УДК 518:512.36

Г. Г. ЦЕГЕЛИК

ВИДІЛЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ПАРАМЕТРІВ «МАКСИМАЛЬНИХ» ОБЛАСТЕЙ, ЯКІ НЕ МІСТЯТЬ НУЛІВ РЯДІВ ТИПУ ТЕЙЛОРА-ДІРІХЛЕ

У цій роботі за допомогою параметрів, які введені в [2, 3] для локалізації нулів рядів Лорана і Діріхле, встановлюються достатні умови існування «максимальних» областей, які не містять нулів рядів типу Тейлора-Діріхле.

Розглянемо абсолютно збіжний в деякій області D ряд [1]

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}, \tag{1}$$

де m_n — цілі числа; λ_n — дійсні і

$$0=m_0<m_1<\ldots,\ \lim_{n\to\infty} m_n=\infty;\ 0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots,\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty.$$

Нехай $|A_n|=a_n$ і $\{\alpha_n\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ — довільний набір додатних чисел (параметрів), який задовольняє умову

$$\sum_{n\neq k}\alpha_n=\alpha_k, \tag{2}$$

де k — деякий фіксований індекс $(0\leqslant k<\infty,\ A_k\neq 0)$.

Приймемо

$$r_1=\max_{n<k}\left(\frac{a_n\alpha_k}{a_k\alpha_n}\right)^{\frac{\tau}{m_k-m_n}},\quad R_1=\inf_{n>k}\left(\frac{a_k\alpha_n}{a_n\alpha_k}\right)^{\frac{\tau}{m_n-m_k}},$$

$$r_2=\max_{n<k}\left(\frac{a_n\alpha_k}{a_k\alpha_n}\right)^{\frac{1-\tau}{\lambda_k-\lambda_n}},\quad R_2=\inf_{n>k}\left(\frac{a_k\alpha_n}{a_n\alpha_k}\right)^{\frac{1-\tau}{\lambda_n-\lambda_k}}, \tag{3}$$

де $0<\tau<1$.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Якщо $0<k<\infty$ та існує такий набір параметрів $\{\alpha_n\}$, який задовольняє умову (2), що $R_1>r_1$, $R_2>r_2$ і перетин кільця $r_1\leqslant|z|\leqslant R_1$ із смугою $-\ln R_2\leqslant \mathrm{Re}\,(z)\leqslant -\ln r_2$ не пустий, то ряд (1) не перетворюється в нуль в області*

$$\{r_1\leqslant|z|\leqslant R_1,\ -\ln R_2\leqslant \mathrm{Re}\,(z)\leqslant -\ln r_2\}. \tag{4}$$

Доведення. Із формул (3) можна одержати такі співвідношення:

$$a_n r_1^{-(m_k-m_n)} e^{-(\lambda_k-\lambda_n)\ln r_2} \leqslant \frac{a_k}{\alpha_k}\alpha_n, \ (n<k),$$

$$a_n R_1^{m_n-m_k} e^{(\lambda_n-\lambda_k)\ln R_2} \leqslant \frac{a_k}{\alpha_k}\alpha_n, \ (n>k).$$

Для будь-яких ρ і x, які задовольняють умови $r_1 \leqslant \rho \leqslant R_1$ $(R_1 > r_1)$, $-\ln R_2 \leqslant x \leqslant -\ln r_2 (R_2 > r_2)$, одержимо

$$\sum_{n \neq k} a_n \rho^{m_n-m_k} e^{-(\lambda_n-\lambda_k)x} < \frac{a_k}{\alpha_k}\sum_{n \neq k}\alpha_n.$$

Використовуючи умову (2), останню нерівність перепишемо так

$$\sum_{n \neq k} a_n \rho^{m_n-m_k} e^{-(\lambda_n-\lambda_k)x} < a_k. \tag{5}$$

Покажемо, що ряд (1) не перетворюється в нуль в області (4). Дійсно, припустимо, що $f(z_0)=0$, де $|z_0|=\rho$, $\mathrm{Re}(z_0)=x$ і $r_1 \leqslant \rho \leqslant R_1$, $-\ln R_2 \leqslant x \leqslant -\ln r_2$. Тоді

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z_0^{m_n} e^{-\lambda_n z_0} = 0$$

або

$$-A_k z_0^{m_k} e^{-\lambda_k z_0} = \sum_{n \neq k} A_n z_0^{m_n} e^{-\lambda_n z_0}.$$

З останнього співвідношення одержуємо

$$a_k \leqslant \sum_{n \neq k} a_n \rho^{m_n-m_k} e^{-(\lambda_n-\lambda_k)x},$$

що суперечить (5).

Отже, зроблене припущення невірне, теорема доведена.

Аналогічно має місце інша теорема.

Теорема 2. Якщо $k=0$ *та існує такий набір параметрів* $\{\alpha_n\}$, *який задовольняє умову (2), що перетин круга* $|z|<R_1$ *із півплощиною* $\mathrm{Re}(z) > -\ln R_2$ *не пустий, то ряд (1) не перетворюється в нуль в області*

$$\{|z|<R_1, \ \mathrm{Re}(z) > -\ln R_2\}.$$

Приклад 1. Розглянемо ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2r)^n} z^n e^{-nz}, \text{ де } r \geqslant 1.$$

Нехай $k=0$ і $\alpha_0=1, \alpha_n = \frac{1}{2^n}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Тоді за теоремою 2 одержимо, що $f(z)$ не перетворюється в нуль в області

$$\{|z|<r^{\tau},\ \mathrm{Re}(z)>(\tau-1)\ln r\}.$$

Якщо розглянути частинну суму ряду (1)

$$f_s(z)=\sum_{n=0}^{s} A_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z},$$

то теореми 1,2 залишаються справедливими і в цьому випадку. Набір параметрів $\{\alpha_n\}$ досить брати для $n=0, 1, \ldots, s$. Для нулів $f_s(z)$ можна завжди ще вказати ліву границю, тобто має місце інша теорема.

Теорема 3. *Якщо $k=s$, то для будь-якого набору параметрів $\{\alpha_n\}$ $(n=0, 1, \ldots, s)$, який задовольняє умову (2), $f_s(z)$ не перетворюється в нуль в області*

$$\{|z|>r_1,\ \mathrm{Re}(z)<-\ln r_2\}.$$

Приклад 2. Нехай

$$f_2(z)=1+(4\sqrt{3}+4i)ze^{-0,5z}-iz^2e^{-z},$$

де $a_0=1$, $a_1=8$, $a_2=1$, $m_0=\lambda_0=0$, $m_1=1$, $m_2=2$, $\lambda_1=0,5$, $\lambda_2=1$.

Приймемо $k=1$, $\alpha_0=\frac{1}{2}$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\frac{1}{2}$, $\tau=\frac{1}{2}$, тоді за теоремою 1 одержуємо, що $f_2(z)$ не перетворюється в нуль в області

$$\left\{\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 2,\ -\ln 4\leqslant \mathrm{Re}(z)\leqslant \ln 4\right\}.$$

Приклад 3. Нехай

$$f_2(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z^{m_1}e^{-\lambda_1 z}+z^{m_2}e^{-\lambda_2 z},$$

де m_i, $\lambda_i (i=1,2)$ — будь-які дійсні числа, причому $0<m_1<m_2$, $0<\lambda_1<\lambda_2$.

Приймемо $k=2$, $\alpha_0=\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=1$, тоді за теоремою 3 одержуємо, що $f_2(z)$ не перетворюється в нуль в області

$$\{|z|>1,\ \mathrm{Re}(z)<0\}.$$

Зауваження. Очевидно, що всі результати залишаються справедливими і у випадку, коли m_n і λ_n є будь-які дійсні числа, для яких виконується умова

$$m_0<m_1<\ldots\to\infty,\ \lambda_0<\lambda_1<\ldots\to\infty.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Лунц Г. Л. О рядах типа Тейлора-Дирихле. — «Ивестия АН АрмССР», серия физико-математическая, 1961, **14**, № 2.
2. Цегелик Г. Г. Параметрическая локализация по модулям нулей полиномов и рядов Лорана. — «Известия вузов. Математика», 1967, № 12.
3. Цегелик Г. Г. Виділення смуг, в яких поліноми і ряди Діріхле но перетворюються в нуль. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1972, вип. 7.

УДК 519.21

І. Д. КВІТ

СИНГУЛЯРНІ СТРАТЕГІЇ

1. Сингулярні розподіли. Нехай випадкова змінна ξ набуває значення тільки на відрізку $0 \leqslant x \leqslant 1$, не має ні одного значення у відкритому інтервалі $c < x < 1 - c$, $0 < c < \frac{1}{2}$, попадання її на два суміжні відрізки $0 \leqslant x \leqslant c$ та $1 - c \leqslant x \leqslant 1$ — однаково ймовірне. Описана процедура трансфінітно повторюється на кожному з одержуваних крайніх відрізків. Визначена таким чином випадкова змінна ξ називається сингулярною, її явний вираз і графік функції розподілу $F(x;\ c)$ наведені в [1].

Сингулярна функція розподілу $F(x;\ c)$ неперервна та має властивості

$$F(x;\ c) + F(1 - x;\ c) = 1,\ 0 < c < \frac{1}{2},\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1}$$

і

$$F(cx;\ c) = \frac{1}{2} F(x;\ c),\ 0 < c < \frac{1}{2},\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{2}$$

З (1) і (2) випливає таке співвідношення: якщо функція $f(x)$ неперервна $0 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$\int_0^1 [2f(x) - f(cx) - f(1 - cx)]\, dF(x;\ c) = 0,\ 0 < c < \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Справді, оскільки $dF(x;\ c) = 0$ на інтервалі $(c,\ 1 - c)$, то

$$\int_0^1 f(x)\, dF(x;\ c) = \int_0^c f(x)\, dF(x;\ c) + \int_{1-c}^1 f(x)\, dF(x;\ c).$$