Ця лема випливає з леми 2 [1] і леми 1 з [2].

Теорема. *Якщо* $F \in D'(S)$ *і* $G[g] = F[\varphi_g]$, *де* φ_g — *розв'язок інтегрального рівняння*

$$p\varphi(y) + \int_S K(x, y)\varphi(x)\, d_x S = g(y), \quad y \in S \tag{2}$$

$p = \frac{1}{2}\omega_n$, ω_n — *площа поверхні одиничної сфери в n-вимірному просторі, то функція* $u(x) = G[K(x, y)]$, $x \in \Omega_i$ *є розв'язком розглядуваної задачі.*

Безпосередньою перевіркою встановлюється виконання умови (1) та гармонічність функції $u(x)$ в області Ω_i.

Так само, як у [3], встановлюється, що інтегральне рівняння (2) розв'язальне за першою теоремою Фредгольма.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гупало Г. С. Про узагальнену задачу Діріхле. — ДАН УРСР, 1966, № 7.
2. Гупало Г. С. Про узагальнену задачу Неймана. — ДАН УРСР, 1967, № 3.
3. Купрадзе В. Д. К решению задачи Дирихле для многосвязной области. — «Сообщения Грузинского филиала АН СССР», 1940, № 1.

УДК 517.512

Г. П. ГУБАНОВ, Б. В. КОВАЛЬЧУК

НАБЛИЖЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЛІНІЙНИМИ СЕРЕДНІМИ ПОЛІНОМІВ, НАЙЛІПШИМИ В ЗАДАНІЙ СИСТЕМІ ТОЧОК

Нехай $\omega(t)$ заданий модуль неперервності, тобто неперервна на $[0; 2\pi]$ функція, яка задовільняє нерівності

$$\omega(0) = 0, \; 0 \leqslant \omega(t_2) - \omega(t_1) \leqslant \omega(t_2 - t_1) \text{ для } t_2 > t_1.$$

Якщо $\omega(t)$ задовольняє додатково нерівність

$$\omega(t_1) + \omega(t_2) \leqslant 2\omega\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right),$$

то модуль неперервності називаємо опуклим.

Через H_ω позначимо клас функцій $f(x) \in C_{2\pi}$, модуль неперервності яких $\omega(f; t)$ не перевищує заданого модуля неперервності $\omega(t) : \omega(f; t) \leqslant \omega(t)$.

Нехай

$$T_{n-1}(f; x) = \frac{1}{2nq}\sum_{k=1}^{2nq} f(x_k) \sin\frac{2n-1}{2}(x - x_k) \operatorname{cosec}\frac{1}{2}(x - x_k) -$$

тригонометричний поліном $(n-1)$-го порядку, найліпший в заданій системі рівновіддалених точок $x_k = \frac{k\pi}{nq}$, $k=\overline{1, 2nq}$, $q \geqslant 1$.

За допомогою трикутної матриці чисел $\lambda_i^{(n-1)}$ $(i=\overline{0, n}, \lambda_n^{(n-1)} = 1$, $\lambda_n^{(n-1)}=0)$ кожній функції $f(x) \in C_{2\pi}$ поставимо у відповідність послідовність тригонометричних поліномів (при $q=1$ такі поліноми ми розглядали в [2]):

$$T_{n-1}(f;\ x;\ \lambda) = \frac{2}{nq} \sum_{k=1}^{2nq} f(x_k) \left\{\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{(n-1)} \cos i\,(x - x_k)\right\}.$$

Якщо $\lambda_i^{(n-1)} = \{1$ при $i=\overline{1, n-p}$; $(n-i-1)/(p+1)$ при $i=\overline{n-p-1, n-1}\}$, то відповідні поліноми $T_{n-1}(f;\ x;\ \lambda)$ перетворюються у поліноми типу Валле-Пуссена

$$V_{n-1}^{p}(f;\ x) = \frac{1}{nq\,(p+1)} \sum_{k=1}^{2nq} f(x_k) \sin \frac{2n-p-1}{2}(x - x_k) \sin \frac{p+1}{2}(x - x_k) \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}(x - x_k).$$

Якщо $\lambda_i^{(n-1)} = 1 - \frac{i}{n+1}$, то поліноми $T_{n-1}(f;\ x;\ \lambda)$, які у цьому випадку є середніми типу Фейєра, мають вигляд

$$\sigma_{n-1}^{n}(f;\ x) = \frac{1}{nq\,(n+1)} \sum_{k=1}^{2nq} f(x_k) \sin \frac{n+1}{2}(x - x_k) \sin \frac{n-1}{2}(x - x_k) \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}(x - x_k).$$

Відзначимо, що поліноми $V_{n-1}^{p}(f;\ x)$ і $\sigma_{n-1}^{n}(f;\ x)$ при $q=1$ вивчались відповідно в роботах [3], [4].

У цій роботі вивчається поведінка величини

$$\varepsilon_{T_{n-1}}(H_\omega;\ x;\ \lambda) = \sup_{f \in H_\omega} |f(x) - T_{n-1}(f;\ x;\ \lambda|.$$

Оцінку величини $\varepsilon_{T_{n-1}}(H_\omega;\ x;\ \lambda)$ при $q=1$ і деяких обмеженнях на $\lambda_i^{(n-}$ на класі H_ω ми одержали раніше в роботі [2].

Позначимо

$$\Delta\lambda_i^{(n-1)} = \lambda_i^{(n-1)} - \lambda_{i+1}^{(n-1)},\ i = \overline{1, n-1},$$

$$\Delta^2\lambda_i^{(n-1)} = \lambda_i^{(n-1)} - 2\,\lambda_{i+1}^{(n-1)} + \lambda_{i+2}^{(n-1)},\ i = \overline{0, n-2}, \tag{1}$$

$$\tau(\omega;\ n;\ \lambda) = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(1+i)\ (n-i-1)}{n+1} |\,\Delta^2\lambda_i^{(n-1)}\,|\,\omega\left(\frac{1}{i+2}\right) + \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Теорема 1. *Якщо послідовність* $\{\lambda_i^{(n-1)}\}$ *задовольняє умови:* $\Delta\lambda_i^{(n-1)} \geqslant 0$, *або* $\Delta\lambda_i^{(n-1)} \leqslant 0$ *для всіх* $i=\overline{1,\ \nu}$, (2), *а також* $\lambda_i^{(n-1)} \geqslant 0$, *або* $\lambda_i^{(n-)} \leqslant 0$ *для всіх* $i=\overline{\nu+3,\ n-1}$, (3) *то для будь-якого модуля неперервності* $\omega(t)$ *справедлива рівність*

$$\varepsilon_{T_{n-1}}(H_\omega;\ x;\ \lambda) = \frac{2}{\pi}\Theta_n(\omega;\ q;\ \lambda)\Big\{A_n(\nu;\ \omega;\ \lambda) + \frac{1}{q}B_n(\omega;\ q;\ x) + $$

$$+ C_n(\omega;\ q;\ x) + D_n(\omega;\ q;\ x)\Big\} + 0\{\tau(\omega;\ n;\ \lambda)\},$$

де

$$A_n(\nu;\ \omega;\ \lambda) = \left|\sum_{i=0}^{\nu}\omega\left(\frac{1}{i+1}\right)\Delta\lambda^{(n-1)}\right|,$$

$$B_n(\omega;\ q;\ x) = \left|\sum_{i=\nu+3}^{n-1}\frac{\lambda_i^{(n-1)}}{n-k}\cos nx\right|\sum_{r=1}^{\mu}\omega\left(\frac{2\pi r}{nq}\right)\sin\frac{\pi r}{q}, \qquad (4)$$

$$C_n(\omega;\ q;\ x) = |\sin nx|\sum_{r=1}^{\mu}\omega\left(\frac{\pi q-2r}{nq}\right)\cos\frac{\pi r}{q},$$

$$D_n(\omega;\ q;\ x) = \frac{|\sin nx|}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{1+(-1)^q}{4}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)|\cos nx|,$$

$\mu = \left[\frac{q-1}{2}\right]$; $1 \leqslant q \leqslant n$; $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$; $\tau(\omega;\ n;\ \lambda)$ *визначається за формулою* (1), $\frac{1}{4} \leqslant \Theta_n(\omega,\ q;\ \lambda) \leqslant 1$, *причому* $\frac{1}{2} \leqslant \Theta_n(\omega;\ 1, \lambda) \leqslant 1$.

Якщо $q > n$ і матриця $\{\lambda_i^{(n-1)}\}$ задовольняє умови (2) і (3), то для будь-якого модуля неперервності

$$\varepsilon_{T_{n-1}}(H_\omega;\ x;\ \lambda) = \frac{2}{\pi}\Theta_n^*(\omega;\ q;\ \lambda)\Big\{A_n(\nu;\ \omega;\ \lambda) + $$

$$+ \frac{1}{q}B_n(\omega;\ q;\ x)\Big\} + 0\{\tau(\omega;\ n;\lambda)\},$$

де

$$\frac{2}{5} < \Theta_n^*(\omega;\ q;\ \lambda) < 1,$$

а $A_n(\nu;\ \omega;\ \lambda)$ і $B_n(\omega;\ q;\ x)$ визначаються формулами (4).

Теорема 2. *Якщо* $\delta\int_0^1\frac{\omega(t)}{t^2}dt = 0\{\omega(t)\}$, *то для будь-якої послідовності* $\{\lambda_i^{(n-1)}\}$, *яка задовольняє нерівність* (3) *при* $1 \leqslant q \leqslant n$, *маємо*

$$\varepsilon_{T_{n-1}}(H_\omega;\ x;\ \lambda)=\frac{2}{\pi}\Theta_n^{**}(\omega;\ q;\ \lambda)\left\{\frac{1}{q}B_n(\omega;\ q;\ x)+\right.$$

$$\left.+C_n(\omega;\ q;\ x)+D_n(\omega;\ q;\ x)\right\}+0\{\tau(\omega;\ n;\ \lambda)\},$$

де $\frac{2}{5}\leqslant\Theta_n^{**}(\omega;q;\lambda)\leqslant 1$, *причому* $\Theta_n^{**}(\omega;\ 1;\ \lambda)=1$, *а при* $q>n$

$$\varepsilon_{T_{n-1}}(H_\omega;\ x;\ \lambda)=\frac{2}{\pi q}\Theta_n^{***}(\omega;\ q;\ \lambda)\,B_n(\omega;\ q;\ x)+0\{\tau(\omega;\ n;\ \lambda)\},$$

де $\frac{2}{3}\leqslant\Theta_n^{***}(\omega;\ q;\ \lambda)\leqslant 1$, *величини* $B_n(\omega;\ q;\ x)$, $C_n(\omega;\ q;\ x)$, $D_n(\omega;\ q;\ x)$ *мають ті ж значення, що і в теоремі* 1.

У випадку опуклого модуля неперервності остання порядкова рівність перетворюється в асимптотичну рівність, тобто $\Theta_n^{***}(\omega,q;\lambda)=1$.

Зауваження. Якщо $\lambda_i^{(n-1)}=1$, то при опуклому модулі неперервності $\omega(t)$ і $q=1$ з рівності (5) одержимо результат роботи [5]

$$\varepsilon_{T_{n-1}}(f;\ x;\ H_\omega)=\frac{1}{\pi}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)|\sin nx|\ln n+0\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

При доведенні теорем 1, 2 ми спираємося на деякі результати робіт [2] і [4]. Результати, аналогічні до результатів теорем 1, 2 для поліномів найліпшого квадратичного наближення, одержані в роботі [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Воробьева М. А. Приближение непрерывных периодических функций линейными средними полиномов наилучшего квадратического приближения. — «Известия вузов. Математика», 1971, № 8.
2. Губанов Г. П., Ковальчук Б. В. Про лінійні процеси наближення класів функцій тригонометричними поліномами, найкращими в заданій системі точок. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1969, вип. 4.
3. Губанов Г. П. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, некоторыми тригонометрическими полиномами. — «Прикладная механика», 1970, вып. 6.
4. Ковальчук Б. В., Губанов Г. П. Оцінка залишку при наближенні періодичних функцій зрізаними середніми від поліномів, найкращих в заданій системі точок — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1965, вип. 1.
5. Оловянишников В. М. Оценка остатка при приближении непрерывных периодических функций полиномами, наилучшими в заданной системе точек. — ДАН СССР, 1950, № 70.