Доведення. Відомо [3], що сума $F(x)$ є S^p-майже періодичною матрицею. Тепер на основі співвідношення

$$A(\lambda) = M\{F(x)e^{-i\lambda x}\} = \left[\sum_n C_{jk}^{(n)} M\{e^{i(\lambda_n-\lambda)x}\}\right]$$

наше твердження доводиться так само, як аналогічна теорема в роботі [1].

Наслідок. Тригонометричний ряд (3.8) є рядом Фур'є своєї суми $F(x)$, якщо

$$\sum_n \|C_n\|_s < \infty.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости М., «Наука», 1967.
2. Левитан Б. М. Почти периодические функции. М., ГИТТЛ, 1953.
3. Лісевич Л. М., Ковальчук Б. В. S^p-майже періодичні матриці та лінійна система диференціальних рівнянь з S^p-майже періодичною правою частиною. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1973, вип. 8.

УДК 517.946

І. М. КОЛОДІЙ

НЕРІВНІСТЬ ХАРНАКА ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

У роботі розглядаються квазілінійні еліптичні диференціальні рівняння з виродженням виду

$$\operatorname{div} A(x, u, u_x) = B(x, u, u_x). \tag{1}$$

Для узагальнених розв'язків доведено нерівність, що узагальнює класичну нерівність Харнака для гармонічних функцій. Ми застосовуємо техніку, запропоновану в [5] і розвинуту в інших роботах [4, 6].

Результат нашої статті анонсовано в [1].

Нехай Ω — обмежена область в n-мірному евклідовому просторі E^n, $x=(x_1, \ldots, x_n)$; $K_r(y)$ — куб $(x: |x_i-y_i|<r)$, $K_r=K_r(0)$; $\mu=\mu(x)=(\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x))$, де $\mu_i(x)$, $i=1, \ldots, n$ — невід'ємні вимірні функції на Ω, $W_\beta^1(\mu, \Omega)$, $\mathring{W}_\beta^1(\mu, \Omega)$ — повні нормовані простори [2].

Розглянемо рівняння (1) в області Ω за умови, що функції $A(x, u, u_x)$, $B(x, u, u_x)$ задовольняють умовам (2), (3) роботи [2]. Позначимо

$$M(\rho,y)=\sum_{i=1}^{n}\left(\rho^{-n}\int\limits_{K_\rho(y)}(\mu_i^{\beta}(x)\lambda_i^{1-\beta}(x))^s\,dx\right)^{\frac{1}{s}},\ P_{(\rho,y)}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\rho^{-n}\int\limits_{K_\rho(g)}\lambda^{-t_i}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{t_i}};$$

$$H(\rho,y)=M(\rho,y).P(\rho,y),\ H(\rho)=M(\rho)\,P(\rho)=M(\rho,0)\,P(\rho,0);$$

$$\varkappa(\rho)=\left(\rho^{\frac{\theta}{4}}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{e^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x)}{\mu_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x)}\right\|_{L_s(K_\rho)}\right)^{\frac{1}{\beta}}+\left(\rho^{\frac{\theta}{4}}\|f(x)\|_{L_s(K_\rho)}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}+$$

$$+\left(\rho^{\frac{\theta}{4}}\|g(x)\|_{L_s(K_\rho)}\right)^{\frac{1}{\beta}};$$

$$\theta=n\left(\frac{\beta}{n}-\frac{1}{s}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\right)>0.$$

Теорема. *Нехай $u(x)$ — невід'ємний узагальнений розв'язок* рівняння (1) в кубі $K_{8r}\subset\Omega$ (число r — достатньо мале), а $\varkappa_1$ — додатна константа, така, що $H(h, y)\leqslant\varkappa_1$ для довільної точки $y\in K_{4r}$ і довільного $h\in(0{,}8\,r)$. Тоді*

$$\operatorname*{Vrai\,max}_{K_r} u(x)\leqslant C(\operatorname*{Vrai\,min}_{K_r} u(x)+\varkappa(8r), \tag{2}$$

де $C=C(n, \beta, t_i, s, a_1, a_2, \varkappa_1)$.

Доведення. Позначимо $\bar{u}=u+\varkappa+\varepsilon$, $\varkappa=\varkappa(8\,r)$, $\varepsilon>0$; $w=\ln\bar{u}$. Підставимо в інтегральну тотожність функцію $\varphi(x)=$ $=\eta^{\beta}\bar{u}^{1-\beta}$, де $\eta=\prod_{i=1}^{n}\eta_{h,h}(|x_i-y_i|)$, $\eta_{h\,h}(|x_i-y_i|)$ — неперервна функція, що дорівнює одиниці при $|x_i-y_i|\leqslant h$, нулеві при $|x_i-y_i|\geqslant 2h$, лінійна при $h<|x_i-y_i|<2h$. Тоді, враховуючи умови (2), (3) роботи [2] та нерівність Юнга, одержуємо

$$\int\limits_{K_{8r}}\eta^{\beta}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\,|w_{x_i}|^{\beta}\,dx\leqslant C\left[\int\limits_{K_{8r}}|\eta_x|^{\beta}\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{\beta}(x)\,\lambda_i^{1-\beta}(x)\,dx+\right.$$

* Означення узагальненого розв'язку в сенсі інтегральної тотожності є в [2].

$$+\int\limits_{K_{8r}}\eta^{\beta}\Big(\sum_{i=1}^{n}c_i^{\beta}(x)\,\lambda_i^{1-\beta}(x)+\sum_{i=1}^{n}\bar{b}^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x)\,\mu_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x)+\bar{d}(x)+\bar{\omega}(x)\Big)dx\Big],$$

де

$$\bar{d}(x)=d(x)+\varkappa^{-\beta}g(x),\ \bar{\omega}(x)=\omega(x)+\varkappa^{1-\beta}f(x),\bar{b}(x)=b(x)+\varkappa^{1-\beta}e(x).$$

Для правої частини цієї нерівності застосовуємо лему 1 п. 2 роботи [3] і скористаємося тим, що r достатньо мале. Тоді

$$\int\limits_{K_{8r}}\eta^{\beta}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\,|w_{x_i}|^{\beta}\,dx\leqslant C\int\limits_{K_{8r}}|\eta_x|^{\beta}\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{\beta}(x)\,\lambda_i^{1-\beta}(x)\,dx.$$

Звідси, беручи до уваги вибір функції η і нерівність Гельдера, випливає оцінка

$$\int\limits_{K_h(y)}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\,|w_{xi}|^{\beta}\,dx\leqslant C\,h^{n-\beta}M(2h,y),\ 0<h\leqslant 4r. \tag{3}$$

Позначимо $\tilde{w}=(\operatorname{mes}K_h(y))^{-1}\int\limits_{k_h(y)}w\,dx$. Використовуючи теорему С. Л. Соболєва, нерівність Гельдера та оцінку (3), маємо

$$h^{-n}\int\limits_{K_h(y)}|w-\tilde{w}|\,dx\leqslant Ch^{-n+1}\int\limits_{K_h(y)}|w_x|\,dx\leqslant CH^{\frac{1}{\beta}}(2h,y)\leqslant C\varkappa_1^{\frac{1}{\beta}}=\varkappa_0.$$

Тоді за лемою Джона та Ніренберга [7] при $\tau<\tau_0<1$

$$r^{-2n}\int\limits_{K_{4r}}\bar{u}^{-\tau}\,dx\int\limits_{K_{4r}}\bar{u}^{\tau}\,dx\leqslant\zeta, \tag{4}$$

де τ_0 і ς залежать від n і $\varkappa_0$.

Підставимо в інтегральну тотожність функцію $\varphi(x)=\eta^{\beta}\bar{u}^{\alpha}$, де $\eta=\prod\limits_{=1}\eta_{\rho,\sigma}(|x_i|)$, $r<\rho<\rho+\sigma\leqslant 4r$, $\alpha=\beta(q-1)+1$, $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 1-\beta$. Тоді записуємо

$$0=\operatorname{sign}\alpha\int\limits_{K_{4r}}(\varphi_x A+\varphi\,\beta)\,dx=\int\limits_{K_{4r}}\operatorname{sign}\alpha\,(\eta^{\beta}\,\alpha\,\bar{u}^{\alpha-1}Au_x+$$

$$+\beta\eta^{\beta-1}\bar{u}^{\alpha}A_{\eta_x}+\eta^{\beta}\bar{u}^{\alpha}B)\,dx.$$

Враховуючи в останній рівності умови (2), (3) роботи [2], нерівність Юнга, лему роботи [2], нерівність Гельдера, вибір функції η та малість числа r, одержуємо оцінку

$$\left(r^{-n}\int\limits_{K_\rho}\overline{u}^{\beta m p}\,dx\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant C^{s'}\left(1+\frac{r}{\sigma}\right)^{\beta s'}\left(1+\frac{1}{|\alpha|}\right)^{s'}|q|^{s'\beta}\,[r^{\frac{\theta}{2}}+$$

$$+H(4r)]^{s'}\left(r^{-n}\int\limits_{K_{\rho+\sigma}}\overline{u}^{\beta p}\,dx\right), \tag{5}$$

де $m=k(s')^{-1}>1$, $s^{-1}+(s')^{-1}=1$, $p=s'q$, $\alpha=\beta(q-1)+1$.

Проітерувавши цю оцінку при $p\geqslant s'(q\geqslant 1)$, $r<\rho<\rho+\sigma\leqslant\leqslant 2r$, маємо

$$\operatorname*{Vrai\,max}_{K_r}\overline{u}^{\beta}\leqslant C\,[H(4r)+r^{\frac{\theta}{2}}]^{\frac{m}{m-1}}\left(r^{-n}\int\limits_{K_{2r}}\overline{u}^{s'\beta}\,dx\right)^{\frac{1}{s'}}. \tag{6}$$

Оскільки $\alpha\neq 0$, то оцінка (5) справедлива при $q>0$, $q\neq\dfrac{\beta-1}{\beta}$ і $2r\leqslant\rho<\rho+\sigma\leqslant 4r$. Можна вважати, що $m^{-\nu}\neq\dfrac{\beta-1}{\beta}$ при цілих $\nu>0$. Приймемо $p=s'm^{-\nu-1}$, $\nu=0,1,\ldots,l-1$, $\gamma=m^{-l}$, де l — найменше з чисел, що задовольняють умові $\tau=\beta m^{-l}s'<\tau_0$. Нехай

$$\rho=\rho_\nu=2r\left(1+\frac{\nu}{l}\right),\quad \rho+\tau=\rho_{\nu+1},\quad \tau_c\,H_\nu=r^{-n}\int\limits_{K_{\rho\nu}}\overline{u}^{\beta s m^{-\nu}}\,dx,$$

тоді з (5) маємо

$$H_\nu\leqslant C\,[H(4r)+r^{\frac{\theta}{2}}]^{s'm}H_{\nu+1}^{m}.$$

Звідси

$$H_0\leqslant r^{-n}\int\limits_{K_{2r}}\overline{u}^{s'\beta}\,dx\leqslant C\,[H(4r)+r^{\frac{\theta}{2}}]^{s'}\sum_{\nu=0}^{l-1}m^{\nu+1}H_l^{m^l} =$$

$$=C\,[H(4r)+r^{\frac{\theta}{2}}]^{s'\frac{m}{m-1}\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}}\left(r^{-n}\int\limits_{K_{4r}}\overline{u}^{\tau}\,dx\right)^{\frac{\beta s'}{\tau}}. \tag{7}$$

З оцінок (4), (6), (7) випливає

$$\operatorname*{Vrai\,max}_{K_r}\overline{u}^{\beta}\leqslant C\,[H(4r)+r^{\frac{\theta}{2}}]^{\frac{m}{m-1}\frac{1}{\gamma}}\left(r^{-n}\int\limits_{K_{4r}}\overline{u}^{-\beta\gamma s'}\,dx\right)^{-\frac{1}{\gamma s'}} \tag{8}$$

Приймаємо в (5) $p=-\gamma s'm^{\nu}$, $\nu=0, 1, 2, \ldots, 2r<\rho<\rho+\sigma\leqslant \leqslant 4r$, $\rho+\sigma=\rho_{\nu}=2r(1+2^{-\nu})$, $\rho=\rho_{\nu+1}$; проітерувавши цю нерівність, одержуємо

$$\operatorname{Vrai}\min_{K_{2r}} \bar{u}^{\beta} \geqslant C\left[H(4r)+r^{\frac{\theta}{2}}\right]^{-\frac{1}{\gamma}\frac{m}{m-1}}\left(r^{-n}\int_{K_{4r}} \bar{u}^{-\beta\gamma s'}\,dx\right)^{-\frac{1}{\gamma s'}}. \quad (9)$$

Об'єднавши оцінки (8), (9) і спрямувавши ε до нуля, дістаємо нерівність (2).

ЛІТЕРАТУРА

1. Колодий И. М. О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений. — ДАН СССР, 1971, т. 197, № 2.
2. Колодій І. М. Оцінка максимуму модуля узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1974, вип. 9.
3. Колодій І. М. Локальна неперервність за Гельдером узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1974, вип. 9.
4. Кружков С. Н. Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений. — «Математический сборник», 1964, т. 65, № 4.
5. Moser J. On Harnack's theorem of elliptic differential equations. — «Comm. Pure Appl. Math»., 1961, v. 14, № 3.
6. Serrin J. Local behavior of solutions of quasilinear equations. — «Acta Math»., 1964, v. III, № 3—4.
7. Tohn F. and Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation. — «Comm. Pure Appl. Math»., 1961, v. 14, E 3.

УДК 517.946

Г. П. БОЙКО

ПРО ТРЕТЮ ЗОВНІШНЮ УЗАГАЛЬНЕНУ ЗАДАЧУ

У роботах [1—3, 8] досліджується узагальнена задача Неймана для рівняння Лапласа і однорідного еліптичного рівняння другого порядку в області $D\subset R^n$, $n\geqslant 2$, обмеженій поверхнею класу C^m і C^{∞}. Задача узагальнена в тому сенсі, що права частина граничної умови є узагальненою функцією. Доведені теореми єдності та зображення розв'язку, його властивості.

Ми розглядаємо третю зовнішню узагальнену (в тому ж сенсі) задачу для рівняння Шредінгера.

Нехай Ω — область в R^n, розташована зовні замкненої поверхні S класу C^{∞}; $\nu(y)$ — орт зовнішньої нормалі n_y до поверхні S в точці y; S_{ε} — поверхня, розміщена на відстані ε, $\varepsilon\geqslant 0$ по нормалі n від S; Σ_r — сфера радіуса r з центром в початку координат, що містить в собі S. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що початок координат перебуває всередині