УДК 517.946

С. П. ЛАВРЕНЮК

ЄДИНІСТЬ І СТІЙКІСТЬ ДЕЯКИХ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

Нехай в однозв'язній області D_0 площини x, y заданий еліптичний диференціальний оператор порядку $2n (n \geqslant 1)$ [2]

$$Lu \equiv \sum_{i+j=2n} a_{ij}(x, y) \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^i \partial y^j} + \sum_{i+j \leqslant 2n-1} b_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = 0, \tag{1}$$

коефіцієнти якого мають скінченні і неперервні похідні до порядку, що дорівнює сумі їх індексів плюс одиниця. Крім того, припустимо, що в області D_0 корені рівняння характеристик будуть всі комплексні, обмежені, неперервні разом з своїми похідними перших $2n+1$ порядків і мають у всій області D_0 сталу кратність.

Нехай D — обмежена область, границя якої S належить класу $A^{(1, \lambda)}$, $D \subset D_0$, а $\mu(x, y)$, $\nu(x, y)$ — обмежені сумовані функції в області D_0.

Плоским потенціалом і потенціалом простого шару для рівняння (1) відповідно називатимемо функції

$$w(x, y; \mu, D) = \iint_D \mu(\xi, \eta) \Omega(x, y; \xi, \eta) \, d\xi d\eta,$$

$$v(x, y;, \nu, S) = \int_S \nu(\xi, \eta) \Omega(x, y; \xi, \eta) \, d_{\xi\eta} S,$$

де $\Omega(x, y; \xi, \eta)$ — фундаментальний розв'язок рівняння (1) в області D_0.

Задача 1. Нехай в області $D_0 \setminus D$ відомо значення плоского потенціалу $w(x, y; \mu, D)$. Потрібно знайти область D.

Задача 2. Припустимо, що в області $D_0 \setminus D$ відоме значення потенціалу простого шару $v(x, y; \nu, S)$. Потрібно знайти криву S.

Нехай $D_j (j=1, 2)$ — скінченні області, обмежені кривими S_j з класу $A^{(1, \lambda)}$, $\bar{D}_j \subset D_0$.

Легко довести лему.

Лема 1. Для того, щоб мали місце рівності

$$w(x, y; \mu_1, D_1) = w(x, y, \mu_2, D_2), \ (x, y) \in D_0 \setminus \bar{D}^e,$$

$$v(x, y; \nu_1, S_1) = v(x, y; \nu_2, S_2), \ (x, y) \in D_0 \setminus D^e$$

необхідно та достатньо, щоб для будь-якої функції $u(x, y)$, яка є розв'язком рівняння

$$L^* u = 0 \tag{2}$$

в області D_0', $\bar{D}^e \subset D_0' \subset \bar{D}_0' \subset D_0$, відповідно мали місце рівності

$$\iint\limits_{D_1} \mu_1 u d\xi d\eta - \iint\limits_{D_2} \mu_2 u d\xi d\eta = 0,$$

$$\int\limits_{S_1} \nu_1 u ds - \int\limits_{S_2} \nu_2 u ds = 0$$

(L^* — оператор, спряжений до L в сенсі Лагранжа).

Припускаємо, що оператор L^* можна зобразити у вигляді добутку двох операторів $L_1 \cdot L_2$, де

$$L_2 \equiv A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 A_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + B_1 \frac{\partial}{\partial x} + B_2 \frac{d}{dy} + C$$

є еліптичним оператором в області D_0, причому $C \geqslant 0$. Тоді очевидно, що кожна функція, яка є регулярним розв'язком рівняння

$$L_2 U = 0 \tag{3}$$

є також розв'язком рівняння (2). Справедлива лема.

Л е м а 2. Якщо наявні рівності

$$w(x, y; \mu_1, D_1) = w(x, y; \mu_2, D_2), \ (x, y) \in D_0 \setminus (\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2),$$

$$v(x, y; \nu_1, S_1) = v(x, y; \nu_2, S_2) \ (x, y) \in D_0 \setminus (\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2),$$

то для довільної функції $u(x, y)$, яка є узагальненим в сенсі Вінера розв'язком рівняння (3) в області $(D_1 \cup D_2)$, відповідно мають місце рівності

$$\iint\limits_{D_1} \mu_1 u d\xi d\eta = \iint\limits_{D_2} \mu_2 u d\xi d\eta, \int\limits_{S_1} \nu_1 u ds = \int\limits_{S_2} \nu_2 u ds.$$

Використовуючи лему 2, легко довести ряд теорем єдиності задачі 1, справедливих для оберненої задачі ньютонівського потенціалу. Зокрема, справедлива наступна теорема.

Т е о р е м а 1. *Нехай області $D_j (j=1, 2)$, обмежені неперервно диференційованими кривими S_j, є зірковими відносно спільної точки, а неперервно диференційовану в D_0 функцію $\mu(x, y)$ можна зобразити у вигляді*

$$\mu = \rho^l \sigma(\varphi) \quad (l \geqslant 1)$$

(ρ, φ — полярні координати точки x, y, причому початок координат перебуває в точці зірковості областей D_j). Тоді, якщо

$$w(x, y; \mu_1, D_1) = w(x, y; \mu_1, D_2); \ (x, y) \in D_0 \setminus (\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2),$$

то $D_1 = D_2$.

Для задачі 2 справедлива теорема:

Теорема 2. *Нехай області* $D_j \subset D_0 (j=1, 2)$ *обмежені опуклими неперервно диференційованими кривими* S_j, *а* $\nu(x, y) \equiv \equiv \text{const}$. *Якщо*

$$v(x, y; \nu, S_1) = v(x, y; \nu, S_2), \ (x, y) \in D_0 \setminus (\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2),$$

то $S_1 \equiv S_2$.

Покладемо надалі $L_2 \equiv \Delta$. Введемо позначення

$$v(x, y) = v(x, y; 1, S_1) - v(x, y; 1, S_2),$$
$$w(x, y) = w(x, y; 1, D_1) - w(x, y; 1, D_2),$$

S^e — границя області $D_1 \cup D_2$.

Теорема 3. *Нехай області* $D_j \subset D_0 (j=1, 2)$, *обмежені неперервно диференційованими кривими* S_j, *є зіркові відносно деякої точки* $0 \in D_0$ *і для будь-якої точки* $P \in S_j$ *виконується умова*

$$\gamma_0 \leqslant (\vec{OP}, \wedge \vec{t}_P) \leqslant \pi - \gamma_0,$$

де $\vec{t}_P$ *— дотична до* S_j *в точці* P, *а* $\gamma_0 > 0$ *— деяка стала.* Якщо

$$\sum_{i+k \leqslant 2n-1} \left| \frac{\partial^{i+k} w(x, y)}{\partial x^i \partial y^k} \right| \leqslant \varepsilon, \ (x, y) \in S^e,$$

то має місце оцінка

$$|f_1(\varphi) - f_2(\varphi)| \leqslant \frac{C_1}{\sqrt[4]{m}},$$

де число m визначається зі співвідношень

$$\left(\frac{1}{m+1}\right)^{2nm+2n+1} \leqslant \varepsilon \leqslant \left(\frac{1}{m}\right)^{2nm+1}.$$

Тут $\rho = f_j(\varphi)$ — рівняння кривих S_j в полярній системі координат з центром в точці O, а стала C_1 залежить від n, γ_0, D_0.

Теорема 4. *Нехай області* $D_j \subset D_0 (j=1, 2)$, *які обмежені відповідно кривими* S_j, *опуклі,* $D_1 \cap D_2 \neq 0$, *а функції* $f_j(\varphi)$ *двічі неперервно диференційовані на* $[0, 2\pi]$ *і*

$$|f'(\varphi)| + |f''(\varphi)| \leqslant M.$$

Тоді, якщо має місце нерівність

$$\sum_{i+k \leqslant 2n-1} \left| \frac{\partial^{i+k} v(x, y)}{\partial x^i \partial y^k} \right| \leqslant \varepsilon, \ (x, y) \in S^e,$$

справедлива оцінка

$$|f_1(\varphi) - f_2(\varphi)| \leqslant \frac{C_2}{\sqrt[4]{m}},$$

де число т визначається зі співвідношення

$$\left(\frac{1}{m+1}\right)^{2n(m+1)} \leqslant \varepsilon \leqslant \left(\frac{1}{m}\right)^{2nm},$$

а стала C_2 *залежить від* n, M, D_0.

Тут, як і вище, $\rho = f_j(\varphi)$ — рівняння кривих S_j в полярній системі координат з центром у деякій точці області $D_1 \cap D_2$.

Зауваження. Теореми 1, 2 доводяться аналогічно, як в [3], а доведення теорем 3 і 4 проводиться методом з [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.

2. Леви Е. Е. О линейных эллиптических уравнениях в частных производных. — УМН, 1940, вып. 8.

3. Прилепко А. И. Обратные задачи обобщенных магнитных потенциалов. — «Дифференциальные уравнения», 1970, т. 6, № 1.

УДК 513.88

О. Г. СТОРОЖ

РОЗКЛАД ЗА ВЛАСНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОПЕРАТОРА, СПОРІДНЕНОГО З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ

У цій статті досліджується розклад за власними функціями оператора T, про який йшла мова в [3]. Вирази $l[y]$, $t[y]$, крайові форми $U_1, \ldots, U_{2n}$, функції $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}$, $\psi_1, \ldots, \psi_p$, $\chi_1, \ldots, \chi_p$ тут означають те ж, що в [3]. Вважається, що оператор T регулярний, тобто задовольняє умови теореми 2 роботи [3].

Дослідимо спочатку резольвенту оператора T. Кожний розв'язок рівняння $(T-\lambda)y=f$ є розв'язком рівняння $t[y]-\lambda y=f$. В свою чергу y буде розв'язком цього рівняння тоді і тільки тоді, коли існують числа $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_p$, такі, що

$$l[y] - \lambda y = f - \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_{n+j} - \sum_{q=1}^{p} b_q \chi_q, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} U_{n+j}(y) = a_j, \quad j = 1, \ldots, n; \\ \int\limits_0^1 y \bar{\psi}_q dx = b_q, \quad q = 1, \ldots, p. \end{cases} \qquad (2)$$

Загальний розв'язок рівняння (1) залежить від $2n+p$ сталих $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_p$, $c_1, \ldots, c_n$, які можна знайти, використовуючи умови (2) і той факт, що $y \in D(T)$. Провівши детальні обчислення, одержуємо такий висновок.