де число m визначається зі співвідношення

$$\left(\frac{1}{m+1}\right)^{2n(m+1)} \leqslant \varepsilon \leqslant \left(\frac{1}{m}\right)^{2nm},$$

а стала C_2 залежить від n, M, D_0.

Тут, як і вище, $\rho = f_j(\varphi)$ — рівняння кривих S_j в полярній системі координат з центром у деякій точці області $D_1 \cap D_2$.

Зауваження. Теореми 1, 2 доводяться аналогічно, як в [3], а доведення теорем 3 і 4 проводиться методом з [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
2. Леви Е. Е. О линейных эллиптических уравнениях в частных производных. — УМН, 1940, вып. 8.
3. Прилепко А. И. Обратные задачи обобщенных магнитных потенциалов. — «Дифференциальные уравнения», 1970, т. 6, № 1.

УДК 513.88

О. Г. СТОРОЖ

РОЗКЛАД ЗА ВЛАСНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОПЕРАТОРА, СПОРІДНЕНОГО З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ

У цій статті досліджується розклад за власними функціями оператора T, про який йшла мова в [3]. Вирази $l[y]$, $t[y]$, крайові форми $U_1, \ldots, U_{2n}$, функції $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}$, $\psi_1, \ldots, \psi_p$, $\chi_1, \ldots, \chi_p$ тут означають те ж, що в [3]. Вважається, що оператор T регулярний, тобто задовольняє умови теореми 2 роботи [3].

Дослідимо спочатку резольвенту оператора T. Кожний розв'язок рівняння $(T-\lambda)y=f$ є розв'язком рівняння $t[y]-\lambda y=f$. В свою чергу y буде розв'язком цього рівняння тоді і тільки тоді, коли існують числа $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_p$, такі, що

$$l[y]-\lambda y = f - \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_{n+j} - \sum_{q=1}^{p} b_q \chi_q, \tag{1}$$

$$\begin{cases} U_{n+j}(y) = a_j, \quad j=1, \ldots, n; \\ \int\limits_0^1 y\bar{\psi}_q dx = b_q, \quad q=1, \ldots, p. \end{cases} \tag{2}$$

Загальний розв'язок рівняння (1) залежить від $2n+p$ сталих $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_p$, $c_1, \ldots, c_n$, які можна знайти, використовуючи умови (2) і той факт, що $y \in D(T)$. Провівши детальні обчислення, одержуємо такий висновок.

Теорема 1. *Резольвента оператора T є інтегральним оператором, точніше*

$$(T-\lambda)^{-1}f=\int_0^1 G(x,\ \xi,\ \lambda)\,f(\xi)\,d\xi, \tag{3}$$

де

$$G(x,\ \xi,\ \lambda)=(-1)^{2n+p}\,\frac{H(x,\ \xi,\ \lambda,)}{\Delta(\lambda)}; \tag{4}$$

а $H(x,\ \xi,\ \lambda)=$

$$=\left|\begin{array}{l}
y_1(x),\dots,\ y_n(x),\ \{g,\ \varphi_{n+1}\},\dots,\ \{g,\ \varphi_{2n}\},\\
\qquad\qquad \{g,\ \chi_1\},\dots,\ \{g,\ \chi_p\},\ g(x,\ \xi)\\
V_1(y_1),\dots,\ V_1(y_n),\ V_1\{g,\ \varphi_{n+1}\},\dots,\ V_1\{g,\ \varphi_{2n}\},\\
\quad\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot\\
\qquad\qquad V_1\{g,\ \chi_1\},\dots,\ V_1\{g,\ \chi_p\},\ V_1(g)\\
\qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot\\
V_n(y_1),\dots,\ V_n(y_n),\ V_n\{g,\ \varphi_{n+1}\},\dots,\ V_n\{g,\ \varphi_{2n}\},\\
\qquad\qquad V_n\{g,\ \chi_1\},\dots,\ V_n\{g,\chi_p\},\ V_n(g)\\
V_{n+1}(y_1),\dots,V_{n+1}(y_n),V_{n+1}\{g,\varphi_{n+1}\}+1,\dots,V_{n+1}\{g,\varphi_{2n}\},\\
\quad\cdot \qquad\qquad \cdot\\
\qquad\qquad V_{n+1}\{g,\ \chi_1\},\ V_{n+1}\{g,\ \chi_p\},\ V_{n+1}(g)\\
\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot\\
V_{2n}(y_1),\dots,\ V_{2n}(y_n)\ \ V_{2n}\{g,\ \varphi_{n+1}\},\dots,\ V_{2n}\{g,\ \varphi_{2n}\}+1,\\
\qquad\qquad V_{2n}\{g,\ \chi_1\},\dots,\ V_{2n}\{g,\ \chi_p\},\ V_{2n}(g)\\
(y_1\ \psi_1),\dots,(y_n,\ \psi_1),\ (\{g,\ \varphi_{n+1}\},\ \psi_1),\dots,\ (\{g,\ \varphi_{2n}\},\ \psi_1),\\
\quad\cdot \qquad\qquad \cdot\\
\qquad\qquad (\{g,\ \chi_1\},\ \psi_1),+1,\dots,\ (\{g,\ \chi_p\},\ \psi_1),\ (g,\ \psi_1)\\
\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot\\
(y_1,\ \psi_p),\dots,\ (y_n,\ \psi_p),\ (\{g,\ \varphi_{n+1}\},\ \psi_p),\dots,\ (\{g,\ \varphi_{2n}\},\ \psi_p),\\
\qquad (\{g,\ \chi_1\},\ \psi_p),\dots,(\{g,\ \chi_p\},\ \psi_p)+1,\ (g,\ \psi_p)
\end{array}\right|. \tag{5}$$

Далі

$$V_m(y)\ \underset{=}{\mathrm{df}}\begin{cases} U_m(y)-\int_0^1 y\bar{\varphi}_m dx, & m=1,\dots n;\\ U_m(y), & m=n+1,\dots,\ 2n,\end{cases}$$

$$\{g,\ \mu\}\ \underset{=}{\mathrm{df}}\int_0^1 g(x,\ \eta)\,\mu(\eta)\,d\eta,\quad (\alpha,\ \beta)\ \underset{=}{\mathrm{df}}\int_0^1 \alpha(x)\,\overline{\beta(x)}\,dx,$$

$y_1, \ldots, y_n$ — деяка фундаментальна система розв'язків рівняння $l[y]=\lambda y$,

$$g(x, \xi) = \pm \frac{1}{2W(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(x), & \ldots, & y_n(x) \\ y_1^{(n-2)}(\xi), & \ldots, & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ . & . & . \\ y_1(\xi), & \ldots, & y_n(\xi) \end{vmatrix},$$

$$\text{де } W = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)}, & \ldots, & y_n^{(n-1)} \\ . & . & . \\ y_1, & \ldots, & y_n \end{vmatrix},$$

причому в передостанній рівності знак «+» береться при $x>\xi$, а «—» при $x<\xi$. У виразах $V_m(g)$ всі похідні беруться за змінною x, $\Delta(\lambda)$ — алгебраїчне доповнення елемента $g(x, \xi)$ у визначнику (5). Власними числами оператора T є корені рівняння $\Delta(\lambda)=0$. Якщо ж число $\lambda\neq\lambda_0$ не є власним значенням оператора T, то розв'язок рівняння $(T-\lambda_0)y=f$ існує $\forall\ f\in L_2(0, 1)$.

Зауваження. Останні два твердження випливають з того, що $\Delta(\lambda)$ є визначником системи лінійних рівнянь для знаходження невідомих $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_p, c_1, \ldots, c_n$.

На функцію $G(x, \xi, \lambda)$, яку за аналогією з класичним випадком називатимемо функцією Гріна оператора $T-\lambda$, переносяться основні властивості звичайної функції Гріна.

Твердження. Якщо λ_0 — простий нуль функції $\Delta(\lambda)$, то

$$G(x, \xi, \lambda) = -\frac{y_0(x)\overline{z_0(\xi)}}{(\lambda-\lambda_0)\int\limits_0^1 y_0(\xi)\overline{z_0(\xi)}\,d\xi} + G_1(x, \xi, \lambda), \qquad (6)$$

де $G_1(x, \xi, \lambda)$ — аналітична в околі точки λ_0; y_0, z_0 — відповідно власні функції операторів T при $\lambda=\lambda_0$ та T^* при $\lambda=\overline{\lambda_0}$. Доведення таке ж, як і в класичному випадку.

Перейдемо тепер до розкладу за власними функціями. Нехай спочатку $T=T^*$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $Z(T)=\{0\}$. У протилежному разі розглянемо оператор $T-\lambda_0$ такий, що $Z(T-\lambda_0)=\{0\}$. Таке λ_0 існує, оскільки розглядуваний оператор має не більше ніж зчислену кількість власних значень [3]. Нехай $G(x, \xi)$ — функція Гріна оператора T

$$T^{-1}h = \int\limits_0^1 G(x, \xi)\,h(\xi)\,d\xi,\ h\in D(T^{-1}) = L_2(0, 1),$$

T^{-1} — цілком неперервний самоспряжений оператор. Тому власні функції цього оператора, які одночасно є власними функціями оператора T, утворюють в $L_2(0, 1)$ повну систему, тобто

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, y_n) y_n, \quad f \in L_2(0, 1),$$

де $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ — ортонормована система власних функцій для T. Звідси випливає рівність Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, y_n)|^2.$$

Тепер розглянемо несамоспряжений випадок. Причому вважатимемо, що оператор T регулярний, а число $\lambda = 0$ не є його власним значенням. Нехай $G(x, \xi)$ — функція Гріна оператора T. Розглянемо в λ-площині послідовність кіл Γ_k, $k = 1, 2 \ldots$ з центром у початку координат, які мають такі властивості:

1) радіус R_k кола Γ_k необмежено зростає при $k \to \infty$;

2) існує $\delta > 0$ таке, що прообрази ρ_k в $S_0 \cup S_1 = \left\{\rho : 0 \leqslant \arg\rho \leqslant \frac{2\pi}{n}\right\}$ власних значень оператора T при відображенні $\lambda = -\rho^n$ знаходяться для достатньо великих k на відстані $\geqslant \delta$ від прообразів кожного з кіл Γ_k.

Зважаючи на асимптотичні властивості власних значень оператора T такі кола існують. Нехай $G(x, \xi, \lambda)$ — функція Гріна оператора $T - \lambda$, зокрема $G(x, \xi, 0) = G(x, \xi)$. Розглянемо інтеграл $I_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_k} \frac{G(x, \xi, \lambda)}{\lambda} d\lambda$. Згідно з теоремою про лишки

$$I_k = G(x, \xi) + \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{H_\nu(x, \xi)}{\lambda_\nu}, \tag{7}$$

де $H_\nu(x, \xi)$ — лишок функції $G(x, \xi, \lambda)$ відносно її полюса λ_ν, який, як ми вважаємо, є простим, а m_k — кількість цих полюсів у крузі, обмеженому колом Γ_k. Можна довести, що

$$\lim_{k\to\infty} I_k(x, \xi) = 0, \ \lim_{k\to\infty} \frac{H_k(x, \xi)}{\lambda_k} = 0 \tag{8}$$

і притому рівномірно відносно x та ξ. З огляду на (7) випливає, що має місце розклад

$$G(x, \xi) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{H_\nu(x, \xi)}{\lambda_\nu}. \tag{9}$$

Як і в класичному випадку, умови (8) виводяться з того, що має місце лема.

Лема. На колах Γ_k функція $G(x, \xi, \lambda)$ задовольняє нерівність

$$|G(x, \xi, \lambda)| \leqslant \frac{M}{|\lambda|^{\frac{n-1}{n}}},$$

де M — стала.

Ця лема доводиться так само, як і для диференціальних операторів, лише в класичному випадку тільки до останнього стовпця визначника H додається деяка лінійна комбінація перших його стовпців, а тут вона додається до кожного стовпця визначників H та Δ, за винятком n перших. З (9) випливає така теорема.

Теорема 2. *Якщо всі власні значення оператора (регулярного) T — прості нулі функції Δ, то для його функції Гріна має місце розклад в рівномірно збіжний ряд*

$$G(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{y_\nu(x)\overline{z_\nu(\xi)}}{\lambda_\nu}.$$

Теорема 3. *В умовах теореми 2 будь-яка функція f з області визначення оператора T розкладається в рівномірно збіжний ряд за його власними функціями*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int_0^1 f(\xi)\overline{z_\nu(\xi)}\, d\xi \right) y_\nu(x),$$

де y_ν, z_ν — власні функції операторів T, T^* при власних значеннях λ_ν, $\overline{\lambda}_\nu$.

Хід доведення такий же, як і у випадку диференціальних операторів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лянце В. Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. — «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», 1972, вып. 16.
2. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1969.
3. Сторож О. Г. Асимптотика власних значень і власних функцій операторів, споріднених з диференціальними. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1974, вип. 9.