

чином, у грі з платіжною функцією (9) кожний гравець має безліч оптимальних стратегій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Квіт І. Д. Характеристичні функції. Вид-во Львівського ун-ту, 1972.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., «Мир», 1967.
3. Gross O. A rational game on the square. Contributions to the theory of games, III, Princeton (1957), 307—311.

УДК 537.533.33

В. Г. КОСТЕНКО, Л. О. РОМАНІВ

ПРО МЕТОД РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ З ПОРУШЕНОЮ ОСЬОВОЮ СИМЕТРІЄЮ

При виготовленні електронно-оптичних систем (ЕОС) внаслідок неточностей майже завжди порушується їх осьова симетрія. Тому виникає необхідність дослідження впливу відхилень від симетрії на роботу даних систем. При цьому в першу чергу потрібно визначити зміни в електростатичному полі.

У цій роботі описується наближена методика визначення поля ЕОС з незначно порушеною осьовою симетрією внаслідок зміщення осей окремих її електродів.

Нехай осесиметрична ЕОС складається з n електродів, обмежених поверхнями обертання S_i ($i=1, \dots, n$), твірні L_i яких гладкі замкнені криві. І нехай осі окремих електродів незначно зміщені. Зміщення осі i -го електроду характеризуємо параметром α_i ($|\alpha_i| \ll 1$), де α_i — віддаль від осі зміщеного електроду до осі симетричної системи, яку приймемо за вісь OZ циліндричної системи координат $(rZ\theta)$.

Поверхні зміщених електродів позначимо через S_i^* . Розрахунок поля U^* , зумовленого даною збуреною системою, зводиться, як відомо, до розв'язку граничної задачі

$$\Delta U^* = 0 \text{ зовні } S_i^*, \quad (1) \quad U^*/S_i^* = C_i. \quad (2) \quad (2)$$

На основі методу збурень [3] зобразимо потенціал U^* у вигляді

$$U^*(M) = U(M) + \sum_{j=1}^n \alpha_j U_j(M) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 U_{jj}(M) + \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{t=j}^n \alpha_j \alpha_t U_{jt} + O(\alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n}), \quad k_1 + \dots + k_n = 3, \quad (3)$$

де $U(M)$ — осесиметричний потенціал, який є розв'язком задачі

$$\Delta U = 0 \text{ зовні } S_i, \quad (4) \quad U/S_i = C_i \quad (5)$$

$U_j(M)$, $U_{jt}(M)$ — назовемо відповідно збуреннями 1-го і 2-го порядку. Ці функції задовольняють рівняння Лапласа зовні поверхонь S_i

$$\Delta U_j = 0, \quad (6) \quad \Delta U_{jt} = 0. \quad (7)$$

Для виводу граничних умов на поверхнях S_i встановимо взаємоднозначну відповідність між точками S_i і S_i^* . Вважатимемо, що кожна точка M_i поверхні S_i переходить внаслідок збурення в точку M_i^* , яка лежить в півплощині $\Theta = \Theta_i$ на віддалі α_i від M_i , де Θ_i — півплощина, в якій лежить вісь збуреного i -го електроду.

Вважаючи поверхні електродів еквіпотенціальними і розкладаючи потенціал $U^*(M^*)$ в околі точки M , за формулою Тейлора з врахуванням (2), (3), (5) дістаємо граничні умови для збурень U_j на поверхнях S_i

$$U_j(M_i) = \begin{cases} -\frac{\partial U}{\partial r} \cos(\Theta - \Theta_i), & j=i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \quad \begin{matrix} 1 \leq j \leq n, \\ 1 \leq i \leq n. \end{matrix} \quad (8)$$

Зобразимо $U_j(M)$ ($j=1, \dots, n$) у вигляді

$$U_j = \varphi_j \cos(\Theta - \Theta_j), \quad (9)$$

де функції φ_j задовольняють рівняння

$$\Delta \varphi_j - \frac{1}{r^2} \varphi_j = 0 \quad (10)$$

і граничні умови

$$\varphi_j(M_i) = \begin{cases} -\frac{\partial U}{\partial r}, & j=i, \\ 0, & j \neq i, \end{cases} \quad \begin{matrix} 1 \leq j \leq n, \\ i=1, \dots, n. \end{matrix} \quad (11)$$

Аналогічно одержуємо для U_{jt}

$$U_{jt} = \varphi_{jt}^{(0)} \cos(\Theta_j - \Theta_t) + \varphi_{jt}^{(2)} \cos\left(\Theta - \frac{\Theta_j + \Theta_t}{2}\right), \quad (12)$$

$$1 \leq j \leq n, \quad j \leq t \leq n,$$

де функції $\varphi_{jt}^{(0)}$ і $\varphi_{jt}^{(2)}$ задовольняють відповідно рівняння

$$\Delta \varphi_{jt}^{(0)} = 0, \quad (13) \quad \Delta \varphi_{jt}^{(2)} - \frac{4}{r^2} \varphi_{jt}^{(2)} = 0 \quad (14)$$

і граничні умови

$$\varphi_{jt}^{(0)}(Mi) = \begin{cases} -\frac{1}{2r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \varphi_j - \frac{\partial \varphi_j}{\partial r}, & j=t=i, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_t}{\partial r} - \frac{1}{2r} \varphi_t, & j=i, j < t \leq n, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} - \frac{1}{2r} \varphi_j, & t=i, 1 \leq j < t, \\ 0, & j \neq i, t \neq i, 1 \leq j \leq n, j \leq t \leq n, \end{cases} \quad (15)$$

$$\varphi_{jt}^{(2)}(Mi) = \begin{cases} \frac{1}{2r} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \varphi_j - \frac{\partial \varphi_j}{\partial r}, & j=t=i, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_t}{\partial r} + \frac{1}{2r} \varphi_t, & j=i, j < t \leq n, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{1}{2r} \varphi_j, & t=i, 1 \leq j < t, \\ 0, & j \neq i, t \neq i, 1 \leq j \leq n, j \leq t \leq n, \end{cases} \quad (16)$$

$i=1, \dots, n.$

Таким чином, визначення збуреного потенціалу U^* зводиться до розв'язання послідовності осесиметричних граничних задач (4), (5), (10), (11), (13), (15); (14), (16), причому має місце формула

$$\begin{aligned} U^*(r, z, \Theta) = & U(r, z) + \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j \cos(\Theta - \Theta_j) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 [\varphi_{jj}^{(0)} + \varphi_{jj}^{(2)} \cos 2(\Theta - \Theta_j)] + \\ & + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{t=j+1}^n \alpha_j \alpha_t \left[\varphi_{jt}^{(0)} \cos(\Theta_j - \Theta_t) + \varphi_{jt}^{(2)} \cos 2\left(\Theta - \frac{\Theta_j + \Theta_t}{2}\right) \right] + \\ & + O(\alpha_1^{k_1} \dots \alpha_n^{k_n}), \quad k_1 + \dots + k_n = 3. \end{aligned} \quad (17)$$

Розв'язання цих задач зводиться за допомогою теорії потенціалу до інтегральних рівнянь.

Осесиметричний потенціал U зображається потенціалом простого шару з густиною, розподіленою на серединній поверхні $S' = U_i S_i'$ [1], для визначення якої отримується інтегральне рівняння Фредгольма 1-го роду

$$\int_{L'} g(\tau) \frac{K(k) de}{V[r+R(\tau)]^2 + [z-\xi(\tau)]^2} \Big|_L = U \Big|_L, \quad (18)$$

де

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}; \quad k^2 = \frac{4rR(\tau)}{[r+R(\tau)]^2 + [z-\xi(\tau)]^2};$$

L' — твірна поверхні S' , задана рівнянням в параметричній формі

$$R=R(\tau), \quad \xi=\xi(\tau).$$

Рівняння (18) розв'язується методом коллокації з зображенням густини в спеціальному вигляді [2].

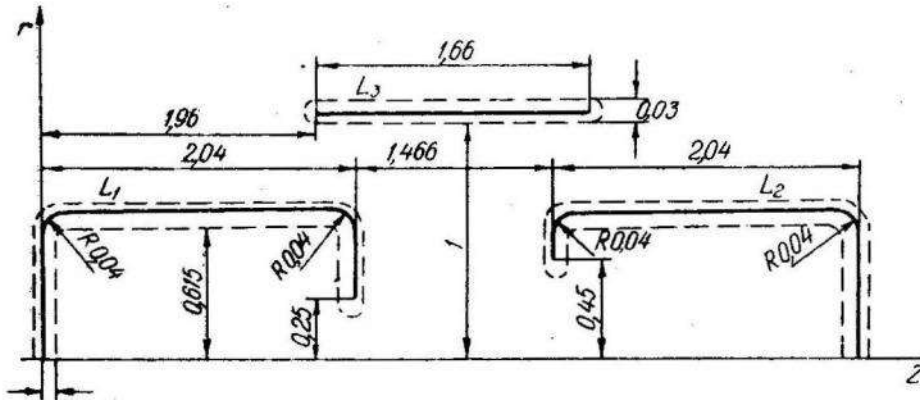


Рис. 1.

Задачі (10), (11); (14), (16) зводяться до відповідних задач для гармонійних функцій

$$\psi_j = \varphi_j \cos \Theta, \quad \psi_{jt}^{(2)} = \varphi_{jt}^{(2)} \cos 2\Theta.$$

Розв'язок останніх за допомогою потенціалів простого і подвійного шарів зводиться до інтегральних рівнянь Фредгольма 1-го роду [2].

Точність розв'язку одержаних задач визначається точністю задоволення відповідних граничних умов і, як показала практика розрахунків різних ЕОС, похибка не перевищує в середньому 0,1%.

За цією методикою розраховано електростатичне поле ЕОС, половина меридіонального перетину якої в незбуреному вигляді і розміри у відносних одиницях (за одиницю прийнято 7 мм) показані на рисунку.

Зміщення осей окремих електродів характеризується відповідно параметрами $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$, $\alpha_3=0$, $\Theta_1=\Theta_2=0$.

Граничні значення потенціалу приймали

$$U(r, z)|_{L_1} = U(r, z)|_{L_2} = 1, \quad U(r, z)|_{L_3} = 0.$$

У таблиці наведені значення при $r=0$ осесиметричного потенціалу U і збуреного U^* для різних значень параметрів збурення α .

Розподіл на осі OZ осесиметричного потенціалу U і збуреного потенціалу U^* при різних значеннях параметрів збурення α

z	$U(0, z)$	$U^*(0, z, 0)$			
		$\alpha=0,01$	$\alpha=0,02$	$\alpha=0,03$	$\alpha=0,04$
1	0,99961	0,99961	0,99962	0,99962	0,99964
1,2	0,99921	0,99921	0,99922	0,99923	0,99925
1,4	0,99825	0,99825	0,99827	0,99829	0,99833
1,6	0,99564	0,99565	0,99568	0,99574	0,99582
1,8	0,98667	0,98670	0,98681	0,98699	0,98724
2,0	0,94158	0,94174	0,94221	0,94299	0,94409
2,2	0,78058	0,78083	0,78157	0,78280	0,78452
2,4	0,58462	0,58493	0,58586	0,58742	0,58959
2,6	0,45648	0,45681	0,45782	0,45949	0,46183
2,8	0,41178	0,41212	0,41314	0,41486	0,41726
3,0	0,44814	0,44850	0,44959	0,45140	0,45395
3,2	0,55896	0,55934	0,56048	0,56239	0,56504
3,4	0,71738	0,71773	0,71877	0,72051	0,72294
3,6	0,85907	0,85931	0,86002	0,86122	0,86290
3,8	0,93864	0,93876	0,93912	0,93972	0,94056
4,0	0,97338	0,97343	0,97360	0,97387	0,97425
4,2	0,98814	0,98817	0,98824	0,98837	0,98855
4,4	0,99460	0,99461	0,99465	0,99471	0,99480
4,6	0,99751	0,99752	0,99754	0,99757	0,99762
4,8	0,99885	0,99885	0,99887	0,99889	0,99892
5,0	0,99947	0,99947	0,99948	0,99950	0,99951

ЛІТЕРАТУРА

1. Прусов И. А. [и др.]. Расчет электрического поля системы электродов малой толщины методом нелинейных параметров. — В сб.: Вычислительные системы. Новосибирск. 1967.
2. Романив Л. Е., Костенко В. Г. О возможности определения потенциала электростатического поля с незначительно нарушенной осевой симметрией. — «Теоретическая электротехника», 1972, вып. 14.
3. Sturrock P. A. Phil. Trans., A 243, 868, 1951.

УДК 531.8

І. В. ОГІРКО

УТОЧНЕНИЙ РОЗРАХУНОК ГНУЧКИХ ПЛАСТИН УЗАГАЛЬНЕНИЕМ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Чисельним ітераційним методом розв'язана задача* про пружну осесиметричну деформацію круглих гнучких пластин з підкріпленням краєм. Складена алгольна програма, яка дає змогу всебічно дослідити їх напружено-деформований стан під довільним осесиметричним навантаженням.

1. Осесиметричний згин круглої пластинки з концентричним тонким пружним ребром.

* Робота виконана під керівництвом проф. Н. П. Флейшмана.