УДК 517.512

В. О. ГУКЕВИЧ

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ПОВНИХ СИСТЕМ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЙЖЕ ОРТОГОНАЛЬНІ ЗА БЕЛМАНОМ

Лема. Нехай $f(t)$ є $L_2(a, b)$ і $\varphi_i(t)$ — система майже ортогональних за Белманом функцій на $[a, b]$ [1], для яких

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2 = A < 1, \tag{1}$$

де

$$a_{ik} = \begin{cases} \int\limits_a^b \varphi_i(t)\,\varphi_k(t)\,dt, & i \neq k, \\ 0, & i = k. \end{cases}$$

Якщо $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{in}\varphi_i(t)$ — узагальнений многочлен порядку n найкращого середньоквадратичного наближення функції $f(t)$ на $[a, b]$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2 \leqslant \frac{1}{1-\sqrt{A}} \int\limits_a^b f^2(t)\,dt.$$

Доведення. Нехай $c_i = \int\limits_a^b f(t)\varphi_i(t)\,dt$. Тоді, як відомо [1],

$$c_i = \alpha_{in} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn}\, a_{ik} \tag{2}$$

$$0 \leqslant \int\limits_a^b \left[f(t) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}\varphi_i(t) \right]^2 dt = \int\limits_a^b f^2(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} c_i. \tag{3}$$

Таким чином,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} c_i \leqslant \int\limits_a^b f^2(t)\,dt$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} c_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} \alpha_{kn} a_{ik}.$$

Але за нерівністю Шварца

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{in} \alpha_{kn} a_{ik} \right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2 \alpha_{kn}^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2 \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2} \leqslant A \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2 .$$

Із формули (3) і останньої нерівності дістаємо

$$(1 - \sqrt{A}) \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2 - \left| \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} \alpha_{kn} a_{ik} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} c_i \leqslant \int_a^b f^2(t)\, dt,$$

що, беручи до уваги умову $A < 1$, завершує доведення леми.

Теорема 1. *Нехай* $\{\varphi_n(t)\}$ — *система майже ортогональних за Белманом на* $[a, b]$ *функцій:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ik}^2 = A < 1.$$

Якщо, крім того, система $\{\varphi_n(t)\}$ є повною на $[a, b]$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t) = \infty$$

майже скрізь на $[a, b]$.

Доводимо від протилежного. Нехай E — множина збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 \ (t)$ і mes $E > 0$. Тоді існує таке число $\mu > 0$ і така множина F, що mes $F > 0$ і

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t) < \mu \text{ на } F. \tag{4}$$

Нехай далі множина $G \subset F$, $0 < \text{mes}\, G \leqslant \frac{1-\sqrt{A}}{4\mu}$ і $g(t)$ — характеристична функція множини G.

Якщо через $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}\varphi_i(t)$ позначити узагальнений многочлен порядку n найкращого середньоквадратичного наближення функції $g(t)$ на $[a, b]$, то за лемою 1

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2 \leqslant \frac{1}{1-\sqrt{A}} \int_a^b g^2(t)\, dt \leqslant \frac{\text{mes}\, G}{1-\sqrt{A}} \leqslant \frac{1}{4\mu}.$$

З останньої нерівності, нерівностей Шварца і (4) дістаємо для $t \in F$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}\varphi_i(t)\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(t)} < \frac{1}{2}. \qquad (5)$$

Але, зважаючи на повноту системи $\{\varphi_n(t)\}$ на $[a, b]$ послідовність $\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}\varphi_i(t)\right\}$ є збіжною до $g(t)$ на $[a, b]$ і тим більше на G в сенсі середньоквадратичного наближення. З останнього випливає [1] існування такої послідовності натуральних чисел $\{n_k\}$ і такої множини $G^* \subset G$, $\text{mes}\, G^* = \text{mes}\, G$, що

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_{in_k}\varphi_i(t) = g(t), \quad t \in G^*, \qquad (6)$$

Але $g(t) = 1$ на G^*, оскільки $G^* \subset G$ і $g(t)$ — характеристична функція множини G. Зі сказаного і нерівності (6) випливає для $t \in G^*$ існування такого числа $n(t)$, що

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}\varphi_i(t) > \frac{1}{2},$$

коли $n_k > n(t)$. Ми одержали протиріччя з нерівністю (5).

Теорема 1 є перенесенням відомої теореми для повних ортонормованих систем [1] на повні системи майже ортогональні в сенсі Белмана.

Для тих систем при обмеженні $A < 1$ справедливе також твердження, аналогічне до відповідного твердження для повних ортонормованих систем [1], яке доводиться подібним способом. А саме справедлива теорема 2.

Т е о р е м а 2. *Нехай* $\{\varphi_n(t)\}$ — *повна майже ортогональна за Белманом система функцій на* $[a, b]$ *та*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^2 = A < 1.$$

1. Існує послідовність $\{a_k\}$ *така,* що $\lim\limits_{K\to\infty} a_k=0$, *але*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \varphi_n^2(t) = \infty\ .$$

2. Послідовність $\{b_k\}$ *така, що* $\lim\limits_{K\to\infty} b_k=0$, *але*

$$\lim_{n\to\infty} \text{syp} \left|\sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k(t)\right| = \infty$$

майже скрізь на $[a, b]$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кичмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1958.

УДК 517.917

Л. М. ЛІСЕВИЧ, Б. В. КОВАЛЬЧУК

СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ І ПОНЯТТЯ РЯДУ ФУР'Є ДЛЯ S^p-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

1. Середнє значення S-майже періодичних матриць *. У роботі [3] дано означення S^p-майже періодичної матриці $(p\geqslant 1)$ і введено поняття S^p-норми.

Матрицю $F(x)=[f_{jk}(x)](-\infty<x<+\infty)$ називаємо S^p-майже періодичною, якщо всі елементи її $f_{jk}(x)$ є S^p-майже періодичними функціями, а S^p-норму матриці вводимо так:

$$\|F\|_{S^p} = \sup_x \sum_{j,k} \left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l} |f_{jk}(t)^p|\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Відомо [2], що для кожної S-майже періодичної функції $f(x)$ існує середнє значення

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\,dx$$

рівномірно відносно $\alpha\in(-\infty, +\infty)$.

* При $p=1$ пишемо S замість S^1.