Нехай тепер прямі, що з'єднують відповідні при відображенні T точки еліпсів (Γ), (Γ^*), утворюють пучок прямих з невласним центром. Тоді вектор $\rho-\rho^*$ колінеарний деякому сталому ненульовому вектору з координатами p, q. Отже, наявна рівність

$$\frac{(\lambda-\lambda^*)\cos\alpha-(\mu-\mu^*)\sin\alpha}{p}=\frac{(\lambda-\lambda^*)\sin\alpha+(\mu-\mu^*)\cos\alpha}{q}.$$

Це є тотожність відносно α, а тому

$$(\lambda-\lambda^*)p+(\mu-\mu^*)q=0;$$
$$(\lambda-\lambda^*)q-(\mu-\mu^*)p=0.$$

Звідси маємо $p=q=0$, що приводить до протиріччя. Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых. М., Изд-во АН СССР, 1959.
2. Делоне Б. Н, Райков Д. А. Аналитическая геометрия, т. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1948.

УДК 517.913

К. С. КОСТЕНКО

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для рівняння

$$y^{(IV)}+p_1(x)y''+(p_2(x)+r(x)y'+p_3(x)y=0 \tag{1}$$

розглянемо задачу Коші у вигляді

$$\begin{gathered}y^{(IV)}+A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=(A(x)-p_1(x)y''+\\+(A'(x)-r(x))y'+(C(x)-p_3(x)y,\\y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ y''(x_0)=y_0'',\ y'''(x_0)=y_0''',\end{gathered} \tag{2}$$

де

$$\begin{gathered}A(x)=\xi^{-2}(x)\left(\mu-5\xi''(x)\xi(x)+\frac{5}{2}\xi'^2(x)\right);\\B(x)=\lambda\xi^{-3}(x)+A'(x);\\C(x)=\left(\nu-\frac{3}{2}\lambda\xi'(x)\right)\xi^{-4}(x)+0{,}3A''(x)+\Big(0{,}3A(x)\Big)^2,\end{gathered} \tag{3}$$

$\xi(x)$ — довільна неперервно диференційована функція до четвертого порядку, μ, λ, ν — довільні сталі та $p_2(x)=\lambda\xi^{-3}(x)\neq0$.

Нехай $\pm\beta_1$ — корені рівняння

$$\beta^6+2\mu\beta^4+(\mu^2-4\nu)\beta^2-\lambda^2=0, \tag{4}$$

причому

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^{2}}{2}+\mu+\frac{\lambda}{\beta_1}\right)=-a_1^{2}<0,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^{2}}{2}+\mu-\frac{\lambda}{\beta_1}\right)=-a_2^{2}<0.$$

Тоді [2] рівняння

$$y^{(\mathrm{IV})}+A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=0 \tag{1_1}$$

має фундаментальну систему розв'язків:

$$\tilde{y}_1(x,x_0)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2}+a_1\right)\varphi(x,x_0)\right],$$

$$\tilde{y}_2(x,x_0)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2}-a_1\right)\varphi(x,x_0)\right],$$

$$\tilde{y}_3(x,x_0)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\left(-\frac{\beta_1}{2}+a_2\right)\varphi(x,x_0)\right],$$

$$\tilde{y}_4(x,x_0)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[-\left(\frac{\beta_1}{2}+a_2\right)\varphi(x,x_0)\right], \tag{5}$$

де $\varphi(x,x_0)=\int\limits_{x_0}^{x}\xi^{-1}(t)\,dt.$

За допомогою (5) задача Коші (2) зводиться до інтегрального рівняння Вольтерра:

$$y(x,x_0)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\Bigg\{c_1\exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2}+a_1\right)\varphi(x,x_0)\right]+$$

$$+c_2\exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2}-a_1\right)\varphi(x_1x_0)\right]+c_3\exp\left[\left(-\frac{\beta_1}{2}+a_2\right)\varphi(x,x_0)\right]+$$

$$+c_4\exp\left[-\left(\frac{\beta_1}{2}+a_2\right)\varphi(x,x_0)\right]+\int\limits_{x_0}^{x}\xi^{-\frac{1}{2}}(t)\Bigg[P_1(t)\exp\Bigg[\Bigg(\frac{\beta_1}{2}+$$

$$+a_1\Bigg)\varphi(x_1t)\Bigg]+P_2(t)\exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2}-a_1\right)\varphi(x,t)\right]+$$

$$+P_3(t)\exp\left[\left(-\frac{\beta_1}{2}+a_2\right)\varphi(x,t)\right]+P_4(t)\exp\Bigg[-\Bigg(\frac{\beta_1}{2}+$$

$$+a_2\Bigg)\varphi(x,t)\Bigg]\Bigg]\;y(t,x_0)\;dt\Bigg\}, \tag{6}$$

де

$$P_1(x) = 2a_2\,[(a_1-\beta_1)^2 - a_2^2]\Big[\Big(\frac{3}{2}\xi''(x)\,\xi(x) + \frac{3}{4}\xi'^2(x) -$$

$$- (\beta_1+2a_1)\,\xi'(x) + \Big(\frac{\beta_1}{2} + a_1\Big)^2\Big)(A(x) - p_1(x)) +$$

$$+ \xi(x)\,(3\xi'(x) - \beta_1 - 2a_1)\Big(\frac{A'(x) + r(x)}{2} - p_1'(x)\Big) +$$

$$+ \xi^2(x)\,(C(x) + r'(x) - p_3(x) - p_1''(x))\Big]\,W^{-1};$$

$$P_2(x) = 2a_2\,[a_2^2 - (a_1+\beta_1)^2]\Big[\frac{3}{2}\xi''(x)\,\xi(x) + \frac{3}{4}\xi'^2(x) -$$

$$- (\beta_1-2a_1)\,\xi'(x) + \Big(\frac{\beta_1}{2} - a_1\Big)^2\Big)(A(x) - p_1(x)) +$$

$$+ \xi(x)\,(3\xi'(x) - \beta_1 + 2a_1)\Big(\frac{A'(x) + r(x)}{2} - p_1'(x)\Big) +$$

$$+ \xi^2(x)\,(C(x) + r'(x) - p_3(x) - p_1''(x))\Big]\,W^{-1}; \qquad (7)$$

$$P_3(x) = 2a_1\,[(a_2 + \beta_1)^2 - a_1^2]\Big[\Big(\frac{3}{2}\xi''(x)\,\xi(x) + \frac{3}{4}\xi'^2(x) +$$

$$+ (\beta_1 - 2a_2)\,\xi'(x) + \Big(\frac{\beta_1}{2} - a_2\Big)^2\Big)(A(x) - p_1(x)) +$$

$$+ \xi(x)\,(3\xi'(x) + \beta_1 - 2a_2)\Big(\frac{A'(x) + r(x)}{2} - p_1'(x)\Big) +$$

$$+ \xi^2(x)\,(C(x) + r'(x) - p_3(x) - p_1''(x))\Big]\,W^{-1};$$

$$P_4(x) = 2a_1\,[a_1^2 - (a_2-\beta_1)^2]\Big[\Big(\frac{3}{2}\xi''(x)\,\xi(x) + \frac{3}{4}\xi'^2(x) +$$

$$+ (\beta_1 + 2a_2)\,\xi'(x) + \Big(\frac{\beta_1}{2} + a_2\Big)^2\Big)(A(x) - p_1(x)) +$$

$$+ \xi(x)(3\xi'(x) + \beta_1 + 2a_2)\Big(\frac{A'(x) + r(x)}{2} - p_1'(x)\Big) +$$

$$+ \xi^2(x)(C(x) + r'(x) - p_3(x) - p_1''(x))\Big]\,W^{-1};$$

$W = 4a_1a_2\Big((2\beta_1^4 + 2\mu\beta_1^2 + \frac{\lambda^2}{\beta_1^2}\Big)$, $c_1, \ldots, c_4$ залежать лише від $y_0, \ldots, y_0'''$, $\xi(x_0), \ldots, \xi'''(x_0)$, $p_1(x_0)$, $p_1'(x_0)$.

Нехай $\xi(x)>0$ на інтервалі $x_0 \leqslant x < \infty$ і $\frac{1}{2}\beta_1 + a_1 > -\frac{1}{2}\beta_1 + a_2$.

Інтегральне рівняння (6) заміною

$$y(x,\ x_0) = \xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2} + a_1\right)\varphi(x,\ x_0)\right] z(x,\ x_0) \tag{8}$$

зведеться до

$$z(x,\ x_0) = c_1 + c_2 \exp(-2a_1\varphi(x,\ x_0)) + c_3 \exp[(-\beta_1 - a_1 + a_2)\varphi(x,\ x_0)] + c_4 \exp[-(\beta_1 + a_1 + a_2)\varphi(x,\ x_0)] + \int\limits_{x_0}^{x} \xi(t)\ \{P_1(t) + P_2(t)\exp(-2a_1\varphi(x,\ t)) + P_3(t)\exp[(-\beta_1 - a_1 + a_2)\varphi(x,\ t)] + P_4(t)\exp[-(\beta_1 + a_1 + a_2)\varphi(x,\ t)]\}\, z(t,\ x_0)\, dt. \tag{9}$$

Потім аналогічно до [4] за умов

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} b(x)\, dx < \infty,\ \lim_{x\to\infty}\varphi(x,\ x_0) = \infty,\ \lim_{x\to\infty} P_i(x)\,\xi^2(x) = 0,\ (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{10}$$

де

$$b(x) = 4\,|\xi(x)|\max_x\,[\,|P_1(x)|,\ |P_2(x)|,\ |P_3(x)|,\ |P_4(x)|\,], \tag{10$_1$}$$

з врахуванням (8) знаходимо асимптотичні формули для одного розв'язку рівняння (1)

$$y_1(x,\ x_0) = \xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2} + a_1\right)\varphi(x,\ x_0)\right](1 + o(1)),\ x\to\infty \tag{11}$$

та його першої похідної. При цьому головну частину цієї похідної можна одержати формальним диференціюванням головної частини формули (11).

Те ж саме маємо для похідних другого і третього порядку цього розв'язку за додаткових умов

$$\lim_{x\to\infty}(A(x) - p_1(x))\,\xi^2(x) = 0, \tag{12}$$

$$\lim_{x\to\infty}(p_1'(x) - r(x))\,\xi^3(x) = 0. \tag{13}$$

Щоб одержати асимптотичні зображення при $x\to\infty$ трьох інших лінійно незалежних розв'язків рівняння (1), введемо спочатку в ньому заміну

$$y = y_1(x,\ x_0)\, z,\ z' = u,\ u = (y_1(x,\ x_0))^{-\frac{4}{3}}\, v. \tag{14}$$

У результаті рівняння (1) зведеться до рівняння третього порядку

$$v''' + P_0(x) v' + Q_0(x) v = 0, \tag{15}$$

в якому

$$P_0(x) = 6 y_1'' y_1^{-1} - 4 (y_1' y_1^{-1})' - \frac{16}{3} (y_1' y_1^{-1})^2 + p_1(x),$$

$$Q_0(x) = \frac{128}{27} (y_1' y_1^{-1})^3 - 8 y_1' y_1'' y_1^{-2} + 4 y_1''' y_1^{-1} - \frac{4}{3} (y_1' y_1^{-1})'' +$$

$$+ \frac{2}{3} y_1' y_1^{-1} p_1(x) + p_2(x) + r(x).$$

Так само, якщо в рівнянні (1_1) з умовами (3) ввести заміну (14), в якій взяти $y_1(x, x_0) = \tilde{y}_1(x, x_0)$ з (5), то рівняння (1_1) зведеться до

$$v''' + P(x) v' + Q(x) v = 0, \tag{16}$$

де

$$P(x) = \xi^{-2}(x) \left[\mu + \frac{2}{3} \left(\frac{\beta_1}{2} + a_1 \right)^2 - 2 \xi''(x) \xi(x) + \xi'^2(x) \right],$$

$$Q(x) = \xi^{-3}(x) \left[\lambda + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\beta_1}{2} + a_1 \right) + \frac{20}{27} \left(\frac{\beta_1}{2} + a_1 \right)^3 - \right.$$

$$- \xi'''(x) \xi^2(x) + 2 \xi''(x) \xi'(x) \xi(x) -$$

$$\left. - \left(\mu + \frac{2}{3} \left(\frac{\beta_1}{2} + a_1 \right)^2 \right) \xi'(x) - \xi'^3(x) \right].$$

Рівняння (16) інтегрується в замкнутій формі [3], причому його фундаментальну систему розв'язків можна зобразити в явному вигляді за допомогою коренів рівняння

$$\alpha^3 + \mu_1 \alpha - \lambda_1 = 0, \tag{17}$$

де

$$\mu_1 = \mu + \frac{2}{3} \left(\frac{\beta_1}{2} + a_1 \right)^2, \quad \lambda_1 = \lambda + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\beta_1}{2} + a_1 \right) + \frac{20}{27} \left(\frac{\beta_1}{2} + a_1 \right)^3.$$

Легко переконатись, що $\alpha_1 = -\frac{2}{3}(\beta_1 - a_1)$, $\alpha_2 = -\frac{\alpha_1}{2} - a_2$, $\alpha_3 = -\frac{\alpha_1}{2} + a_2$ є корені рівняння (17), причому $\alpha_2 \alpha_3 - \frac{1}{4} \alpha_1^2 = -a_2^2 < 0$. Тоді [3], [1]

$$\hat{v}_1(x, x_0) = \xi(x) \exp \left[\left(\frac{\alpha_1}{2} + a_2 \right) \varphi(x, x_0) \right],$$

$$\hat{v}_2(x, x_0) = \xi(x) \exp \left[\left(\frac{\alpha_1}{2} - a_2 \right) \varphi(x, x_0) \right],$$

$$v_3(x, x_0) = \xi(x)\exp(-\alpha_1\varphi(x, x_0))$$

є фундаментальною системою розв'язків рівняння (16).

Записавши (15) у вигляді

$$v''' + P(x)v' + Q(x)v = (P(x) - P_0(x))v' + (Q(x) - Q_0(x))v,$$

можна переконатись, що умови (10), (12), заміна (14), асимптотична формула (11) для розв'язку $y_1(x, x_0)$ рівняння (1) і асимптотичні формули для похідних цього розв'язку першого і другого порядку забезпечують умови існування асимптотичних зображень фундаментальної системи розв'язків рівняння (15) при $x \to \infty$ та їх похідних до другого порядку включно.

Таким чином, для розв'язків рівняння (15) маємо [1] асимптотичні формули:

$$v_1(x, x_0) = \xi(x)\exp\left[\left(\frac{\alpha_1}{2} + a_2\right)\varphi(x, x_0)\right](1 + o(1)),\ x \to \infty; \quad (18)$$

$$v_2(x, x_0) = \xi(x)\exp\left[\left(\frac{\alpha_1}{2} - a_2\right)\varphi(x, x_0)\right](1 + o(1)),\ x \to \infty; \quad (19)$$

$$v_3(x, x_0) = \xi(x)\exp(-\alpha_1\varphi(x, x_0))(1 + o(1)),\ x \to \infty. \quad (20)$$

Головні частини асимптотичних зображень для похідних першого і другого порядку цих розв'язків одержуємо формальним диференціюванням головних частин асимптотичних зображень розв'язків (18)—(20).

Використавши тепер (11), (18)—(20) та заміну (14), одержуємо:

$$y_2(x, x_0) = -y_1(x, x_0)\int_x^\infty [y_1(x, x_0)]^{-\frac{4}{3}} v_3(x, x_0)\,dx =$$

$$= \xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2} - a_1\right)\varphi(x, x_0)\right](1 + o(1)),\ x \to \infty; \quad (21)$$

$$y_3(x, x_0) = -y_1(x, x_0)\int_x^\infty [y_1(x, x_0)]^{-\frac{4}{3}} v_1(x, x_0)\,dx =$$

$$= \xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\left(-\frac{\beta_1}{2} + a_2\right)\varphi(x, x_0)\right](1 + o(1)),\ x \to \infty; \quad (22)$$

$$y_4(x, x_0) = -y_1(x, x_0)\int_x^\infty [y_1(x, x_0)]^{-\frac{4}{3}} v_2(x, x_0)\,dx =$$

$$= \xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[-\left(\frac{\beta_1}{2} + a_2\right)\varphi(x, x_0)\right](1 + o(1)),\ x \to \infty. \quad (23)$$

Головні частини асимптотичних зображень для похідних останніх розв'язків до третього порядку включно також можна дістати формальним диференціюванням головних частин асимптотичних формул (21)—(23).

У випадку $\xi(x)<0$ ця схема приводить до тих же самих асимптотичних формул для розв'язків рівняння (1) і їх похідних.

Отже, має місце теорема.

Теорема. *Нехай в рівнянні (1) функція* $p_3(x)$ *неперервна, а* $r(x)$, $p_1(x)$ і $p_2(x)=\lambda\xi^{-3}(x)\neq 0$ *неперервно диференційовані відповідно один, два і три рази на інтервалі* $x_0\leqslant x<\infty$. *Нехай також* $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ *задовольняють умову* (3), $\pm\beta_1$ — *дійсні корені рівняння* (4), *причому* $\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu+\frac{\lambda}{\beta_1}\right)=-a_1^2<0$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu-\frac{\lambda}{\beta_1}\right)=-a_2^2<0$.

Тоді, якщо мають місце умови (10), *в яких* $P_1(x),\ldots,P_4(x)$, $b(x)$ *визначені виразами* (7), (10$_1$) *і* $\varphi(x, x_0)=\int\limits_{x_0}^{x}\xi^{-1}(t)\,dt$, *рівняння* (1) *має фундаментальну систему розв'язків, асимптотичне зображення яких при* $x\to\infty$ *дають формули (11), (21)—(23).*

За цих же умов головні частини асимптотичних формул для перших похідних фундаментальної системи розв'язків рівняння (1) одержуємо формальним диференціюванням головних частин формул (11), (21)—(23).

Те ж саме маємо для похідних другого і третього порядку цих розв'язків за додаткових умов (12) і (13).

ЛІТЕРАТУРА

1. Костенко Е. С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. — «Дифференциальные уравнения», 1974, 10, № 10.
2. Костенко К. С. Лінійні звичайні диференціальні рівняння четвертого порядку, інтегровані в замкнутій формі. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1974, вип. 9.
3. Костенко К. С. Групові властивості звичайних лінійних диференціальних рівнянь третього порядку та зображення їх розв'язків у замкнутій формі. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1973, вип. 8.
4. Павлюк І. А. Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. Вид-во Київського ун-ту, 1970.