Теорема 2. *Нехай $\{\varphi_n(t)\}$ — повна майже ортогональна за Белманом система функцій на $[a, b]$ та*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^2 = A < 1.$$

1. Існує послідовність $\{a_k\}$ така, що $\lim_{K \to \infty} a_k = 0$, *але*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \varphi_n^2(t) = \infty .$$

2. Послідовність $\{b_k\}$ така, що $\lim_{K \to \infty} b_k = 0$, *але*

$$\lim_{n \to \infty} \text{syp} \left| \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k(t) \right| = \infty$$

майже скрізь на $[a, b]$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кичмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1958.

УДК 517.917

Л. М. ЛІСЕВИЧ, Б. В. КОВАЛЬЧУК

СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ І ПОНЯТТЯ РЯДУ ФУР'Є ДЛЯ S^p-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

1. Середнє значення S-майже періодичних матриць *. У роботі [3] дано означення S^p-майже періодичної матриці $(p \geq 1)$ і введено поняття S^p-норми.

Матрицю $F(x) = [f_{jk}(x)] (-\infty < x < +\infty)$ називаємо S^p-майже періодичною, якщо всі елементи її $f_{jk}(x)$ є S^p-майже періодичними функціями, а S^p-норму матриці вводимо так:

$$\| F \|_{S^p} = \sup_x \sum_{j, k} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} | f_{jk}(t)^p | \, dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Відомо [2], що для кожної S-майже періодичної функції $f(x)$ існує середнє значення

$$M\{f(x)\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \, dx$$

рівномірно відносно $\alpha \in (-\infty, +\infty)$.

* При $p = 1$ пишемо S замість S^1.

О з н а ч е н н я. Середнім значенням S-майже періодичної матриці $F(x)=[f_{jk}(x)]$ назвемо числову матрицю

$$M\{F(x)\}=[M\{f_{jk}(x)\}]. \tag{1.1}$$

Середнє значення (1.1) має такі очевидні властивості:

а) якщо $F(x)=A$ — стала матриця, то $M\{A\}=A$.

б) $M\{F(ax+b)\}=M\{F(x)\}$, де $a\neq 0$, b — довільні дійсні числа.

в) $M\{\alpha F(x)+\beta G(x)\}=\alpha M\{F(x)\}+\beta M\{G(x)\}$, де $F(x)$, $G(x)$—S-майже періодичні матриці, а α, β — довільні комплексні числа.

г) $M\{\overline{F(x)}\}=\overline{M\{F(x)\}}$.

Т е о р е м а 1.1. *Якщо $F(x)=[f_{jk}(x)]$ ненульова S-майже періодична матриця, то*

$$\| M\{F(x)\}\|_s>0. \tag{1.2}$$

Д о в е д е н н я. Якщо S-майже періодична функція $f(x)\not\equiv\not\equiv 0$, то

$$M\{|f(x)|\}>0.$$

У такому разі на основі співвідношення

$$\| M\{F(x)\}\|_s=\sum_{j,k} M\{|f_{jk}(x)|\}$$

одержуємо наше твердження.

Н а с л і д о к. Із теореми 1.1 випливає, що

$$\| M\{F(x)\|_s=0 \tag{1.3}$$

тоді і тільки тоді, коли S-майже періодична матриця $F(x)$ є нульовою.

Т е о р е м а 1.2. *Якщо $F(x)=[f_{jk}(x)]$ — S-майже періодична матриця, то*

$$\|M\{F(x)\}\|_s\leqslant\|F(x)\|_s. \tag{1.4}$$

Д о в е д е н н я. Для S-майже періодичних функцій $f_{jk}(x)$ маємо

$$\frac{1}{T}\int_x^{x+T}|f_{jk}(t)|\,dt\leqslant\sup_x\frac{1}{T}\int_x^{x+T}|f_{jk}(t)|\,dt=\|f_{jk}\|_s,$$

а, отже, і

$$M\{|f_{jk}(x)|\}\leqslant\|f_{jk}\|_s.$$

Тепер легко одержати нерівність (1.4)

Т е о р е м а 1.3 *Якщо $F_n(x)\,(n=1, 2, \ldots)$ — S-майже періодичні матриці і*

$$\lim_{n\to\infty}\|F_n(x)-F(x)\|_s=0$$

рівномірно відносно $x \in (-\infty, +\infty)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \| M\{F_n(x)\} - M\{F(x)\}\|_s = 0. \qquad (1.5)$$

Доведення. У [3] показано, що $F(x)$ є S-майже періодичною матрицею. А на основі теореми 1.2 одержуємо

$$\| M\{F_n(x)\} - M\{F(x)\}\|_s \leqslant \| F_n(x) - F(x)\|_s.$$

Звідси випливає наше твердження.

2. Простір S^p-майже періодичних матриць. Означення 1. Множину Σ_p всіх S^p-майже періодичних матриць $F(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ називатимемо простором S^p-майже періодичних матриць.

Легко зауважити, що множина Σ_p^* всіх S^p-майже періодичних матриць одного й того ж виміру є лінійним підпростором простору Σ_p.

Під скалярним добутком двох S^2-майже періодичних функцій $f(x)$, $g(x)$ розуміють число

$$(f, g) = M\{f(x)\cdot\overline{g(x)}\}.$$

Означення 2. Скалярним добутком двох матриць $F(x) = [f_{jk}(x)]$, $G(x) = [g_{jk}(x)]$ із Σ_2^* назвемо число

$$(F, G) = M\left\{\sum_{j,k} f_{jk}(x)\cdot\overline{g_{jk}(x)}\right\} = M\{Sp\,(F\cdot G^*)\}, \qquad (2.1)$$

де $G^*(x)$ — ермітово-транспонована матриця $G(x)$.

Легко перевірити, що скалярний добуток (2.1) має всі властивості скалярного добутку і при цьому справедливе співвідношення

$$(F, G) = \sum_{j,k} (f_{jk}, g_{jk}). \qquad (2.2)$$

Під нормою S^2-майже періодичної функції $f(x)$ розуміють невід'ємне число

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{M\{|f(x)|^2\}}.$$

Означення 3. Нормою матриці $F(x) = [f_{jk}(x)]$ із Σ_2^*, породженою скалярним добутком (2.1), назвемо невід'ємне число

$$\|F\| = \sqrt{(F, F)} = \sqrt{M\left\{\sum_{j,k} |f_{jk}(x)|^2\right\}}. \qquad (2.3)$$

Можна довести, що введена норма (2.3) має всі відомі властивості норми і при цьому

$$\|F\| = \sqrt{\sum_{j,k} \|f_{jk}\|^2}. \qquad (2.4)$$

О з н а ч е н н я 4. Дві матриці $F(x)$, $G(x)$ із Σ_2^* назвемо ортогональними, якщо

$$(F, G) = 0. \tag{2.5}$$

О з н а ч е н н я 5. Матрицю $F(x) \in \Sigma_2^*$ назвемо нормованою, якщо

$$\|F\| = 1, \tag{2.6}$$

тобто

$$(F, F) = 1.$$

Ортогональну і нормовану систему матриць із Σ_2^* називатимемо ортонормованою системою.

3. Ряд Фур'є S^p-майже періодичних матриць. Розглянемо S^p-майже періодичну матрицю $F(x) = [f_{jk}(x)]$ і знайдемо добуток

$$F(x) e^{-i\lambda x} = [f_{jk}(x) e^{-i\lambda x}] \quad (-\infty < \lambda < +\infty),$$

який є S-майже періодичною матрицею [3].

Відомо [2], що для кожної S^p-майже періодичної функції $f(x)$ її спектральна функція

$$a(\lambda) = M\{f(x) e^{-i\lambda x}\} \tag{3.1}$$

відмінна від нуля лише для скінченної або зчисленної множини значень λ.

Отже, S-норма матриці

$$A(\lambda) = M\{F(x) e^{-i\lambda x}\} \tag{3.2}$$

буде додатна також для скінченної або зчисленної множини значень λ. Ті значення $\lambda = \lambda_n$, для яких норма матриці (3.2) додатна, називатимемо показниками Фур'є S^p-майже періодичної матриці $F(x)$, а

$$A_n = A(\lambda_n) = M\{F(x) e^{-i\lambda_n x}\} \tag{3.3}$$

її матричними коефіцієнтами Фур'є.

Сукупність всіх показників Фур'є S^p-майже періодичної матриці $F(x)$ називається її спектром.

О з н а ч е н н я. Рядом Фур'є S^p-майже періодичної матриці $F(x) = [f_{jk}(x)]$ назвемо скінченний або нескінченний тригонометричний ряд

$$F(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}, \tag{3.4}$$

де $\{\lambda_n\}$ — спектр матриці $F(x)$, а A_n — матричні коефіцієнти Фур'є цієї матриці, які визначаються формулою (3.3)

Зауважимо, що інколи ряд Фур'є S^p-майже періодичної матриці $F(x)$ записуємо у вигляді континуальної суми

$$F(x) \sim \sum_\lambda A(\lambda) e^{i\lambda x}, \tag{3.5}$$

де матричні коефіцієнти Фур'є $A(\lambda)$ визначаються формулою (3.2). При цьому треба розуміти, що в ряді Фур'є (3.5) норма матриці (3.2) дорівнює нулеві для λ, не рівного показникові Фур'є матриці $F(x)$.

Теорема 3.1. *Для кожної S^2-майже періодичної матриці $F(x)=[f_{jk}(x)]$ ряд із квадратів норм її матричних коефіцієнтів Фур'є A_n збіжний. При цьому справедлива нерівність Бесселя*

$$\sum_n \|A_n\|^2 \leqslant \|F\|^2. \tag{3.6}$$

Доведення. Якщо $f(x)$ є S^2-майже періодична функція, то для будь-якого скінченного набору $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ різних дійсних чисел має місце нерівність Бесселя [2]

$$\sum_{n=1}^{N} |a(\lambda_n)|^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{3.7}$$

де $a(\lambda_n)$ визначаються формулою (3.1).

Тому що

$$A(\lambda_n)=[a_{jk}(\lambda_n)],$$

то на основі формул (2.4) і (3.7) одержуємо

$$\sum_{n=1}^{N} \|A(\lambda_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{j,k} |a_{jk}(\lambda_n)|^2\right) = \sum_{j,k}\left(\sum_{n=1}^{N} |a_{jk}(\lambda_n)|^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j,k} \|f_{jk}\|^2 = \|F\|^2,$$

тобто

$$\sum_{n=1}^{N} \|A(\lambda_n)\|^2 \leqslant \|F\|^2.$$

Перейшовши в останній нерівності до границі, коли $N \to +\infty$, маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A(\lambda_n)\|^2 \leqslant \|F\|^2.$$

Тим самим твердження теореми доведено.

Теорема 3.2. *Якщо тригонометричний ряд*

$$F(x)=\sum_n C_n e^{i\lambda_n x} \quad (-\infty < x < +\infty), \tag{3.8}$$

де $C_n=[c_{jk}^{(n)}]$, рівномірно збіжний за S^p-нормою, то він є рядом Фур'є своєї суми $F(x)$.

Доведення. Відомо [3], що сума $F(x)$ є S^p-майже періодичною матрицею. Тепер на основі співвідношення

$$A(\lambda) = M\{F(x)e^{-i\lambda x}\} = \left[\sum_n C_{jk}^{(n)} M\{e^{i(\lambda_n-\lambda)x}\}\right]$$

наше твердження доводиться так само, як аналогічна теорема в роботі [1].

Наслідок. Тригонометричний ряд (3.8) є рядом Фур'є своєї суми $F(x)$, якщо

$$\sum_n \| C_n \|_s < \infty.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости М., «Наука», 1967.
2. Левитан Б. М. Почти периодические функции. М., ГИТТЛ, 1953.
3. Лісевич Л. М., Ковальчук Б. В. S^p-майже періодичні матриці та лінійна система диференціальних рівнянь з S^p-майже періодичною правою частиною. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1973, вип. 8.

УДК 517.946

І. М. КОЛОДІЙ

НЕРІВНІСТЬ ХАРНАКА ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

У роботі розглядаються квазілінійні еліптичні диференціальні рівняння з виродженням виду

$$\operatorname{div} A(x, u, u_x) = B(x, u, u_x). \qquad (1)$$

Для узагальнених розв'язків доведено нерівність, що узагальнює класичну нерівність Харнака для гармонічних функцій. Ми застосовуємо техніку, запропоновану в [5] і розвинуту в інших роботах [4, 6].

Результат нашої статті анонсовано в [1].

Нехай Ω — обмежена область в n-мірному евклідовому просторі E^n, $x=(x_1, \ldots, x_n)$; $K_r(y)$ — куб $(x: |x_i-y_i|<r)$, $K_r=K_r(0)$; $\mu=\mu(x)=(\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x))$, де $\mu_i(x)$, $i=1, \ldots, n$ — невід'ємні вимірні функції на Ω, $\overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\mu, \Omega)$, $W^1_\beta(\mu, \Omega)$ — повні нормовані простори [2].