругових циліндричних оболонок 2 і смуги 1 (стілки профілю); припущення про нерозтяжність серединних поверхонь відкинуто і враховано їх деформації.

Приймаємо, що довжина конструкції нескінченно велика. Зовнішнє навантаження вважаємо прикладеним до полк 3 на достатній відстані від

поперечних опор. На навантаження накладається єдине обмеження: головний вектор його повинен дорівнювати нулю. При розв'язанні даної задачі використовуються методи теорії згину тонких плит, плоскої задачі теорії пружності і технічної теорії оболонок.

Враховуючи, що оболонка має дві площини симетрії, доцільно розбити зовнішнє навантаження на симетричне і антисиметричне відносно площини y_1z_1 , як схематично показано на рис. 2, і розв'язувати задачу окремо для кожного виду навантаження; кінцевий результат одержимо накладанням розв'язків.

Всі три задачі — задача згину смуги, плоска задача для смуги і задача для кругової циліндричної оболонки — є двовимірними. Для зведення їх до одновимірних використовується метод інтегральних перетворень Фур'є. Формула перетворення і відповідна їй формула обернення мають такий вигляд:

$$\bar{f}(\lambda) = \int_0^{\infty} f(t) \frac{\cos \lambda t}{\sin \lambda t} dt; \quad (1)$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{f}(\lambda) \frac{\cos \lambda t}{\sin \lambda t} d\lambda; \quad (2)$$

де

$$\cos x = \begin{cases} \cos x & \text{— у випадку симетричного навантаження;} \\ \sin x & \text{— у випадку антисиметричного навантаження.} \end{cases}$$

Напружений стан визначаємо в кожному з елементів 1, 2, 3 окремо, потім задовольняємо умови спряження на лініях їх перетину.

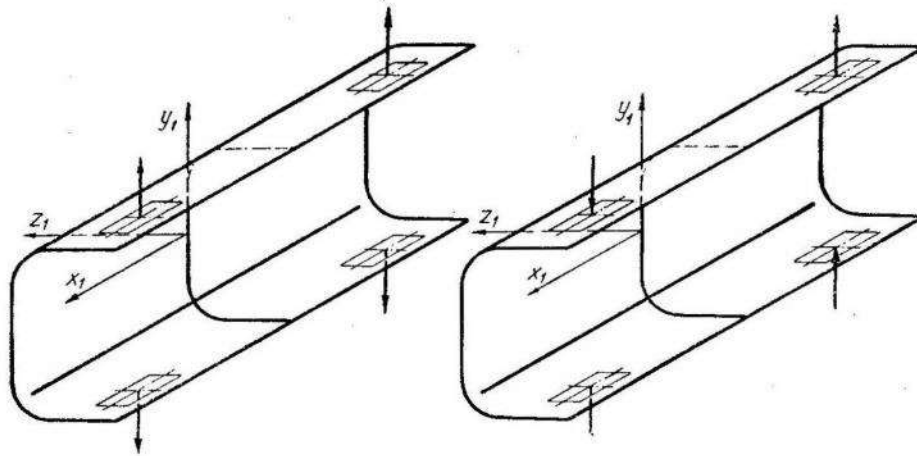


Рис. 2

Нижче наведені позначення для основних величин, прийняті в даній роботі:

- x_i, y_i — розмірні координати точок пластин 1 і 3 відповідно;
- ξ_i, η_i — безрозмірні координати точок пластин 1 і 3;
- α, β — безрозмірні координати точок оболонки 2;
- $2H$ — ширина пластинки 1;
- b — ширина пластинки 3;
- R — радіус серединної поверхні циліндричної оболонки;
- h_i — товщина елемента;
- E_i — модуль Юнга;
- ν — коефіцієнт Пуассона;
- D_i — циліндрична жорсткість;
- $u^{(i)}, v^{(i)}, w^{(i)}$ — переміщення у напрямі осей x_i, y_i, z_i відповідно;
- $Q_y^{*(i)}, M_y^{(i)}$ — узагальнена перерізуюча сила і згинаючий момент в перерізах пластин 1, 3, нормальних до осей y_i ;
- $Y_y^{(i)}, X_y^{(i)}$ — нормальні і дотичні напруження в цих перерізах;
- $e_{xx}^{(i)}, e_{yy}^{(i)}$ — деформації серединних площин пластин 1 і 3 у напрямі відповідних осей;
- $Q_2^{*(2)}, M_2^{(2)}$ — узагальнена перерізуюча сила і згинаючий момент в перерізах оболонки, нормальних до осі y_2 ;
- N_2, S — нормальні і зсувні зусилля в цих перерізах;
- $\varepsilon_1^{(2)}, \varepsilon_2^{(2)}$ — деформації оболонки у напрямі осей x_2 і y_2 відповідно;
- $q(x, y)$ — інтенсивність зовнішнього навантаження, нормального до полук 3.

Додатні напрямки осей координат і силових факторів показані на рис. 3.

Для зручності розв'язання задачі вводимо додатково такі позначення статичних і геометричних величин на лініях спряження:

$$\begin{aligned} \text{при } y_1=H (\beta=0) \quad \text{при } y_3=0 \left(\beta = \frac{\pi}{2} \right) \\ \left. \begin{aligned} w^{(1)}=w^{(2)}=\varphi_1; \\ M_y^{(1)}=-M_y^{(2)}=\varphi_2; \\ e_{xx}^{(1)}=e_{xx}^{(2)}=\varphi_3; \\ h_1 Y_y^{(1)}=N_y^{(2)}=\varphi_4. \end{aligned} \right\} \quad (3) \\ \left. \begin{aligned} w^{(3)}=w^{(2)}=\varphi_5; \\ M_y^{(3)}=-M_y^{(2)}=\varphi_6; \\ e_{xx}^{(3)}=e_{xx}^{(2)}=\varphi_7; \\ h_3 Y_y^{(3)}=N_y^{(2)}=\varphi_8. \end{aligned} \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

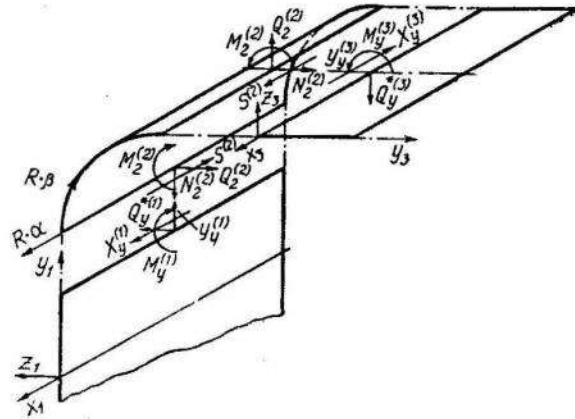


Рис. 3

1. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОЛКИ 3

Поперечний згин. Прогин $w^{(3)}(x, y)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\Delta \Delta w^{(3)} = \frac{1}{D_3} q(x, y) \quad (5)$$

і граничні умови

$$w^{(3)} = \varphi_5 \quad M_y^{(3)} = \varphi_6 \quad \text{при } y=0; \quad (6)$$

$$M_y^{(3)} = 0 \quad Q_y^{*(3)} = 0 \quad \text{при } y=b. \quad (7)$$

Величини $M_y^{(3)}$ і $Q_y^{*(3)}$ в граничних умовах (6) і (7) виражаємо за відомими формулами ([3] стор. 91) через функцію прогину $w^{(3)}(x, y)$. Після переходу до безрозмірних координат $\xi_3 = \frac{x_3}{R}$; $\eta_3 = \frac{y_3}{R}$ і застосування перетворення Фур'є до рівняння (5) і граничних умов (6) і (7) одержуємо

$$\frac{d^4 \bar{w}}{d\eta^4} - 2\lambda^2 \frac{d^2 \bar{w}}{d\eta^2} + \lambda^4 \bar{w} = \frac{R^4}{D_3} \bar{q}(\lambda, \eta); \quad (8)$$

$$\bar{w} = \varphi_5; \quad -D_3 \frac{1}{R^2} \left[\frac{d^2 \bar{w}}{d\eta^2} - \nu \lambda^2 \bar{w} \right] = -\varphi_6 \quad \text{при } \eta=0; \quad (9)$$

$$\frac{d^2 \bar{w}}{d\eta^2} - \nu \lambda^2 \bar{w} = 0 \quad \text{при } \eta=\delta_3; \quad (10)$$

$$\frac{d^3 \bar{w}}{d\eta^3} - (2-\nu) \lambda^2 \frac{d \bar{w}}{d\eta} = 0 \quad \text{при } \eta=\delta_3. \quad (11)$$

Тут позначено $\delta_3 = \frac{b}{R}$.

Розв'язок звичайного диференціального рівняння (8) шукаємо у вигляді

$$\bar{w}^{(3)}(\lambda, \eta) = A_1(\lambda) ch\lambda\eta + A_2(\lambda) sh\lambda\eta + A_3(\lambda) \lambda\eta ch\lambda\eta + A_4(\lambda) \lambda\eta sh\lambda\eta + \bar{w}_1^{(3)}(\lambda, \eta). \quad (12)$$

Частинний розв'язок $\bar{w}_1^{(3)}(\lambda, \eta)$ вибираємо у вигляді [4]

$$\bar{w}_1^{(3)}(\lambda, \eta) = \frac{R^4}{2D_3\lambda^3} \int_0^\eta [\lambda(\eta-\tau) ch\lambda(\eta-\tau) - sh\lambda(\eta-\tau)] \bar{q}(\lambda, \tau) d\tau. \quad (13)$$

Для функції $\bar{q}(\lambda, \tau)$, через яку визначається частинний розв'язок, маємо вираз

$$\bar{q}(\lambda, \tau) = \int_0^\infty q(\xi, \tau) \frac{\cos \lambda \xi}{\sin \lambda \xi} d\xi. \quad (14)$$

Сталі інтегрування A_i визначаємо з граничних умов (9)–(11) і дістаємо для них такі вирази:

$$\begin{aligned} A_1 &= \bar{\Phi}_5; \\ A_2 &= A_2^* + A_{25}\bar{\Phi}_5 + \frac{R^2}{D_3} A_{26}\bar{\Phi}_6; \\ A_3 &= A_3^* + A_{35}\bar{\Phi}_5 + \frac{R^2}{D_3} A_{36}\bar{\Phi}_6; \\ A_4 &= A_{45}\bar{\Phi}_5 + \frac{R^2}{D_3} A_{46}\bar{\Phi}_6. \end{aligned} \quad (15)$$

Тут позначено:

$$A_2^* = \frac{1}{\Delta_A} \{M^*[(1-\nu)\lambda\delta_3 sh\lambda\delta_3 - (1+\nu)ch\lambda\delta_3] - N^*[2sh\lambda\delta_3 + (1-\nu)\lambda\delta_3 ch\lambda\delta_3]\};$$

$$A_{25} = \frac{1-\nu}{\Delta_A} \left[(3+\nu) sh^2\lambda\delta_3 - \frac{1}{2}(1-\nu)^2\lambda^2\delta_3^2 \right];$$

$$A_{26} = -\frac{1}{\Delta_A} \cdot \frac{1}{2\lambda^2} [(1-\nu)^2\lambda^2\delta_3^2 + 2(1+\nu)]; \quad (16)$$

$$A_3^* = \frac{1-\nu}{\Delta_A} \{-M^*ch\lambda\delta_3 + N^*sh\lambda\delta_3\}; \quad A_{35} = -\frac{1-\nu}{\Delta_A} \left[\frac{1}{2}(1-\nu)(3+\nu) sh^2\lambda\delta_3 \right];$$

$$A_{36} = -\frac{1}{\Delta_A} \cdot \frac{1-\nu}{2\lambda^2} [(3+\nu) sh^2\lambda\delta_3 + 2]; \quad A_{45} = -\frac{1-\nu}{2}; \quad A_{46} = -\frac{1}{2\lambda^2};$$

$$\Delta_A = -(1-\nu) \{\lambda\delta_3(1-\nu) + (3+\nu) sh\lambda\delta_3 ch\lambda\delta_3\};$$

$$M^* = -\frac{1}{\lambda^2} \left[\frac{d^2\bar{w}_1}{d\eta^2} - \nu\lambda^2\bar{w}_1 \right]_{\eta=\delta_3}; \quad (17)$$

$$N^* = \frac{1}{\lambda^3} \left[\frac{d^3\bar{w}_1}{d\eta^3} - (2-\nu)\lambda^2 \frac{d\bar{w}_1}{d\eta} \right]_{\eta=\delta_3}.$$

Плоска задача. Розв'язання плоскої задачі зводиться до визначення функції напружень $U^{(3)}(x, y)$, яка задовольняє бігармонічне рівняння

$$\Delta \Delta U^{(3)} = 0 \quad (18)$$

і граничні умови

$$e_{xx}^{(3)} = \varphi_7, \quad h_3 Y_y^{(3)} = \varphi_8 \quad \text{при } y=0; \quad (19)$$

$$Y_y^{(3)} = 0, \quad X_y^{(3)} = 0 \quad \text{при } y=b. \quad (20)$$

Величини $e_{xx}^{(3)}$, $Y_y^{(3)}$ і $X_y^{(3)}$ виражаємо за відомими формулами [5] через функцію напружень $U^{(3)}(x, y)$. Після переходу до безрозмірних координат і застосування перетворень Фур'є одержуємо

$$\frac{d^4 \bar{U}}{d\eta^4} - 2\lambda^2 \frac{d^2 \bar{U}}{d\eta^2} + \lambda^4 \bar{U} = 0; \quad (21)$$

$$\frac{1}{E_3} \cdot \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2 \bar{U}}{d\eta^2} + \nu \lambda^2 \bar{U} \right) = \bar{\varphi}_7 \quad \text{при } \eta=0; \quad (22)$$

$$-\frac{\lambda^2}{R^2} h_3 \bar{U} = \bar{\varphi}_8 \quad \text{при } \eta=0; \quad (23)$$

$$\bar{U} = 0; \quad \frac{d\bar{U}}{d\eta} = 0 \quad \text{при } \eta=\delta_3. \quad (24)$$

Загальний інтеграл однорідного рівняння (21) має вигляд

$$\bar{U}^{(3)}(\lambda, \eta) = B_1(\lambda) ch\lambda\eta + B_2(\lambda) sh\lambda\eta + B_3(\lambda) \lambda\eta ch\lambda\eta + B_4(\lambda) \lambda\eta sh\lambda\eta. \quad (25)$$

Для довільних сталих одержуємо такі вирази:

$$B_1(\lambda) = -\frac{R^2}{h_3} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \bar{\varphi}_8; \quad B_4 = \frac{R^2}{2\lambda^2} \left[E_3 \bar{\varphi}_7 + (1+\nu) \frac{1}{h_3} \bar{\varphi}_8 \right];$$

$$B_2(\lambda) = \frac{R^2}{2\lambda^2 (sh\lambda\delta_3 ch\lambda\delta_3 - \lambda\delta_3)} \left\{ E_3 \lambda^2 \delta_3^2 \bar{\varphi}_7 + \frac{1}{h_3} [2ch^2\lambda\delta_3 + (1+\nu) \lambda^2 \delta_3^2] \bar{\varphi}_8 \right\}; \quad (26)$$

$$B_3(\lambda) = \frac{R^2}{2\lambda^2 (sh\lambda\delta_3 ch\lambda\delta_3 - \lambda\delta_3)} \left\{ E_3 sh^2\lambda\delta_3 \bar{\varphi}_7 + [2 + (1+\nu) sh^2\lambda\delta_3] \frac{1}{h_3} \bar{\varphi}_8 \right\}.$$

2. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ДЛЯ ПЛАСТИНИ І (СТІНКИ ПРОФІЛЮ)

Бігармонічна функція прогину $w^{(1)}(x, y)$ в пластині І повинна задовольняти такі граничні умови на лініях спряження з круговою оболонкою:

$$w^{(1)} = \varphi_1, \quad M_y^{(1)} = \varphi_2 \quad \text{при } y=H. \quad (27)$$

Бігармонічна функція напружень $U^{(1)}(x, y)$ для тієї ж пластини повинна задовольняти умови на лініях спряження:

$$e_{xx}^{(1)} = \varphi_3; \quad h_1 Y_y^{(1)} = \varphi_4 \quad \text{при } y=H. \quad (28)$$

Аналогічно попередньому переходимо до безрозмірних координат $\xi_1 = \frac{x_1}{R}$; $\eta_1 = \frac{y_1}{R}$ і застосовуємо перетворення Фур'є, після чого одержуємо вирази:

для задачі згину

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \bar{\varphi}_1 \text{ при } \eta = \delta_1; \\ -D_1 \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2 \bar{w}}{d\eta^2} - \nu \lambda^2 \bar{w} \right) &= \bar{\varphi}_2 \text{ при } \eta = \delta_1; \end{aligned} \quad (29)$$

$$\text{де } \delta_1 = \frac{H}{R};$$

для плоскої задачі

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_1} \cdot \frac{1}{R^2} \left(\frac{d^2 \bar{U}}{d\eta^2} + \nu \lambda^2 \bar{U} \right) &= \bar{\varphi}_3 \text{ при } \eta = \delta_1; \\ -\frac{\lambda^2}{R^2} h_1 \bar{U} &= \bar{\varphi}_4 \text{ при } \eta = \delta_1. \end{aligned} \quad (30)$$

Функції $\bar{w}^{(1)}$ і $\bar{U}^{(1)}$ є, очевидно, розв'язками рівнянь, аналогічних рівнянню (21). Отже, їх можна записати у вигляді

$$\bar{w}^{(1)}(\lambda; \eta) = F_1 ch\lambda\eta + F_2 sh\lambda\eta + F_3 \lambda\eta ch\lambda\eta + F_4 \lambda\eta sh\lambda\eta; \quad (31)$$

$$\bar{U}^{(1)}(\lambda; \eta) = G_1 ch\lambda\eta + G_2 sh\lambda\eta + G_3 \lambda\eta ch\lambda\eta + G_4 \lambda\eta sh\lambda\eta. \quad (32)$$

При симетричному навантаженні профілю функції $\bar{w}^{(1)}(\lambda, \eta)$ і $\bar{U}^{(1)}(\lambda, \eta)$ повинні бути парними відносно координати η , тому слід покласти

$$F_2(\lambda) = F_3(\lambda) = 0;$$

$$G_2(\lambda) = G_3(\lambda) = 0.$$

Сталі $F_1(\lambda)$, $F_4(\lambda)$, $G_1(\lambda)$, $G_4(\lambda)$ визначаємо відповідно з граничних умов (29), (30) при $\eta = \delta_1$ і одержуємо для них вирази

$$\left. \begin{aligned} F_1(\lambda) &= \frac{1}{2ch^2\lambda\delta_1} \left\{ [2ch\lambda\delta_1 + (1-\nu)\lambda\delta_1 sh\lambda\delta_1] \bar{\varphi}_1 + \frac{R^2}{\lambda^2 D_1} \lambda\delta_1 sh\lambda\delta_1 \bar{\varphi}_2 \right\}; \\ F_4(\lambda) &= -\frac{1}{2ch^2\lambda\delta_1} \left\{ (1-\nu)ch\lambda\delta_1 \bar{\varphi}_1 + \frac{R^2}{\lambda^2 D_1} ch\lambda\delta_1 \bar{\varphi}_2 \right\}; \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} G_1(\lambda) &= -\frac{R^2}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{2ch^2\lambda\delta_1} \left\{ E_1 \lambda\delta_1 sh\lambda\delta_1 \bar{\varphi}_3 + \frac{1}{h_1} [2ch\lambda\delta_1 + (1+\nu)\lambda\delta_1 sh\lambda\delta_1] \bar{\varphi}_4 \right\}; \\ G_4(\lambda) &= \frac{R^2}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{2ch^2\lambda\delta_1} \left\{ E_1 ch\lambda\delta_1 \bar{\varphi}_3 + \frac{1}{h_1} (1+\nu)ch\lambda\delta_1 \bar{\varphi}_4 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

При обернено симетричному навантаженні профілю функції $\bar{w}^{(1)}(\lambda, \eta)$ і $\bar{U}^{(1)}(\lambda, \eta)$ повинні бути непарними відносно η , внаслідок чого слід покласти

$$F_1(\lambda) = F_4(\lambda) = 0;$$

$$G_1(\lambda) = G_4(\lambda) = 0.$$

Для сталих $F_2(\lambda)$, $F_3(\lambda)$, $G_2(\lambda)$, $G_3(\lambda)$ дістаємо вирази, які відрізняються від відповідних виразів для $F_1(\lambda)$, $F_4(\lambda)$, $G_1(\lambda)$, $G_4(\lambda)$ тим, що в них функція косинуса замінена на синус, і навпаки.

3. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ДЛЯ КРУГОВОЇ ОБОЛОНКИ

Розв'язок задачі для кругової оболонки 2 зводиться до визначення ключової функції $\Phi(\alpha, \beta)$, яка задовольняє диференціальне рівняння восьмого порядку ([6] стор. 317).

$$\Delta^4 \Phi + \frac{1-\nu^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} = 0, \quad (35)$$

де

$$c^2 = \frac{h^2}{12R^2}, \quad (36)$$

і граничні умови на лініях спряження з пластинами 1 і 3:

$$\begin{aligned} \text{при } \beta=0: \quad \text{при } \beta = \frac{\pi}{2}: \\ w^{(2)} = \varphi_1; \quad w^{(2)} = \varphi_5; \\ -M_2^{(2)} = \varphi_2; \quad -M_2^{(2)} = \varphi_6; \\ \varepsilon_1^{(2)} = \varphi_3; \quad \varepsilon_1^{(2)} = \varphi_7; \\ N_2^{(2)} = \varphi_4; \quad N_2^{(2)} = \varphi_8. \end{aligned} \quad (37)$$

Застосувавши перетворення Фур'є до рівняння (35) і граничних умов (37), одержуємо

$$\left[\left(-\lambda^2 + \frac{d^2}{d\beta^2} \right)^4 + \frac{1-\nu^2}{c^2} \lambda^4 \right] \bar{\Phi}(\lambda, \beta) = 0. \quad (38)$$

При $\beta=0$

$$\begin{aligned} \lambda^4 \bar{\Phi} - 2\lambda^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}}{d\beta^2} + \frac{d^4 \bar{\Phi}}{d\beta^4} &= \bar{\varphi}_1; \\ -\frac{D_2}{R^2} \left\{ \lambda^4 \frac{d^2 \bar{\Phi}}{d\beta^2} - 2\lambda^2 \frac{d^4 \bar{\Phi}}{d\beta^4} + \frac{d^6 \bar{\Phi}}{d\beta^6} - \lambda^2 \nu \left[\lambda^4 \bar{\Phi} - 2\lambda^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}}{d\beta^2} + \frac{d^4 \bar{\Phi}}{d\beta^4} \right] \right\} &= \bar{\varphi}_2; \\ -\frac{1}{R} \left[\lambda^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}}{d\beta^2} + \nu \lambda^4 \bar{\Phi} \right] &= \bar{\varphi}_3; \quad \frac{E_2 h_2}{R} \lambda^4 \bar{\Phi} = \bar{\varphi}_4. \end{aligned} \quad (39)$$

При $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \lambda^4 \bar{\Phi} - 2\lambda^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}}{d\beta^2} + \frac{d^4 \bar{\Phi}}{d\beta^4} &= \bar{\varphi}_5; \\ -\frac{D_2}{R^2} \left\{ \lambda^4 \frac{d^2 \bar{\Phi}}{d\beta^2} - 2\lambda^2 \frac{d^4 \bar{\Phi}}{d\beta^4} + \frac{d^6 \bar{\Phi}}{d\beta^6} - \lambda^2 \nu \left[\lambda^4 \bar{\Phi} - 2\lambda^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}}{d\beta^2} + \frac{d^4 \bar{\Phi}}{d\beta^4} \right] \right\} &= \bar{\varphi}_6; \\ -\frac{1}{R} \left[\lambda^2 \frac{d^2 \bar{\Phi}}{d\beta^2} + \nu \lambda^4 \bar{\Phi} \right] &= \bar{\varphi}_7; \quad \frac{E_2 h_2}{R} \lambda^4 \bar{\Phi} = \bar{\varphi}_8. \end{aligned} \quad (40)$$

Загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння (38) має вигляд

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(\lambda; \beta) = C_1(\lambda) \psi_1 + C_2(\lambda) \psi_2 + C_3(\lambda) \psi_3 + C_4(\lambda) \psi_4 + C_5(\lambda) \psi_5 + C_6(\lambda) \psi_6 + \\ + C_7(\lambda) \psi_7 + C_8(\lambda) \psi_8, \end{aligned} \quad (41)$$

де

$$\begin{aligned}\psi_1 &= ch p_1 \beta \sin q_1 \beta; & \psi_5 &= ch p_2 \beta \sin q_2 \beta; \\ \psi_2 &= ch p_1 \beta \cos q_1 \beta; & \psi_6 &= ch p_2 \beta \cos q_2 \beta; \\ \psi_3 &= sh p_1 \beta \cos q_1 \beta; & \psi_7 &= sh p_2 \beta \cos q_2 \beta; \\ \psi_4 &= sh p_1 \beta \sin q_1 \beta; & \psi_8 &= sh p_2 \beta \sin q_2 \beta;\end{aligned}\quad (42)$$

$$p_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{2} [(\lambda+t) + V(\lambda+t)^2 + t^2]}; \quad q_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{2} [-(\lambda+t) + V(\lambda+t)^2 + t^2]}; \quad (43)$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{2} [(\lambda-t) + V(\lambda-t)^2 + t^2]}; \quad q_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{2} [-(\lambda-t) + V(\lambda-t)^2 + t^2]};$$

$$t = \frac{V2}{2} \sqrt{\frac{1-v^2}{c^2}}. \quad (44)$$

Підставляючи в граничні умови (39), (40) вираз (41), одержимо після деяких перетворень систему восьми лінійних рівнянь, матричний запис яких наведений в таблиці.

В таблиці позначено

$$\begin{aligned}\psi_i^* &= (\psi_i)_{\beta = \frac{\pi}{2}}; & a_1 &= \lambda(1-v) + t; & a_2 &= -\lambda(1-v) + t; & a_3 &= \lambda(1+v) + t; \\ & & a_4 &= \lambda(1+v) - t.\end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему відносно C_i , знаходимо

$$\begin{aligned}C_i &= \sum_{j=1}^4 C_{ij} \Phi_j \text{ при } i=2, 4, 6, 8; \\ C_i &= \sum_{j=1}^8 C_{ij} \Phi_j \text{ при } i=1, 3, 5, 7.\end{aligned}\quad (45)$$

Вирази для C_i ми тут не наводимо з огляду на їх громіздкість.

4. ВИЗНАЧЕННЯ ДОПОМІЖНИХ ФУНКЦІЙ $\bar{\varphi}_i(\lambda)$

Для визначення функцій $\bar{\varphi}_i(\lambda)$ маємо вісім поки що не використаних умов на лініях спряження.

$$\begin{array}{ll}\text{При } \beta=0 & \text{При } \beta=\frac{\pi}{2} \\ \frac{\partial w^{(1)}}{\partial y} = \frac{1}{R} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \beta}; & \frac{\partial w^{(3)}}{\partial y} = \frac{1}{R} \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \beta}; \\ h_1 X_y^{(1)} = S^{(2)}; & h_1 X_y^{(3)} = S^{(2)}; \\ Q_y^{*(1)} = Q_y^{(2)}; & Q_y^{*(3)} = Q_y^{(2)}; \\ v^{(1)} = v^{(2)}; & v^{(3)} = v^{(2)}.\end{array}\quad (46)$$

Очевидно, що рівності (46) справедливі і для трансформант функцій.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	Вільні члени
1	0	0	0	1	0	0	0	-1	$\frac{1}{2\lambda^3 t^2} \varphi_1$
2	0	-t	0	a_1	0	t	0	a_2	$-\frac{1}{2\lambda^3 t^2} \frac{R^2}{D_2} \varphi_2$
3	0	a_3	0	t	0	a_4	0	t	$-\frac{1}{\lambda^3} R \overline{\varphi_3}$
4	0	1	0	0	0	1	0	0	$\frac{1}{\lambda^4} R \overline{\frac{\varphi_4}{E_2 h_2}}$
5	ψ_3^*	$-\psi_4^*$	$-\psi_1^*$	ψ_2^*	$-\psi_7^*$	ψ_8^*	ψ_5^*	$-\psi_6^*$	$\frac{1}{2\lambda^3 t^2} \varphi_5$
6	$-\psi_1^* + a_1 \psi_3^*$	$-\psi_2^* - a_1 \psi_4^*$	$-\psi_3^* - a_1 \psi_1^*$	$-\psi_4^* + a_1 \psi_2^*$	$\psi_5^* + a_2 \psi_7^*$	$\psi_6^* - a_2 \psi_8^*$	$\psi_7^* - a_2 \psi_5^*$	$\psi_8^* + a_2 \psi_6^*$	$-\frac{1}{2\lambda^3 t^2} \frac{R^2}{D_2} \varphi_6$
7	$a_3 \psi_1^* + \psi_3^*$	$a_3 \psi_2^* - \psi_4^*$	$a_3 \psi_3^* - \psi_1^*$	$a_3 \psi_4^* + \psi_2^*$	$a_4 \psi_5^* + \psi_7^*$	$a_4 \psi_6^* - \psi_8^*$	$a_4 \psi_7^* - \psi_5^*$	$a_4 \psi_8^* + \psi_6^*$	$-\frac{1}{\lambda^3} R \overline{\varphi_7}$
8	ψ_1^*	ψ_2^*	ψ_3^*	ψ_4^*	ψ_5^*	ψ_6^*	ψ_7^*	ψ_8^*	$\frac{1}{\lambda^4} R \overline{\frac{\varphi_8}{E_2 h_2}}$

Щоб виразити переміщення $v^{(3)}(x)$ на контурі пластини 3 через функцію напружень $U^{(3)}$, скористаємось відомою залежністю між до-
тисними напруженнями і переміщеннями

$$X_y = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (47)$$

яка після диференціювання по x набуде вигляду

$$-\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right). \quad (48)$$

Запишемо вираз для переміщення $v^{(3)}(x, y)$ і деформації $e_{xx}^{(3)}$ в до-
вільній точці пластини 3 через функцію напружень $U^{(3)}(x, y)$:

$$v^{(3)}(x, y) = \frac{1}{E_3} \int_0^y \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) dy + v^{(3)}(x); \quad (49)$$

$$e_{xx}^{(3)} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E_3} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right). \quad (50)$$

Підставляємо (49) і (50) в умову (48) і, покладаючи, що $y=0$,
дістаємо

$$-(2+\nu) \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} = E_3 v''(x) \text{ при } y=0. \quad (51)$$

Застосувавши до (51) перетворення Фур'є, одержуємо вираз для
трансформанти

$$\bar{v}^{(3)}(\lambda) = -\frac{1}{E_3 R} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \left[(2+\nu) \lambda^2 \frac{d\bar{U}^{(3)}}{d\eta} - \frac{d^3 \bar{U}^{(3)}}{d\eta^3} \right] \text{ при } \eta=0. \quad (52)$$

Переміщення $v^{(1)}(x, y)$ в пластині 1 можна виразити через функцію
 $U^{(1)}(x, y)$ за формулою

$$v^{(1)}(x, y) = \frac{1}{E_1} \int_0^y \left(\frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial y^2} \right) dy + g(x). \quad (53)$$

У випадку симетричного навантаження $g(x) = (v^{(1)})_{y=0} = 0$, і тоді ви-
раз для трансформанти $\bar{v}^{(1)}(\lambda)$ на лінії спряження запишеться так:

$$\bar{v}^{(1)}(\lambda) = -\frac{1}{E_1} \cdot \frac{1}{R^2} \int_0^{\delta_1} \left[\lambda^2 \bar{U}^{(1)} + \nu \frac{d^2 \bar{U}^{(1)}}{d\eta^2} \right] d\eta \text{ при } \eta_1 = \delta_1. \quad (54)$$

У випадку антисиметричного навантаження вираз $\bar{v}^{(1)}(\lambda)$ одержимо
за допомогою викладок, аналогічних тим, які було виконано для одер-
жання $\bar{v}^{(3)}(\lambda)$. Остаточно цей вираз запишеться таким чином:

$$\bar{v}^{(1)}(\lambda) = -\frac{1}{E_1 R} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \left[(2+\nu) \lambda^2 \frac{d\bar{U}^{(1)}}{d\eta} - \frac{d^3 \bar{U}^{(1)}}{d\eta^3} \right] \text{ при } \eta_1 = \delta_1. \quad (55)$$

Величини $Q_y^{(i)}$, $X_y^{(i)}$, $Q_2^{(2)}$, $S^{(2)}$ і $v^{(2)}$ можемо безпосередньо виразити
через функції $w^{(i)}$, $U^{(i)}$, Φ , після чого застосовуємо перетворення
Фур'є до відповідних виразів. Остаточно вісім умов для трансфор-
мант запишуться так:

у випадку симетричного навантаження при $\beta=0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \cdot \frac{d\bar{w}^{(1)}}{d\eta} &= \frac{1}{R} \left[\lambda^4 \frac{d\bar{\Phi}}{d\beta} - 2\lambda^2 \frac{d^3\bar{\Phi}}{d\beta^3} + \frac{d^5\bar{\Phi}}{d\beta^5} \right]; \\ \frac{h_1}{R^2} \lambda \frac{d\bar{U}^{(1)}}{d\eta} &= -\frac{E_2 h_2}{R} \lambda^3 \frac{d\bar{\Phi}}{d\beta}; \\ -\frac{D_1}{R^3} \left[\frac{d^3\bar{w}^{(1)}}{d\eta^3} - (2-\nu) \lambda^2 \frac{d\bar{w}^{(1)}}{d\eta} \right] &= -\frac{D_2}{R^3} \left\{ \left[\lambda^4 \frac{d^3\bar{\Phi}}{d\beta^3} - 2\lambda^2 \frac{d^5\bar{\Phi}}{d\beta^5} + \frac{d^7\bar{\Phi}}{d\beta^7} \right] - \right. \\ &\quad \left. - (2-\nu) \lambda^2 \left[\lambda^4 \frac{d\bar{\Phi}}{d\beta} - 2\lambda^2 \frac{d^3\bar{\Phi}}{d\beta^3} + \frac{d^5\bar{\Phi}}{d\beta^5} \right] \right\}; \\ -\frac{1}{E_1} \cdot \frac{1}{R^2} \int_0^{\delta_1} \left[\lambda^2 \bar{U}^{(1)} + \nu \frac{d^2 \bar{U}^{(1)}}{d\eta^2} \right] d\eta &= -\left[\frac{d^3\bar{\Phi}}{d\beta^3} - (2+\nu) \lambda^2 \frac{d\bar{\Phi}}{d\beta} \right]; \end{aligned} \quad (56)$$

при $\beta = \frac{\pi}{2}$;

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d\bar{w}^{(3)}}{d\eta} &= \frac{1}{R} \left[\lambda^4 \frac{d\bar{\Phi}}{d\beta} - 2\lambda^2 \frac{d^3\bar{\Phi}}{d\beta^3} + \frac{d^5\bar{\Phi}}{d\beta^5} \right]; \\ \frac{h_3}{R^2} \lambda \frac{d\bar{U}^{(3)}}{d\eta} &= -\frac{E_2 h_2}{R} \lambda^3 \frac{d\bar{\Phi}}{d\beta}; \\ -\frac{D_3}{R^3} \left[\frac{d^3\bar{w}^{(3)}}{d\eta^3} - (2-\nu) \lambda^2 \frac{d\bar{w}^{(3)}}{d\eta} \right] &= -\frac{D_2}{R^3} \left\{ \left[\lambda^4 \frac{d^3\bar{\Phi}}{d\beta^3} - 2\lambda^2 \frac{d^5\bar{\Phi}}{d\beta^5} + \frac{d^7\bar{\Phi}}{d\beta^7} \right] - \right. \\ &\quad \left. - (2-\nu) \lambda^2 \left[\lambda^4 \frac{d\bar{\Phi}}{d\beta} - 2\lambda^2 \frac{d^3\bar{\Phi}}{d\beta^3} + \frac{d^5\bar{\Phi}}{d\beta^5} \right] \right\}; \\ -\frac{1}{E_3 R} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \left[(2+\nu) \lambda^2 \frac{d\bar{U}^{(3)}}{d\eta} - \frac{d^3 \bar{U}^{(3)}}{d\eta^3} \right] &= -\left[\frac{d^3\bar{\Phi}}{d\beta^3} - (2+\nu) \lambda^2 \frac{d\bar{\Phi}}{d\beta} \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

У випадку антисиметричного навантаження умови (57) і перші три умови (56) запишуться без зміни, а четверта умова (56) одержить вигляд

$$-\frac{1}{E_1} \cdot \frac{1}{R^2} \left[(2+\nu) \lambda^2 \frac{d\bar{U}^{(1)}}{d\eta} - \frac{d^3 \bar{U}^{(1)}}{d\eta^3} \right] = -\left[\frac{d^3\bar{\Phi}}{d\beta^3} - (2+\nu) \lambda^2 \frac{d\bar{\Phi}}{d\beta} \right]. \quad (58)$$

В умови (56), (57), (58) підставляємо загальні розв'язки (12), (25), (31), (32) і (41), довільні сталі в яких виражені нами через допоміжні функції $\bar{\Phi}_i$ за формулами (15), (26), (33), (34) і (45). Для кожного з двох випадків навантаження одержимо систему восьми лінійних рівнянь, з яких визначимо вісім невідомих $\bar{\Phi}_i$.

Знайдені значення для $\bar{\Phi}_i$ підставляємо в формули (12), (25), (31), (32), (41) і одержуємо вирази для величин $\bar{w}^{(i)}$, $\bar{U}^{(i)}$, $\bar{\Phi}$. Далі, після застосування до них формули обернення (2), знаходимо остаточні вирази функцій $w^{(i)}$, $U^{(i)}$, Φ , які ми тут не наводимо.

Одержані результати можуть бути використані для визначення напружень місцевого згину в лонжеронах вантажопідійомників автован-

тажників і інших вантажонесучих елементів, які сприймають зусилля ходових катків.

На відміну від розв'язків [1] і [2], розв'язок даної задачі дозволяє визначити не тільки згинні напруження, але і напруження, що виникають внаслідок деформації середньої поверхні лонжеронів вантажопідійомників.

Приклад. Нами розглянуто відкриту нескінченну циліндричну оболонку, до країв якої в одному і тому ж перерізі прикладено дві протилежно спрямовані зосереджені сили P . ($b=H=0$). Поперечний переріз оболонки показаний на рис. 4, а. В цьому випадку трансформанта ключової функції має вигляд

$$\bar{\Phi}(\lambda, \beta) = C_2\psi_2 + C_4\psi_4 + C_6\psi_6 + C_8\psi_8. \quad (59)$$

Для визначення сталих C_2, C_4, C_6, C_8 маємо чотири рівняння, одержаних з граничних умов:

$$\begin{aligned} & \{-t\psi_2 - [\lambda(1-\nu) + t]\psi_4\} C_2 + \{-t\psi_4 + [\lambda(1-\nu) + t]\psi_2\} C_4 + \\ & + \{t\psi_6 - [-\lambda(1-\nu) + t]\psi_8\} C_6 + \{t\psi_8 + [-\lambda(1-\nu) + t]\psi_6\} C_8 = 0; \\ & \psi_2 C_2 + \psi_4 C_4 + \psi_6 C_6 + \psi_8 C_8 = 0; \\ & (p_1\psi_3 - q_1\psi_1) C_2 + (p_1\psi_1 + q_1\psi_3) C_4 + (p_2\psi_7 - q_2\psi_5) C_6 + (p_2\psi_5 + q_2\psi_7) C_8 = 0; \\ & \{[-(1-\nu)\lambda q_1 + t(p_1 + q_1)]\psi_3 - [(1-\nu)\lambda p_1 - t(p_1 - q_1)]\psi_1\} C_2 + \\ & + \{[-(1-\nu)\lambda q_1 + t(p_1 + q_1)]\psi_1 + [(1-\nu)\lambda p_1 - t(p_1 - q_1)]\psi_3\} C_4 + \\ & + \{[-(1-\nu)\lambda q_2 + t(p_2 - q_2)]\psi_7 + [(1-\nu)\lambda p_2 + t(p_2 + q_2)]\psi_5\} C_6 + \\ & + \{[-(1-\nu)\lambda q_2 + t(p_2 - q_2)]\psi_5 - [(1-\nu)\lambda p_2 + t(p_2 + q_2)]\psi_7\} C_8 = \frac{R^2 P}{D \cdot 4\lambda^3 t^2}. \end{aligned} \quad (60)$$

Для згинаючого моменту M_2 на лінії перетину оболонки з поздовжньою площиною симетрії будемо мати вираз

$$\begin{aligned} M_2 = \frac{2}{\pi} \frac{D}{R^2} \int_0^\infty \{ & -tC_2 + [\lambda(1-\nu) + t]C_4 + tC_6 + \\ & + [-\lambda(1-\nu) + t]C_8\} 2\lambda^3 t^2 \cos \lambda \xi d\lambda. \end{aligned} \quad (61)$$

Величина цього моменту, підрахована шляхом чисельного інтегрування, дорівнює

$$(M_2)_{\alpha=\beta=0} = -0,26P.$$

Для порівняння наводимо значення поперечного згинаючого моменту в коритному профілі, розміри якого показані на рис. 4, б ([1]). На лінії спряження полки і стінки

$$M_2^{\max} = -0,341P;$$

на лінії перетину стінки з поздовжньою площиною симетрії

$$M_2^{\max} = -0,172P.$$

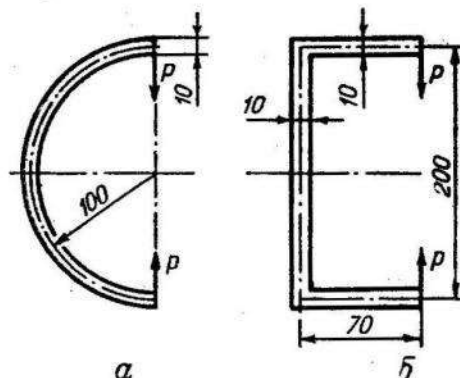


Рис. 4

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. П. Флейшман, Ю. Г. Розенталь, О. В. Марковська, Ю. А. Аккерман. Напруження місцевого згину в вантажопідійомниках авто- та електронавантажувачів. Прикладна механіка, т. X, в. 5, 1964.
2. Н. П. Флейшман, Ю. Г. Розенталь, Е. В. Марковская, Ю. А. Аккерман. Напряжения местного изгиба в балках корытного профиля. Труды ВНИИПТмаш., в. 4 (46), 1964.
3. С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1948.
4. Н. Н. Лебедев. Сборник задач по математической физике. Гостехиздат, 1955, стр. 171—172.
5. М. М. Филоненко-Бородич. Теория упругости. Физматгиз, 1959.
6. В. З. Власов. Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.

Н. П. ФЛЕЙШМАН, Ю. Г. РОЗЕНТАЛЬ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ОТКРЫТОЙ ТОНКОСТЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

(резюме)

В статье получено решение задачи изгиба тонкостенной конструкции, составленной из трех полос и двух четвертькруговых цилиндрических оболочек бесконечной длины. Нагрузка произвольная. Напряженно-деформированное состояние конструкции описывается общими линейными уравнениями теории изгиба тонких плит, плоской задачи теории упругости и технической теории оболочек. Для определения постоянных, входящих в общие интегралы соответствующих уравнений, используются граничные условия на линиях сопряжения пластин и оболочек. Рассмотрен частный пример. Полученное решение может быть использовано при исследовании напряжений в лонжеронах грузоподъемников автопогрузчиков и других грузонесущих элементов.

Б. В. КОВАЛЬЧУК, Г. П. ГУБАНОВ

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ СУМАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Позначимо через $W^{(r,l)}H_{\omega_1,\omega_2}(r, l \geq 0)$ клас 2π -періодичних відносно кожної змінної x та y функцій $f(x, y)$, які задовольняють такі умови:

- 1) $|\varphi_i(x_1, y) - \varphi_i(x_2, y)| \leq \omega_1(|x_2 - x_1|)$;
- 2) $|\varphi_i(x, y_1) - \varphi_i(x, y_2)| \leq \omega_2(|y_2 - y_1|)$;
- 3) $|\varphi_i(x_1, y_1) - \varphi_i(x_1, y_2) - \varphi_i(x_2, y_1) + \varphi_i(x_2, y_2)| \leq C\omega_1(|x_2 - x_1|)\omega_2(|y_2 - y_1|)$
($i=1, 2$),

де $\varphi_1(x, y) = \frac{\partial^r f}{\partial x^r}$, $\varphi_2(x, y) = \frac{\partial^l f}{\partial y^l}$,

а $\omega_i(t)$ — задані опуклі частинні модулі неперервності.

Нехай

$$E_{m,n}^{(p,q)}(W^{(r,l)}H_{\omega_1,\omega_2}; x, y) = \sup_{f \in W^{(r,l)}H_{\omega_1,\omega_2}} |f(x, y) - \sigma_{m,n}^{(p,q)}(f; x, y)|,$$

де $\sigma_{m,n}^{(p,q)}(f; x, y)$ — сума Валле Пуссена для функції $f(x, y)$.

Теорема. Якщо

1. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\omega_i(\delta) \ln \frac{1}{\delta} \right] = 0$;
2. $\delta \int_{\delta}^1 \frac{\omega_i(t)}{t^2} dt = O[\omega_i(\delta)] \quad (\delta \rightarrow 0)$,

то для функцій класу $W^{(r,l)}H_{\omega_1,\omega_2}(r, l > 0; r=l=0)$ має місце асимптотична рівність

$$\begin{aligned} E_{m,n}^{(p,q)}(W^{(r,l)}H_{\omega_1,\omega_2}; x, y) &= \frac{2}{\pi^2} \frac{\ln \frac{m}{p+1}}{m^r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega_1\left(\frac{2u}{m}\right) \sin u du + \\ &+ \frac{2}{\pi^2} \frac{\ln \frac{n}{q+1}}{n^l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega_2\left(\frac{2v}{n}\right) \sin v dv + O \left[\frac{\omega_1\left(\frac{1}{m}\right)}{m^r} + \frac{\omega_2\left(\frac{1}{n}\right)}{n^l} \right] + \\ &+ O \left[\ln \frac{m}{p+1} \ln \frac{n}{q+1} \left(\frac{1}{m^r} + \frac{1}{n^l} \right) \omega_1\left(\frac{1}{m}\right) \omega_2\left(\frac{1}{n}\right) \right], \end{aligned}$$

де $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно $p=o(m)$ і $q=o(n)$. При доведенні теореми ми спираємося на результати [1, 2, 3].

ЛІТЕРАТУРА

1. І. М. М. Горбач. ДАН УРСР, № 3, 1960.
2. В. Б. Гришин. ДАН УРСР, № 5, 1964.
3. С. М. Никольский. ДАН СССР, 52, № 3, 1946.

Б. В. КОВАЛЬЧУК, Г. П. ГУБАНОВ

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

(резюме)

Исследуется задача об асимптотическом поведении верхней грани уклонения функций $f(x, y)$ класса $W^{(r, l)}_{\omega_1, \omega_2}$ от сумм Валле Пуссена.

Б. В. КОВАЛЬЧУК, Г. П. ГУБАНОВ

ОЦІНКА ЗАЛИШКУ ПРИ НАБЛИЖЕННІ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЗРІЗАНИМИ СЕРЕДНІМИ ВІД ПОЛІНОМІВ, НАЙКРАЩИХ В ЗАДАНІЙ СИСТЕМІ ТОЧОК

Нехай $MH^{(\alpha)}$ ($0 < \alpha < 1$) є клас 2π -періодичних функцій $f(x)$, які задовольняють умову Ліпшица степеня α з константою M .

Через $NW^{(r)}$ ($r \geq 1$) позначаємо клас функцій періоду 2π , r -та похідна яких не перевищує за абсолютною величиною константу N .

Зрізані середні арифметичні суми від поліномів, які найкраще наближають неперервну 2π -періодичну функцію $f(x)$ в системі точок $x_k = \frac{k\pi}{n}$, мають вигляд

$$\sigma_{n,p}(f; x) = \frac{1}{2n(p+1)} \sum_{k=1}^{2n} f(x_k) \frac{\sin \frac{2n-p-1}{2}(x-x_k) \sin \frac{p+1}{2}(x-x_k)}{\sin^2 \frac{1}{2}(x-x_k)}.$$

Нами вивчається асимптотична поведінка величин

$$E_{n,p}(MH^{(\alpha)}; x) = \sup_{f \in MH^{(\alpha)}} |f(x) - \sigma_{n,p}(f; x)|;$$

$$E_{n,p}(NW^{(r)}; x) = \sup_{f \in NW^{(r)}} |f(x) - \sigma_{n,p}(f; x)|.$$

Теорема 1. При $n \rightarrow \infty$, рівномірному відносно p ($0 \leq p \leq n$), справедлива асимптотична рівність

$$E_{n,p}(MH^{(\alpha)}; x) = \frac{M |\sin nx|}{\pi^{1-\alpha} n^\alpha} \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

причому

$$E_{n,p}\left(MH^{(\alpha)}; \frac{k\pi}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Теорема 2. При $n \rightarrow \infty$, рівномірному відносно p ($0 \leq p \leq \theta n$, $0 \leq \theta < 1$), має місце асимптотична рівність

$$E_{n,p}(NW^{(r)}; x) = \frac{8N |\sin nx|}{\pi^2 n^r} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v (r-1)}{(2v+1)^{r+1}} \ln \frac{n}{p+1} + O\left(\frac{1}{n^r}\right),$$

причому

$$E_{n,p}\left(NW^{(r)}; \frac{k\pi}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

При доведенні цих теорем ми спираємося на результати [3, 4] і використовуємо оцінки, одержані в роботах [1, 2].

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн. ДАН СССР, 15, № 3, 1937.
2. J. Favard. Bull. de Sci. Math., 61, 1937.
3. С. М. Никольский. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 15, 1945.
4. В. М. Оловянишников. ДАН СССР, 70, № 5, 1950.

Б. В. КОВАЛЬЧУК, Г. П. ГУБАНОВ

ОЦЕНКА ОСТАТКА ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ УСЕЧЕННЫМИ СРЕДНИМИ ОТ ПОЛИНОМОВ, НАИЛУЧШИХ В ЗАДАННОЙ СИСТЕМЕ ТОЧЕК

(резюме)

Устанавливаются асимптотические оценки верхних граней при приближении непрерывных периодических функций классов $MH^{(\alpha)}$ и $NW^{(r)}$ усеченными средними арифметическими суммами от полиномов, наилучших в системе нулей функций $\sin nx$.

НАУКОВА ХРОНІКА

Захист кандидатських дисертацій на Вченій раді
механіко-математичного факультету Львівського ордена Леніна
державного університету ім. Ів. Франка

№ п. п.	Прізвище дисертанта	Тема дисертації	Опоненти	Дата захисту
1	Михальчук В. Г.	Про алгебраїчну теорію квазіконформних відображень	Чл.-кор. АН УРСР докт. фіз.-мат. наук проф. Лопатинський Я. Б., канд. фіз.-мат. наук доц. Песін І. М.	19.III 1962 р.
2	Потягайло Д. Б.	До теорії однозв'язних ріманових поверхонь	Докт. фіз.-мат. наук проф. Білінський П. П., канд. фіз.-мат. наук доц. Гольдберг А. А.	1.XII 1962 р.
3	Гукевич В. Й.	Деякі питання гармонійної апроксимації	Докт. фіз.-мат. наук проф. Зуховицький С. І., канд. фіз.-мат. наук доц. Лісевич Л. М.	29.XII 1962 р.
4	Лобанов І. Б.	Наближені обчислення в загальноосвітній політехнічній середній школі	Докт. фіз.-мат. наук проф. Кованько О. С., канд. фіз.-мат. наук доц. Білий Б. М.	18.II 1963 р.
5	Гнатиків В. М.	Деякі задачі пологих сферичних оболонок	Докт. техн. наук проф. Біргер І. А., канд. фіз.-мат. наук Підстригач Я. С.	8.IV 1963 р.
6	Лозовий Б. М.	Деякі задачі розтягу і згину пластин з тріщинами	Докт. фіз.-мат. наук проф. Шереметьєв М. П., канд. фіз.-мат. наук Підстригач Я. С.	8.IV 1963 р.
7	Лободзінська І. Г.	Розв'язування крайових задач для полігармонійних рівнянь в n -мірному просторі методом потенціалів	Чл.-кор. АН УРСР докт. фіз.-мат. наук проф. Лопатинський Я. Б., канд. фіз.-мат. наук доц. Костенко В. Г.	13.V 1963 р.

Продовження табл.

№ п. п.	Прізвище дисертанта	Тема дисертації	Опоненти	Дата захисту
8	Вит-вицький П. М.	Деякі плоскі задачі пружно-пластичної рівноваги і хрупкого руйнування	Докт. фіз.-мат. наук проф. Шереметьєв М. П., докт. фіз.-мат. наук проф. Рвачов В. Л.	20.V 1963 р.
9	Койфман Ю. І.	Деякі основні задачі плоскої нелінійної теорії пружності	Докт. техн. наук проф. Вайнберг Д. В., канд. фіз.-мат. наук Підстригач Я. С.	20.V 1963 р.
10	Ковальчук Б. В.	Дослідження деяких методів наближення класів функцій із заданим модулем неперервності	Докт. фіз.-мат. наук проф. Кованько О. С., канд. фіз.-мат. наук доц. Гаркаві О. Л.	10.VI 1963 р.
11	Мельник З. О.	Змішані задачі для деяких гіперболічних рівнянь і систем	Докт. фіз.-мат. наук проф. Шереметьєв М. П., канд. фіз.-мат. наук Ковальчик І. М.	21.X 1963 р.
12	Шаблій О. М.	Деякі задачі про несучу здатність і коливання пластин і оболонок, підсилених ребрами жорсткості	Докт. техн. наук проф. Григор'єв А. С., канд. фіз.-мат. наук доц. Прусов І. О.	21.X 1963 р.
13	Губанов І. П.	Деякі питання наближення функцій двох змінних тригонометричними многочленами	Докт. фіз.-мат. наук проф. Кованько О. С., канд. фіз.-мат. наук проф. Соколов І. Г.	28.X 1963 р.
14	Мартиненко М. Д.	Деякі крайові задачі для безмежних областей	Докт. фіз.-мат. наук проф. Шереметьєв М. П., канд. фіз.-мат. наук доц. Скоробогатько В. Я.	23.XII 1963 р.
15	Марковський А. І.	До теорії диференціальних операторів з постійними коефіцієнтами	Канд. фіз.-мат. наук проф. Соколов І. Г., канд. фіз.-мат. наук Горін Є. О.	23.XII 1963 р.
16	Галасі А. А.	Про напружений стан напівбезмежної пластинки з підкріпленим краєм	Доктор фіз.-мат. наук проф. Мехніцький С. Г., канд. фіз.-мат. наук доц. Мартинович Т. Л.	24.II 64 р.
17	Кесельман Г. М.	Про збіжність розкладів за власними функціями несамопряжених диференціальних операторів	Докт. фіз.-мат. наук проф. Лідський В. Б., канд. фіз.-мат. наук доц. Костенко В. Г.	16.III 64 р.

Продовження табл.

№ п. п.	Прізвище дисертанта	Тема дисертації	Опоненти	Дата захисту
18	Дениско С. В.	Спеціальні питання еквівареального відображення поверхонь	Докт. фіз.-мат. наук проф. Кованько О. С., канд. фіз.-мат. наук Михайловський В. Г.	22.IV 64 р.
19	Парасюк Л. С.	Система диференціальних рівнянь еліптичного типу з полярною особливістю в коефіцієнтах	Академік АН УРСР проф. Митропольський Ю. А., канд. фіз.-мат. наук доц. Скоробогатько В. Я.	22.IV 64 р.
20	Парасюк Є. М.	Про один клас сингулярних диференціальних рівнянь	Докт. фіз.-мат. наук Данилюк І. І. (Новосибірськ), канд. фіз.-мат. наук Ковальчик І. М.	20.V 64 р.
21	Кізіма Я. М.	Напружено-деформований стан пружної кулі, підданої осесиметричному тиску штампа	Докт. фіз.-мат. наук проф. Флейшман Н. П., канд. фіз.-мат. наук Панасюк В. В.	20.V 64 р.
22	Амелькович В. Г.	Деякі теореми про наближення неперервних функцій лінійними операторами	Докт. фіз.-мат. наук проф. Коровкін П. П. (Москва), канд. фіз.-мат. наук доц. Песін І. М.	3.VI 64 р.
23	Онишко Л. В.	Деякі плоскі задачі теорії поширення тріщин	Докт. фіз.-мат. наук проф. Рвачов В. Л., канд. фіз.-мат. наук Лозовий Б.	30.VI 64 р.
24	Гембара В. М.	Деякі питання теорії теплопровідності і термopужності тонких пластин	Докт. фіз.-мат. наук проф. Даниловська В. І., канд. фіз.-мат. наук Панасюк В. В.	30.VI 64 р.
25	Марцун Н. Ф.	Про деякі типи інтерференції для цілих функцій скінченного ступеня	Канд. фіз.-мат. наук проф. Соколов І. Г., канд. фіз.-мат. наук Гукевич В. Й.	9.XII 64 р.
26	Кукс Л. М.	Коливання рішень першої крайової задачі для деяких еліптичних рівнянь і систем	Докт. фіз.-мат. наук проф. Лопатинський Я. Б., докт. фіз.-мат. наук проф. Кованько О. С., докт. фіз.-мат. наук проф. Ландіс Є. М., канд. фіз.-мат. наук доц. Кондратьєв В. О.	11.III 64 р.

З М І С Т

О. М. Введенський. Кручення еліптичних кривих над локальним полем	3
С. В. Дениско. Про одну властивість прямолінійної конгруенції, складеної з дотичних до лінії кривини	7
Є. С. Дорожовський, Б. М. Кордуба, В. Г. Костенко. Задача Діріхле плоскої електростатики	9
О. М. Костовський. Застосування добутків Лобачевського—Греффе в методах чисельного визначення нулів функцій	16
М. Д. Мартиненко. Основні крайові задачі теорії пружності для областей з «щілинами»	25
В. Ф. Рогаченко. Геометричні побудови в неевклідових просторах	34
Є. С. Дорожовський, Б. М. Кордуба, В. Г. Костенко. Розрахунок поля і траєкторій однієї плоскої електронно-оптичної системи	46
Б. В. Валько, Й. В. Людкевич, І. О. Прусов. Розрахунок електростатичного поля системи електродів малої товщини методом нелінійних параметрів	50
Т. М. Воловик, Л. О. Кіцера. Про деякі зміни в блоці № 5 накоплювача на магнітному барабані ЕОМ «Урал-1»	54
В. О. Ліхачов. Скрут циліндра, який спаяний з жорстким валом	57
Т. Л. Мартинович. Пружна рівновага пластинки з криволінійним контуром, підкріпленим пружним кільцем	61
І. О. Прусов. Напружений стан в площині з запресованою шайбою з щілинами	71
Н. П. Флейшман, Ю. Г. Розенталь. Напружений стан відкритої тонкостінної конструкції, яка складається з пластин і оболонок	76
Б. В. Ковальчук, Г. П. Губанов. Про наближення періодичних функцій двох змінних сумами Валле Пуссена	89
Б. В. Ковальчук, Г. П. Губанов. Оцінка залишку при наближенні періодичних функцій зрізаними середніми від поліномів, найкращих в заданій системі точок	91
Наукова хроніка	93

CONTENTS

<i>O. M. Vedensky.</i> Elliptical curve torsion over the local field	3
<i>S. V. Denisko.</i> On a property of the straight line congruence composed of the curvity line tangrents	7
<i>E. S. Dorozhovsky, B. M. Korduba, V. G. Kostenko.</i> The Dirichle problem for plane electrostatics	9
<i>A. N. Kostovsky.</i> An application of Lobachevsky—Greffé products to the calculation of zeroes of functions	16
<i>M. D. Martinenko.</i> Basic edge problems of the elasticity theory for regions with slits	25
<i>V. F. Rogachenko.</i> The geometric constructions in the non-Euclidean spaces	34
<i>E. S. Dorozhovsky, B. M. Korduba, V. G. Kostenko.</i> The field and trajectory calculation of a plane electronic optical system	46
<i>B. V. Valko, J. V. Ludkevich, I. A. Prussov.</i> The electrostatic field calculation of a small crossection electrode system by means of non-linear parametres	50
<i>T. M. Volovik, L. O. Kitsera.</i> On certain changes in block No 5 of the magnetic drum accumulator in the Ural-1 electronic computer	54
<i>V. A. Likhachov.</i> Torsion of a cylinder welded with a rigid shaft	57
<i>T. L. Martinovich.</i> Elastic equilibrium of a curve-outlined plate strengthened by an elastic ring	61
<i>I. A. Prussov.</i> Tension in a plane having a pressed — in washer with slits	71
<i>N. P. Fleishman, J. J. Rosental.</i> Elastic equilibrium of an open thin-walled construction composed of plates and shells	76
<i>B. V. Kovalchuk, G. P. Gubanov.</i> The estimate of remainder under approximation of the periodic functions by the truncated averages of polinoms which are the best in given system of poinnts	89
<i>B. V. Kovalchuk, G. P. Gubanov.</i> On the approximation of periodic functions of two variables by Vallee Poussin's sums	91
Scientific Chronicle	93

Редактор Ф. О. Гриншпон
Технічний редактор Т. В. Саранюк
Коректор С. А. Харитонova

*Вестник Львовского ордена Ленина
государственного университета
им. Ивана Франка*

Серия механико-математическая
(На украинском языке).

БГ 00028. Здано до набору 21. XI 1964 р.
Підписано до друку 5. III 1965 р. Формат
паперу $70 \times 108 \frac{1}{16}$. Папер. арк. 3,125. Умовн.
друк. арк. 8,75. Обл.-видавн. арк. 7,2. Ти-
раж 500. Ціна 36 коп. Зам. 2471.

Львівська друкарня № 14 Державного комі-
тету Ради Міністрів УРСР по пресі.
Львів, Стефаника, 11.

36 коп.