ЛІТЕРАТУРА

1. Лунц Г. Л. О рядах типа Тейлора-Дирихле. — «Ивестия АН АрмССР», серия физико-математическая, 1961, **14**, № 2.
2. Цегелик Г. Г. Параметрическая локализация по модулям нулей полиномов и рядов Лорана. — «Известия вузов. Математика», 1967, № 12.
3. Цегелик Г. Г. Виділення смуг, в яких поліноми і ряди Діріхле но перетворюються в нуль. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1972, вип. 7.

УДК 519.21

І. Д. КВІТ

СИНГУЛЯРНІ СТРАТЕГІЇ

1. Сингулярні розподіли. Нехай випадкова змінна ξ набуває значення тільки на відрізку $0 \leqslant x \leqslant 1$, не має ні одного значення у відкритому інтервалі $c < x < 1-c$, $0 < c < \frac{1}{2}$, попадання її на два суміжні відрізки $0 \leqslant x \leqslant c$ та $1-c \leqslant x \leqslant 1$ — однаково ймовірне. Описана процедура трансфінітно повторюється на кожному з одержуваних крайніх відрізків. Визначена таким чином випадкова змінна ξ називається сингулярною, її явний вираз і графік функції розподілу $F(x;\ c)$ наведені в [1].

Сингулярна функція розподілу $F(x;\ c)$ неперервна та має властивості

$$F(x;\ c) + F(1-x;\ c) = 1,\ 0 < c < \frac{1}{2},\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1}$$

і

$$F(cx;\ c) = \frac{1}{2} F(x;\ c),\ 0 < c < \frac{1}{2},\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{2}$$

З (1) і (2) випливає таке співвідношення: якщо функція $f(x)$ неперервна $0 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$\int_0^1 [2f(x) - f(cx) - f(1-cx)]\, dF(x;\ c) = 0,\ 0 < c < \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Справді, оскільки $dF(x;\ c) = 0$ на інтервалі $(c,\ 1-c)$, то

$$\int_0^1 f(x)\, dF(x;\ c) = \int_0^c f(x)\, dF(x;\ c) + \int_{1-c}^1 f(x)\, dF(x;\ c).$$

Але

$$\int_0^c f(x)\,dF(x;c)=\int_0^1 f(ct)\,dF(ct;\ c)=$$

$$=\int_0^1 f(ct)\,d\left[\frac{1}{2}F(t;\ c)\right]=\frac{1}{2}\int_0^1 f(cx)\,dF(x;\ c)$$

і

$$\int_{1-c}^1 f(x)\,dF(x;\ c)=\int_1^0 f(1-ct)\,dF(1-ct;\ c)=$$

$$=\int_1^0 f(1-ct)\,d\left[-F(ct;\ c)\right]=\frac{1}{2}\int_0^1 f(1-cx)\,dF(x;\ c).$$

Отже,

$$\int_0^1 f(x)\,dF(x;\ c)=\frac{1}{2}\int_0^1 \left[f(cx)+f(1-cx)\right]dF(x;\ c).$$

Звідси випливає тотожність (3).

Відзначимо, що при $c=0$ замість сингулярної функції розподілу дістаємо функцію розподілу дискретної випадкової змінної, яка набуває двох значень 0 і 1 з однаковими ймовірностями. Хоч у цьому разі співвідношення (2) не виконується, але тотожність (3) зберігається. Дійсно, при $c=0$ і $F(x;\ 0)$ зі стрибками висотою $\frac{1}{2}$ в точках 0 і 1 випливає, що

$$\int_0^1 \left[2f(x)-f(0)-f(1)\right]dF(x;0)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[2f(0)-f(0)-f(1)\right]+\frac{1}{2}\left[2f(1)-f(0)-f(1)\right]=0.$$

При $c=\frac{1}{2}$ замість сингулярної функції розподілу дістаємо функцію x, рівномірного на відрізку $[0,\ 1]$ розподілу. Очевидно, що для рівномірного розподілу виконується співвідношення (1) і (2). Отже, також виконується тотожність (3) з заміною c на $\frac{1}{2}$ та $dF\left(x;\ \frac{1}{2}\right)$ на dx.

Таким чином, при $0\leqslant c\leqslant\frac{1}{2}$ одержуємо однопараметричну сім'ю функцій розподілу $F(x;\ c)$, яка складається з дискретної функції розподілу при $c=0$, зі сингулярних функцій розподілу при $0<c<\frac{1}{2}$ та з абсолютно неперервної функції розподілу при $c=\frac{1}{2}$. Кожна функція розподілу цієї сім'ї задовольняє тотожність (3). Якщо в тотожності (3) прийняти $f(x)=x^n$, $(n=1, 2, \ldots)$, то дістанемо рекурентну формулу для початкових моментів $m_n(c)$ сім'ї випадкових змінних з функцією розподілу $F(x; c)$.

Справді, оскільки

$$2x^n-(cx)^n-(1-cx)^n=\{2-[1+(-1)^n]c^n\}x^n-\\ -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^k c^k x^k$$

і

$$m_k(c)=\int_0^1 x^k dF(x; c),\ (k=1, 2, \ldots),\ m_0(c)=1,$$

то з тотожності (3) випливає формула

$$m_n(c)=\frac{1}{2-[1+(-1)^n]c^n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^k c^k m_k(c),\ 0\leqslant c\leqslant\frac{1}{2},\\ (n=1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Звідси бачимо, що всі $m_n(0)=\frac{1}{2}$, а $m_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{n+1}$.

Відомо, що функція розподілу зі зміною на одиничному відрізку цілком характеризується своїми початковими моментами (порівн. [2]). Отже, наша сім'я функцій розподілу $F(x; c)$ однозначно визначається початковими моментами (4).

2. Оптимальні сингулярні стратегії. Розглянемо стратегічну гру двох осіб A та B. Нехай чиста стратегія гравця A полягає в потаємному виборі числа x з одиничного відрізка $[0, 1]$, а чиста стратегія гравця B полягає в потаємному виборі числа y з одиничного відрізку $[0, 1]$. Нехай у результаті проведених виборів чистих стратегій за відповідною згодою гравець B виплачує гравцеві A число монетних одиниць

$$\mathfrak{A}(x, y; a, b)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}[2x^k-(ax)^k-(1-ax)^k][2y^k-\\ -(by)^k-(1-by)^k],\ 0\leqslant x,\ y\leqslant 1;\ 0\leqslant a,\ b\leqslant\frac{1}{2}. \tag{5}$$

Платіжна функція (5) як сума геометричних прогресій неперервна раціональна функція на замкненому одиничному квадраті $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$ при $0 \leqslant a,\ b \leqslant \frac{1}{2}$.

На підставі тотожності (3) випливає, що при довільному y, $0 \leqslant y \leqslant 1$, платіжна функція (5) задовольняє співвідношення

$$\int_0^1 \mathfrak{A}(x,\ y;\ a,\ b)\, dF(x;\ a) = 0$$

і при довільному x, $0 \leqslant x \leqslant 1$ — співвідношення

$$\int_0^1 \mathfrak{A}(x,\ y;\ a,\ b)\, dF(y;\ b) = 0.$$

Отже, ціна гри з платіжною функцією (5) дорівнює нулю, і $F(x;\ a)$ та $F(y;\ b)$ є оптимальні стратегії гравців відповідно A та B. Відзначимо, що при $a = b = 0$ стратегії гравців A та B — дискретні, при $0 < a,\ b < \frac{1}{2}$ — сингулярні, а при $a = b = \frac{1}{2}$ — абсолютно неперервні.

Покажемо, що $F(x;\ a)$ та $F(y;\ b)$ — єдині оптимальні стратегії гравців A та B відповідно в грі з платіжною функцією (5).

Дійсно, припустимо, що гравці A та B мають ще якісь оптимальні стратегії, скажімо, $G(x)$ та $H(y)$ відповідно. Приймемо

$$\mu_k(G) = \int_0^1 [2\, x^k - (ax)^k - (1 - ax)^k]\, dG(x),$$

$$\mu_k(H) = \int_0^1 [2\, y^k - (by)^k - (1 - by)^k]\, dH(y), \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Оскільки $G(x)$ — оптимальна стратегія гравця A, то для всіх $y \in [0,\ 1]$ повинна виконуватися нерівність

$$\int_0^1 \mathfrak{A}(x\ \ y;\ a,\ b)\, dG(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mu_k(G)\, [2\, y^k - (by)^k - (1 - by)^k] \geqslant 0.$$

Проінтегрувавши останню нерівність за $H(y)$, дістаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mu_k(G)\, \mu_k(H) \geqslant 0.$$

Аналогічно (оскільки $H(y)$ — оптимальна стратегія гравця B) для всіх $x \in [0, 1]$ повинна виконуватися нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mu_k(G) \mu_k(H) \leqslant 0.$$

З останніх двох нерівностей випливає рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mu_k(G) \mu_k(H) = 0. \tag{6}$$

Бачимо, що при $a=b$ можна прийняти $G \equiv H$ і отже,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mu_k^2(G) = 0; \ \mu_k(G) = 0, \ (k = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Оскільки завжди

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mu_k(G) \mu_k(H) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mu_k^2(G) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mu_k^2(H),$$

то на підставі (7) випливає, що в сумі (6) кожний множник $\mu_k(G)$ і $\mu_k(H)$ дорівнює нулю, тобто, що

$$\int_0^1 [2x^k - (ax)^k - (1-ax)^k] \, dG(x) = 0,$$

$$\int_0^1 [2y^k - (by)^k - (1-by)^k] \, dH(y) = 0, \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Звідси та з тотожності (3) бачимо, що початкові моменти розподілів $G(x)$ і $H(y)$ задовольняють рекурентне співвідношення (4) відповідно при $c=a$ та $c=b$. Отже, за однозначністю визначення функції розподілу зі зміною на одиничному відрізку її початковими моментами G і H збігаються з функцією розподілу $F(x; c)$ відповідно при $c=a$ та $c=b$. Таким чином, $F(x; a)$ та $F(y; b)$ — єдині оптимальні стратегії гравців A та B у грі з платіжною функцією (5).

Зауважимо, що залежно від значень параметрів a та b з відрізка $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ у платіжній функції (5), маємо дев'ять типів пар оптимальних стратегій: (дискретна, дискретна), (дискретна, сингулярна), ..., (абсолютно неперервна, абсолютно неперервна). При $a=b=0$ платіжна функція (5) набуває вигляду

$$\mathfrak{A}(x,\ y)=\frac{4xy}{2-xy}-\frac{2x}{2-x}-\frac{2y}{2-y}+1.$$

Оскільки тепер єдині оптимальні стратегії гравців задані функціями розподілу, що мають у точках 0 і 1 стрибки висотою $\frac{1}{2}$, то гра задається платіжною матрицею

$$\begin{array}{c|cc} {}_{x}\diagdown^{y} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}. \qquad (8)$$

Незалежно від попереднього легко перевірити, що оптимальні змішані стратегії гравців у грі з матрицею (8) задаються вектором $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ і що ціна гри дорівнює нулю. Випадок оптимальних стратегій типу (сингулярна, сингулярна) при $a=b=\frac{1}{3}$ розглянуто в [3].

При $a=b=1$ платіжна функція (5) набуває вигляду

$$\mathfrak{A}(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}[x^k-(1-x)^k]\,[y^k-(1-y)^k] \qquad (9)$$

і має сідлову точку $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Оскільки для всякої функції розподілу $F(x)$ зі зміною на відрізку [0, 1], яка задовольняє умову

$$F(x)+F(1-x)=1,\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \qquad (10)$$

і довільної неперервної на відрізку [0, 1] функції $f(x)$ виконується співвідношення

$$\int_0^1 [f(x)-f(1-x]\,dF(x)=0,$$

то, очевидно, така функція розподілу буде оптимальною стратегією кожного гравця у грі з платіжною функцією (9). Зокрема, це можуть бути сингулярні функції розподілу з властивістю (1), що є частинним випадком (10), а також невластивий розподіл з одиничним стрибком у точці $x=\frac{1}{2}$. Таким чином, у грі з платіжною функцією (9) кожний гравець має безліч оптимальних стратегій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Квіт І. Д. Характеристичні функції. Вид-во Львівського ун-ту, 1972.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., «Мир», 1967.
3. Gross O. A rational game on the square. Contributions to the theory of games, III, Princeton (1957), 307—311.

УДК 537.533.33

В. Г. КОСТЕНКО, Л. О. РОМАНІВ

ПРО МЕТОД РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ З ПОРУШЕНОЮ ОСЬОВОЮ СИМЕТРІЄЮ

При виготовленні електронно-оптичних систем (ЕОС) внаслідок неточностей майже завжди порушується їх осьова симетрія. Тому виникає необхідність дослідження впливу відхилень від симетрії на роботу даних систем. При цьому в першу чергу потрібно визначити зміни в електростатичному полі.

У цій роботі описується наближена методика визначення поля ЕОС з незначно порушеною осьовою симетрією внаслідок зміщення осей окремих її електродів.

Нехай осесиметрична ЕОС складається з n електродів, обмежених поверхнями обертання S_i $(i=1,\ldots,n)$, твірні L_i яких гладкі замкнені криві. І нехай осі окремих електродів незначно зміщені. Зміщення осі i-го електроду характеризуємо параметром $\alpha_i(|\alpha_i|\ll 1)$, де α_i — віддаль від осі зміщеного електроду до осі симетричної системи, яку приймемо за вісь OZ циліндричної системи координат $(rZ\Theta)$.

Поверхні зміщених електродів позначимо через S_i^*. Розрахунок поля U^*, зумовленого даною збуреною системою, зводиться, як відомо, до розв'язку граничної задачі

$$\Delta U^* = 0 \text{ зовні } S_i^*, \ (1) \quad U^*/S_i^* = C_i. \ (2) \qquad (2)$$

На основі методу збурень [3] зобразимо потенціал U^* у вигляді

$$U^*(M) = U(M) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j U_j(M) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 U_{jj}(M) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{t=j}^{n} \alpha_j \alpha_t U_{jt} + O(\alpha_1^{k_1}\ldots\alpha_n^{k_n}), \ k_1+\ldots+k_n = 3, \qquad (3)$$