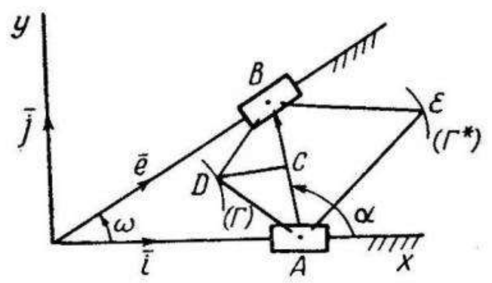
УДК 513.7

С. В. ДЕНИСКО

МЕХАНІЗМИ ДЛЯ ВІДТВОРЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ЕЛІПСІВ

Як відомо [1], точки D, E механізму, що зображений на рисунку 1, описують еліпси (Γ), (Γ^*) з спільним центром в точці 0.

Нехай еліпс (Γ) відображається на еліпс (Γ^*) так, що відповідними при цьому відображенні точками є точки, які вказаним механізмом відтворюються в один і той же момент часу. Це відображення для зручності називатимемо відображенням T.



Розглянемо відображення T, що задовольняє умову

$$l_{\widehat{P^*Q^*}} = ml_{\widehat{P^*Q^*}}, \qquad (1)$$

де $m=\text{const}$; $l_{\widehat{PQ}}$ — довжина довільної дуги $\widehat{PQ}$ еліпса (Γ); $l_{\widehat{P^*Q^*}}$ — довжина дуги $\widehat{P^*Q^*}$ еліпса (Γ^*), яка є образом дуги $\widehat{PQ}$.

Зобразимо умову (1) в іншому вигляді.

Нехай вектор $\overline{CД}$ перпендикулярний до вектора $\overline{AB}$, довжина якого l; $\bar{\rho}$, $\bar{\rho}^*$ — радіуси-вектори точок D, E, а α, ω — кути, які утворюють з ортом $\bar{i}$ відповідно вектор $\overline{AB}$ і орт $\bar{e}$.

Тоді рівняння еліпсів (Γ), (Γ^*) матимуть вигляд

$$\bar{\rho}=l\{\bar{i}[(\operatorname{ctg}\omega-\mu)\sin\alpha+(\lambda-1)\cos\alpha]+\bar{j}(\lambda\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\}, \qquad (2)$$

$$\bar{\rho}^*=l\{\bar{i}[(\operatorname{ctg}\omega-\mu^*)\sin\alpha+(\lambda^*-1)\cos\alpha]+ \\ +\bar{j}(\lambda^*\sin\alpha+\mu^*\cos\alpha)\}, \qquad (3)$$

де λ, μ, λ^*, μ^* — деякі сталі.

Оскільки

$$l_{\widehat{PQ}}=\int_{\alpha_P}^{\alpha_Q}\left|\frac{d\bar{\rho}}{d\alpha}\right|d\alpha,\quad l_{\widehat{P^*Q^*}}=\int_{\alpha_P}^{\alpha_Q}\left|\frac{d\rho^*}{d\alpha}\right|d\alpha,$$

то, зважаючи на рівняння (2), (3), дістаємо потрібний нам запис умови (1)

$$[(1-\lambda)^2+\mu^2]\sin^2\alpha+2[(1-\lambda)\operatorname{ctg}\omega-\mu]\sin\alpha\cos\alpha+ \\ +[(\operatorname{ctg}\omega-\mu)^2+\lambda^2]\cos^2\alpha=m^2\{[(1-\lambda^*)^2+ \\ +\mu^{*2}]\sin^2\alpha+2[(1-\lambda^*)\operatorname{ctg}\omega-\mu^*]\sin\alpha\cos\alpha+ \\ +[(\operatorname{ctg}\omega-\mu^*)^2+\lambda^{*2}]\cos^2\alpha\}.$$

Ми дістали тотожність відносно α. Тому умова (1) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$(1-\lambda)^2+\mu^2=m^2[(1-\lambda^*)^2+\mu^{*2}];$$
$$(1-\lambda)\operatorname{ctg}\omega-\mu=m^2[(1-\lambda^*)\operatorname{ctg}\omega-\mu^*];$$
$$(\operatorname{ctg}\omega-\mu)^2+\lambda^2=m^2[(\operatorname{ctg}\omega-\mu^*)^2+\lambda^{*2}]. \tag{4}$$

Встановимо умову, необхідну і достатню для того, щоб еліпс (Г) допускав відображення T, що задовольняє вимогу (1). Як видно з (4), має місце така система рівностей:

$$m^2\operatorname{ctg}\omega(\operatorname{ctg}\omega-\mu^*)+m^2\lambda^*=\frac{1}{2}(m^2-1)\ (1+\operatorname{ctg}^2\omega)+$$
$$+(\operatorname{ctg}\omega-\mu)\operatorname{ctg}\omega+\lambda;$$
$$m^2(\operatorname{ctg}\omega-\mu^*)-m^2\lambda^*\operatorname{ctg}\omega=\operatorname{ctg}\omega-\mu-\lambda\operatorname{ctg}\omega.$$

Звідси знаходимо

$$\operatorname{ctg}\omega-\mu^*=\frac{1}{m^2}\left(\frac{m^2+1}{2}\operatorname{ctg}\omega-\mu\right);\quad \lambda^*=\frac{1}{m^2}\left(\frac{m^2-1}{2}+\lambda\right). \tag{5}$$

Підставивши ці вирази в третє рівняння системи (4), маємо

$$(m^2+1)\left(\lambda^2-\lambda+\mu^2-\mu\operatorname{ctg}\omega-\frac{m^2-1}{4\sin^2\omega}\right)=0.$$

Звідси, оскільки неможливо, як це видно з (5), щоб $m^2-1=0$, дістаємо шукану умову:

$$\lambda^2-\lambda+\mu^2-\mu\operatorname{ctg}\omega-\frac{m^2-1}{4\sin^2\omega}=0. \tag{6}$$

З умови (6) виходить, що λ та μ задовольняють такі нерівності:

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{\sin\omega}\right)\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{\sin\omega}\right),$$
$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\omega-\frac{m}{\sin\omega}\right)\leqslant\mu\leqslant\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\omega+\frac{m}{\sin\omega}\right),$$

причому $0<\omega<\pi$.

Теорема 1. *Еліпси* (Г), (Г*), *які допускають відображення T, що задовольняє умову* (1), *подібні.*

Доведення. З рівняння (2) маємо

$$x=l[(\operatorname{ctg}\omega-\mu)\sin\alpha+(\lambda-1)\cos\alpha];$$
$$y=l(\lambda\sin\alpha+\mu\cos\alpha),$$

де x, y — координати біжучої точки D еліпса (Г). Звідси дістанемо таке рівняння еліпса (Г):

$$(\lambda^2+\mu^2)x^2+2(\mu-\lambda\operatorname{ctg}\omega)xy+[(\operatorname{ctg}\omega-\mu)^2+$$
$$+(1-\lambda)^2]y^2=l^2(\mu\operatorname{ctg}\omega-\mu^2+\lambda-\lambda^2)^2. \tag{7}$$

Беручи до уваги рівняння (6) і (7), за відомими формулами аналітичної геометрії [2] знаходимо велику і малу півосі еліпса (Г)

$$a = \frac{l(m+1)}{2\sin\omega}, \quad b = \frac{l|m-1|}{2\sin\omega}. \tag{8}$$

Аналогічно до попереднього велику і малу півосі еліпса (Г*) знаходимо за формулами

$$a^* = \frac{l(m+1)}{2m\sin\omega}, \quad b^* = \frac{l|m-1|}{2m\sin\omega}. \tag{9}$$

Порівнюючи (8) і (9), дістаємо

$$a = a^* m, \quad b = b^* m,$$

а це і доводить нашу теорему.

Теорема 2. *Прямі, що з'єднують відповідні при відображенні T точки еліпсів* (Г), (Г*), *не можуть утворювати пучка.*

Доведення. Нехай прямі, що з'єднують відповідні при відображенні T точки еліпсів (Г), (Г*), утворюють пучок прямих з власним центром в точці S, координати якої ξ, η. Згідно з (2) та (3) умова паралельності векторів $\bar{\rho}-\bar{\rho}^*$, $\overline{SD}$ запишеться таким чином:

$$[\mu\lambda^* - \mu^*\lambda + (\lambda-\lambda^*)\operatorname{ctg}\omega]\sin^2\alpha + [\lambda-\lambda^* -$$
$$-(\mu-\mu^*)\operatorname{ctg}\omega]\sin\alpha\cos\alpha + (\mu^*\lambda - \lambda^*\mu +$$
$$+\mu-\mu^*)\cos^2\alpha - [(\mu-\mu^*)\eta + (\lambda-\lambda^*)\xi]\sin\alpha +$$
$$+[(\lambda-\lambda^*)\eta - (\mu-\mu^*)\xi]\cos\alpha = 0.$$

Оскільки ми дістали тотожність відносно α, то

$$\mu\lambda^* - \mu^*\lambda + (\lambda-\lambda^*)\operatorname{ctg}\omega = 0;$$
$$\lambda-\lambda^* - (\mu-\mu^*)\operatorname{ctg}\omega = 0;$$
$$\mu^*\lambda - \lambda^*\mu + \mu - \mu^* = 0;$$
$$(\mu-\mu^*)\eta + (\lambda-\lambda^*)\xi = 0;$$
$$(\lambda-\lambda^*)\eta - (\mu-\mu^*)\xi = 0. \tag{10}$$

З огляду на першу та третю рівності системи (10) маємо

$$(\lambda-\lambda^*)\operatorname{ctg}\omega + \mu - \mu^* = 0.$$

Ця рівність разом з другою рівністю системи (10) утворює систему, для якої $\lambda-\lambda^*$ і $\mu-\mu^*$ не можуть одноразово дорівнювати нулеві. Тому

$$\operatorname{ctg}^2\omega + 1 = 0,$$

що неможливо.

Нехай тепер прямі, що з'єднують відповідні при відображенні T точки еліпсів (Γ), (Γ^*), утворюють пучок прямих з невласним центром. Тоді вектор $\rho-\rho^*$ колінеарний деякому сталому ненульовому вектору з координатами p, q. Отже, наявна рівність

$$\frac{(\lambda-\lambda^*)\cos\alpha-(\mu-\mu^*)\sin\alpha}{p}=\frac{(\lambda-\lambda^*)\sin\alpha+(\mu-\mu^*)\cos\alpha}{q}.$$

Це є тотожність відносно α, а тому

$$(\lambda-\lambda^*)p+(\mu-\mu^*)q=0;$$
$$(\lambda-\lambda^*)q-(\mu-\mu^*)p=0.$$

Звідси маємо $p=q=0$, що приводить до протиріччя. Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых. М., Изд-во АН СССР, 1959.
2. Делоне Б. Н, Райков Д. А. Аналитическая геометрия, т. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1948.

УДК 517.913

К. С. КОСТЕНКО

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для рівняння

$$y^{(IV)}+p_1(x)y''+(p_2(x)+r(x)y'+p_3(x)y=0 \tag{1}$$

розглянемо задачу Коші у вигляді

$$\begin{gathered} y^{(IV)}+A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=(A(x)-p_1(x)y''+ \\ +(A'(x)-r(x))y'+(C(x)-p_3(x)y, \\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ y''(x_0)=y_0'',\ y'''(x_0)=y_0''', \end{gathered} \tag{2}$$

де

$$\begin{gathered} A(x)=\xi^{-2}(x)\left(\mu-5\xi''(x)\xi(x)+\frac{5}{2}\xi'^2(x)\right); \\ B(x)=\lambda\xi^{-3}(x)+A'(x); \\ C(x)=\left(\nu-\frac{3}{2}\lambda\xi'(x)\right)\xi^{-4}(x)+0{,}3A''(x)+\left(0{,}3A(x)\right)^2, \end{gathered} \tag{3}$$

$\xi(x)$ — довільна неперервно диференційована функція до четвертого порядку, μ, λ, ν — довільні сталі та $p_2(x)=\lambda\xi^{-3}(x)\neq 0$.