Приймаємо в (5) $p=-\gamma s'm^{\nu}$, $\nu=0, 1, 2, \ldots$, $2r<\rho<\rho+\sigma\leqslant\leqslant 4r$, $\rho+\sigma=\rho_{\nu}=2r(1+2^{-\nu})$, $\rho=\rho_{\nu+1}$; проітерувавши цю нерівність, одержуємо

$$\operatorname*{Vrai\,min}_{K_{2r}} \bar{u}^{\beta} \geqslant C\left[H(4r)+r^{\frac{\theta}{2}}\right]^{-\frac{1}{\gamma}\frac{m}{m-1}}\left(r^{-n}\int\limits_{K_{4r}} \bar{u}^{-\beta\gamma s'}\,dx\right)^{-\frac{1}{\gamma s'}}. \quad (9)$$

Об'єднавши оцінки (8), (9) і спрямувавши ε до нуля, дістаємо нерівність (2).

ЛІТЕРАТУРА

1. Колодий И. М. О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений. — ДАН СССР, 1971, т. 197, № 2.
2. Колодій І. М. Оцінка максимуму модуля узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1974, вип. 9.
3. Колодій І. М. Локальна неперервність за Гельдером узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1974, вип. 9.
4. Кружков С. Н. Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений. — «Математический сборник», 1964, т. 65, № 4.
5. Moser J. On Harnack's theorem of elliptic differential equations. — «Comm. Pure Appl. Math»., 1961, v. 14, № 3.
6. Serrin J. Local behavior of solutions of quasilinear equations. — «Acta Math»., 1964, v. III, № 3—4.
7. Tohn F. and Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation. — «Comm. Pure Appl. Math»., 1961, v. 14, E 3.

УДК 517.946

Г. П. БОЙКО

ПРО ТРЕТЮ ЗОВНІШНЮ УЗАГАЛЬНЕНУ ЗАДАЧУ

У роботах [1—3, 8] досліджується узагальнена задача Неймана для рівняння Лапласа і однорідного еліптичного рівняння другого порядку в області $D\subset R^n$, $n\geqslant 2$, обмеженій поверхнею класу C^m і C^∞. Задача узагальнена в тому сенсі, що права частина граничної умови є узагальненою функцією. Доведені теореми єдності та зображення розв'язку, його властивості.

Ми розглядаємо третю зовнішню узагальнену (в тому ж сенсі) задачу для рівняння Шредінгера.

Нехай Ω — область в R^n, розташована зовні замкненої поверхні S класу C^∞; $\nu(y)$ — орт зовнішньої нормалі n_y до поверхні S в точці y; S_ε — поверхня, розміщена на відстані ε, $\varepsilon\geqslant 0$ по нормалі n від S; Σ_r — сфера радіуса r з центром в початку координат, що містить в собі S. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що початок координат перебуває всередині поверхні S. Простір нескінченно диференційованих функцій, визначених на S (простір основних функцій) позначимо через $D(S)$, простір лінійних неперервних функціоналів над $D(S)$ (простір узагальнених функцій) — через $D'(S)$, дію узагальненої функції A на основну функцію φ — через $A[\varphi]$.

Постановка задачі. Нехай $F \in D'(S)$. Треба знайти розв'язок рівняння

$$\Delta u + [\omega^2 + c(\boldsymbol{x})] u = 0 \tag{1}$$

в області Ω, який задовольняє граничній умові

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} P u(\boldsymbol{x}_\varepsilon) \varphi(\boldsymbol{x}_\varepsilon) dS_\varepsilon = F[\varphi] \tag{2}$$

для кожної $\varphi \in D(S)$, $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(y)$ при $x_\varepsilon = y + \varepsilon \nu(y)$; $y \in S$, а на безмежності — умову випромінювання вигляду

$$\lim_{r \to \infty} \int\limits_{\Sigma_r} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u \right|^2 d\Sigma_r = 0, \tag{3}$$

де

$$\omega^2 = \mathrm{const} > 0, \ P_y = \frac{\partial}{\partial n_y} + \sigma(y), \ \sigma \in D(S), \ c(\boldsymbol{x}) \in C^\infty(\Omega).$$

Задача (1)—(3) з умовою на границі вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u |_S = F,$$

де $F \in C^{(0,h)}$, була розглянута в [5]. В [6] знайдено фундаментальний розв'язок $\Phi(x, y)$ рівняння (1), який задовольняє умові (3), в припущенні, що в області Ω

$$c(\boldsymbol{x}) = 0 \left(|\boldsymbol{x}|^{-\frac{n+1}{2} - \delta} \right), \ |\boldsymbol{x}| \to \infty, \ \delta > 0.$$

Вважатимемо цю умову виконаною. Тоді мають місце такі твердження.

Лема 1. Для кожної $\varphi \in D(S)$

$$\int\limits_S \varphi(x) P_x \Phi(x, y) dS \in D(S)$$

і рівномірно відносно $y \in S$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) P_{x_\varepsilon} \Phi(x_\varepsilon, y) dS_\varepsilon = -\frac{1}{2}\varphi(y) + \int\limits_S \varphi(x) P_x \Phi(x, y) dS.$$

Лема 1 є наслідком відповідної леми в [3].

Розглянемо такі інтегральні рівняння:

$$\varphi(y)+2\lambda\int\limits_S \varphi(x)\,P_x\Phi(x,\ y)\,dS=0, \tag{4}$$

$$\psi(y)+2\lambda\int\limits_S \psi(x)\,P_y\Phi(y,\ x)\,dS=0. \tag{5}$$

Лема 2. Число $\lambda=-1$ тоді і тільки тоді є характеристичним числом рангу r інтегральних рівнянь (4) і (5), коли ω^2 — власне число кратності r внутрішньої однорідної задачі Діріхле для рівняння (1).

Лема 2 доводиться методом, використаним в [7] при дослідженні граничних задач для рівняння Гельмгольца.

Якщо ω^2 — власне число кратності r внутрішньої однорідної задачі Діріхле для рівняння (1), то існує, згідно з [7], біортогональна і нормована система головних функцій $\varphi_l^i(y)$, $\psi_l^i(y)$ ($i=1$, $l=1,\ldots,p_1;\ \ldots;\ i=r$, $l=1,\ldots,p_r$) інтегральних рівнянь (4) і (5), що відповідає характеристичному числу $\lambda=-1$ рангу r кратності k. Тут $p_1\leqslant p_2\leqslant\ldots\leqslant p_r;\ p_1+p_2+\ldots+p_r=k$. Ці функції визначаються із таких інтегральних рівнянь:

$$-\varphi^i_{p_i}(y)+2\int\limits_S \varphi^i_{p_i}(x)\,P_x\Phi(x,\ y)\,dS=0,\quad i=1,\ldots,r;$$

$$-\varphi^i_{p_i-l}(y)+2\int\limits_S \varphi^i_{p_i-l}(x)\,P_x\Phi(x,\ y)\,dS=\varphi^i_{p_i-l+1}(y),$$

$$l=1,\ldots,p_i-1;$$

$$-\psi^i_1(y)+2\int\limits_S \psi^i_1(x)\,P_y\Phi(y,\ x)\,dS=0,\quad i=1,\ldots,r;$$

$$-\psi^i_l(y)+2\int\limits_S \psi^i_l(x)\,P_y\Phi(y,\ x)\,dS=\psi^i_{l-1}(y),\quad l=2,\ldots,p_i,$$

причому

$$\int\limits_S \varphi^i_j(y)\,\psi^m_l(y)\,dS=\begin{cases}1, & \text{якщо } i=m, j=l \text{ або } j=l-1,\\ 0 & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Введемо такі позначення:

$$V'(S)=\{V\in D'(S): V[\varphi^i_{p_i}]=0,\quad i=1,\ldots,r\},$$

$$W'(S)=\{W\in D'(S): W[\varphi^i_1]=0,\quad i=1,\ldots,r\}.$$

Лема 3. Перетворення, задане співвідношенням

$$G[g]=F[\varphi_g], \tag{6}$$

де $g \in D(S)$, φ_g — розв'язок інтегрального рівняння

$$-\varphi(y) + 2\int_S \varphi(x) P_x \Phi(x, y)\, dS = g(y) - \sum_{i=1}^{r} B_i \varphi_1^i(y), \quad (7)$$

$$B_i = \int_S g(y) \psi_1^i(y)\, dS, \quad i = 1, \ldots, r$$

визначає ізоморфізм простору $V'(S)$ на $W'(S)$. Обернене перетворення визначається як

$$F[\varphi] = G[-\varphi(y) + 2\int_S \varphi(x) P_x \Phi(x, y)\, dS] \quad (8)$$

для кожної $\varphi \in D(S)$.

Твердження леми випливає з властивостей узагальнених функцій і розв'язків інтегрального рівняння (7).

Теорема 1. *Нехай $F \in D'(S)$ і*

$$G[g] = F[\varphi_g] - \sum_{i=1}^{r} F[\varphi_{p_i}^i] \int_S \varphi_g(y) \psi_{p_i}^i(y)\, dS, \quad (9)$$

де $g \in D(S)$, φ_g — розв'язок інтегрального рівняння (7), тоді функція

$$u(x) = 2G[\Phi(x, y)] + \sum_{i=1}^{r} F[\varphi_{p_i}^i] \times \quad (10)$$

$$\times \left(\sum_{j=i}^{r} C_j^i \int \psi_{p_j - p_i + 1}^i(y) P_y \Phi(x, y)\, dS \right), \quad x \in \Omega,$$

(де C_j^i — певні сталі) *є розв'язком задачі (1)—(3).*

Доведення. Аналогічно [7] можна показати, що

$$\psi_k^i(y) = \sum_{j=i}^{r} C_j^i \int_S \varphi_{p_j - k + 1}^j(x) P_y P_x \Phi(x, y)\, dS, \quad y \in \overline{\Omega},$$

$i = 1, \ldots, r$; $k = 1, \ldots, p_i$. Згідно з властивостями узагальнених функцій і фундаментального розв'язку $\Phi(x, y)$, функція (10) задовольняє рівняння (1) і умову (3). Покажемо, що вона задовольняє граничну умову (2).

Визначимо узагальнену функцію H таким співвідношенням:

$$H[\varphi] = F[\varphi] - \sum_{i=1}^{r} F[\varphi_{p_i}^i] \int_S \varphi(y) \psi_{p_i}^i(y)\, dS, \quad \varphi \in D(S).$$

Легко бачити, що $H \in V'(S)$, і тоді до узагальненої функції H можна застосувати лему 3. Застосовуючи до лівої частини граничної умови послідовно лему 5 з [1] і леми 1, 3, одержуємо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} Pu(x_\varepsilon)\,\varphi(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon = G\left[-\varphi(y) + 2\int_S \varphi(x)\,P_x\Phi(x, y)\,dS\right] +$$

$$+ \sum_{l=1}^{r} F\,[\varphi_{p_l}^{l}] \int_S \varphi(y)\,\psi_{p_l}^{l}(y)\,dS = H\,[\varphi] +$$

$$+ \sum_{l=1}^{r} F\,[\varphi_{p_l}^{l}] \int_S \varphi(y)\,\psi_{p_l}^{l}(y)\,dS = F\,[\varphi]$$

для кожної $\varphi \in D(S)$.

Теорема 2. *Розв'язок третьої зовнішньої узагальненої задачі для рівняння (1) единий.*

Теорема доводиться так само, як і теорема 2 із [3].

Аналогічні результати мають місце для третьої зовнішньої узагальненої задачі для рівняння

$$\sum_{j,\,e=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_e}\left(a_{je}(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + (\omega^2 + c(x))\,u = 0,$$

де

$$a_{je}(x) \in C^\infty(\Omega);\quad a_{je}(x) = \delta_{je},\ |x| \to \infty;$$

$$c(x) = 0\left(|x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta}\right),$$

$$\delta > 0,\ |x| \to \infty.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Гупало Г. С. Про узагальнену задачу Діріхле. — «Доповіді АН УРСР», 1966, № 7.
2. Гупало Г. С. Про узагальнену задачу Неймана. -- «Доповіді АН УРСР», 1967, № 3.
3. Гупало Г. С. Про узагальнену задачу Неймана для диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1969, вип. 4.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958.
5. Данилова И. А. Построение функции Грина третьей внешней краевой задачи для уравнений Шредингера. — «Дифференциальные уравнения», 1970, т. 6, № 12.
6. Данилова И. А. Третья внешняя краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка. I. — «Дифференциальные уравнения», 1971, т. 7, № 4.
7. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
8. Szmydt Z. Sur un probléme de Neumann généralise. — «Ann. Polon. Math.», 1964, 15, № 3.