Розподіл на осі OZ осесиметричного потенціалу U і збуреного потенціалу U^* при різних значеннях параметрів збурення α

z	$U(0, z)$	$U^*(0, z, 0)$			
		$\alpha=0,01$	$\alpha=0,02$	$\alpha=0,03$	$\alpha=0,04$
1	0,99961	0,99961	0,99962	0,99962	0,99964
1,2	0,99921	0,99921	0,99922	0,99923	0,99925
1,4	0,99825	0,99825	0,99827	0,99829	0,99833
1,6	0,99564	0,99565	0,99568	0,99574	0,99582
1,8	0,98667	0,98670	0,98681	0,98699	0,98724
2,0	0,94158	0,94174	0,94221	0,94299	0,94409
2,2	0,78058	0,78083	0,78157	0,78280	0,78452
2,4	0,58462	0,58493	0,58586	0,58742	0,58959
2,6	0,45648	0,45681	0,45782	0,45949	0,46183
2,8	0,41178	0,41212	0,41314	0,41486	0,41726
3,0	0,44814	0,44850	0,44959	0,45140	0,45395
3,2	0,55896	0,55934	0,56048	0,56239	0,56504
3,4	0,71738	0,71773	0,71877	0,72051	0,72294
3,6	0,85907	0,85931	0,86002	0,86122	0,86290
3.8	0,93864	0,93876	0,93912	0,93972	0,94056
4,0	0,97338	0,97343	0,97360	0,97387	0,97425
4,2	0,98814	0,98817	0,98824	0,98837	0,98855
4,4	0,99460	0,99461	0,99465	0,99471	0,99480
4,6	0,99751	0,99752	0,99754	0,99757	0,99762
4,8	0,99885	0,99885	0,99887	0,99889	0,99892
5,0	0,99947	0,99947	0,99948	0,99950	0,99951

ЛІТЕРАТУРА

1. Прусов И. А. [и др.]. Расчет электрического поля системы электродов малой толщины методом нелинейных параметров. — В сб.: Вычислительные системы. Новосибирск. 1967.
2. Романив Л. Е.. Костенко В. Г. О возможности определения потенциала электростатического поля с незначительно нарушенной осевой симметрией. — «Теоретическая электротехника», 1972, вып. 14.
3. Sturrock P. A. Phil. Trans., A 243, 868, 1951.

УДК 531.8

І. В. ОГІРКО

УТОЧНЕНИЙ РОЗРАХУНОК ГНУЧКИХ ПЛАСТИН УЗАГАЛЬНЕНИМ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Чисельним ітераційним методом розв'язана задача * про пружну осесиметричну деформацію круглих гнучких пластин з підкріпленим краєм. Складена алгольна програма, яка дає змогу всебічно дослідити їх напружено-деформований стан під довільним осесиметричним навантаженням.

1. Осесиметричний згин круглої пластинки з концентричним тонким пружним ребром.

* Робота виконана під керівництвом проф. Н. П. Флейшмана.

Кругла пружна гнучка пластинка товщини h_0 віднесена до полярної системи координат (r, Θ). Край $r=R$ пластинки підкріплено тонким пружним кільцем, вісь якого лежить в серединній площині пластинки, а одна з його головних осей інерції поперечного перетину перпендикулярна до неї. На пластинку діє довільне осесиметричне навантаження інтенсивності $q(r)$.

Як відомо [2, 4], напружений стан пластинки характеризується прогином $W(r)$ і функцією напружень $\Phi(r)$, які після введення безрозмірних величин

$$\Theta=\frac{R}{h_0}\frac{dW}{dr},\ \varphi=\frac{R}{Eh_0}\ \frac{d\Phi}{dr},\ x=\frac{r}{R}$$

повинні задовольняти рівняння рівноваги

$$\frac{1}{12(1-\nu^2)}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Theta}{dx}+\frac{\Theta}{x}\right)=\frac{\varphi\cdot\Theta}{x}+\psi^*(x) \tag{1}$$

і рівняння сумісності

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dx}+\frac{\varphi}{x}\right)=-\frac{\Theta^2}{2x}, \tag{2}$$

де $\psi^*(x)$ — відома функція навантаження; ν — коефіцієнт Пуассона; E — модуль Юнга.

Функції $\Theta(x)$ і $\varphi(x)$ повинні задовольняти граничні умови [4]:

при $x=0$

$$\Theta=0,\quad \varphi=0, \tag{3}$$

при $x=1$

$$\frac{d\Theta}{dx}+(\delta_1+\nu)\,\Theta=0,\ \frac{d\varphi}{dx}+\frac{1-\nu\delta_3}{\delta_3}\varphi=0, \tag{4}$$

де δ_1 — відносна жорсткість підкріплюваного кільця на згин; δ_3 — зведена відносна жорсткість кільця на розтяг.

2. Застосування узагальненого методу Ньютона. Для інтегрування системи рівнянь (1), (2) використовуємо ітераційний метод релаксації (узагальнений метод Ньютона) [3]. Для цього відрізок [0, 1] розбивається на n рівних частин довжини $h=\frac{1}{n}$ і похідні замінюються відповідними скінченно різницевими відношеннями [1].

Тоді рівняння (1), (2) наближено замінюються системами нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$R_i\equiv\frac{1}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\Theta_{i+1}-2\Theta_i+\Theta_{i-1}}{h^2}+\frac{\Theta_{i+1}-\Theta_{i-1}}{2hx_i}-\frac{\Theta_i}{x_i^2}\right)-$$

$$-\frac{\varphi_i\Theta_i}{x_i}-\psi^*=0, \tag{5}$$

$$r_i \equiv \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} + \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2hx_i} - \frac{\varphi_i}{x_i^2} + \frac{\Theta_i^2}{2x_i} = 0, \qquad (6)$$

де $\Theta_i = \Theta(x_i)$, $\varphi_i = \varphi(x_i)$.

Через R_i та r_i позначимо невязки (похибки) в точках x_i. З граничних умов (3), (4) одержуємо

$$\Theta_0 = 0, \ \varphi_0 = 0, \ \Theta_n = \frac{\Theta_{n-1}}{1 + (\delta_1 + \nu)h}, \ \ \varphi_n = \frac{\delta_3 \varphi_{n-1}}{\delta_3 + (1 - \nu\delta_3)}.$$

Завдання полягає в тому, щоб систематично зменшувати нев'язки в точках x_i до певної границі. Для цього введемо оператори релаксації

$$dR_i = -\left[\frac{1}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{2}{h^2} + \frac{1}{x_i^2}\right) + \frac{\varphi_i}{x_i}\right] d\Theta_i, \qquad (7)$$

$$dr_i = -\left(\frac{2}{h^2} + \frac{1}{x_i^2}\right) d\varphi_i. \qquad (8)$$

Ці вирази одержуються диференціюванням R_i та r_i — відповідно за Θ_i та φ_i. Їх можна інтерпретувати як зміни нев'язок dR_i та dr_i, внаслідок зміни значень функцій в точках x_i відповідно на величину $d\Theta_i$ і $d\varphi_i$. Схема обчислень виглядає так: підставляємо початкові значення Θ_i^1, φ_i^0, функцій Θ та φ у рівняння системи (5), обчислюємо нев'язки R_i і прирівнюємо оператори релаксації до відповідних значень нев'язок з оберненим знаком, тобто $dR_i^0 = -R_i^0$. Величина, на яку треба змінити значення Θ_i, дорівнює

$$d\Theta_i^{\circ} = \frac{R_i^{\circ}}{\dfrac{1}{12(1-\nu^2)}\left(\dfrac{2}{h^2} + \dfrac{1}{x_i^2}\right) - \dfrac{\varphi_i^{\circ}}{x_i}}.$$

Отже, нове наближення функції Θ запишемо $\Theta_i^1 = \Theta_i^0 + d\Theta_i^0$. Значення Θ_i^1, φ_i^0 підставляємо потім у рівняння системи (6) і обчислюємо нев'язки r_i. Процес продовжується за циклом, поки зміна функцій для всіх рівнянь стане достатньо малою.

3. Результати обчислень. Складену алгольну програму можна використати на ЕОМ для будь-якої функції навантажень ψ^*.

Величини δ_1, δ_3 виражаються через один параметр δ, який характеризує відношення модуль пружності кільця і пластинки. Задача доведена до числа для випадку рівномірного навантаження інтенсивності $q^* = \frac{q}{E}\left(\frac{R}{h_0}\right)^4$ і $\delta_1 = 2{,}7\delta$; $\delta_3 = 0{,}3\delta$.

Визначено мембранні (σ_r, σ_θ) та згинні (σ_r^3, σ_θ^3) напруження в пластинці за відомими формулами

$$\sigma_r = \frac{Eh_\delta^2}{R^2} \cdot \frac{\varphi}{x}, \quad \sigma_\Theta = \frac{Eh_\delta^2}{R^2} \cdot \frac{d\varphi}{dx},$$

$$\sigma_r^з = -\frac{Eh_\delta^2}{2R^2(1-\nu^2)}\left(\frac{d\varphi}{dx} + \nu\frac{\Theta}{x}\right),$$

$$\sigma_\Theta^з = -\frac{Eh_\delta^2}{2R^2(1-\nu^2)}\left(\frac{\Theta}{x} + \nu\frac{d\Theta}{dx}\right).$$

Для визначення впливу підкріплюваного кільця на максимальний прогин пластинки в таблиці поміщені залежності параметра q^* від величини $W(0)$ при різних значеннях δ.

Значення $\frac{W(0)}{h_0}$

q^*	δ				
	0	1	2	5	∞
4	1,485	0,984	0,838	0,699	0,566
8	2,114	1,496	1,302	1,107	0,904
12	2,536	1,839	1,616	1,385	1,134
20	3,138	2,321	2,055	1,777	1,455
40	4,110	3,083	2,745	2,381	1,954
60	4,782	3,600	3,211	2,789	2,288
80	5,313	4,005	3,576	3,107	2,547

Залежності мембранних і згинних напружень в центрі і на контурі пластинки від величини прогину в центрі зображені графічно на рис. 1—4 для п'яти значень δ.

На закінчення зауважимо, що методом збурень в другому наближенні аналогічна задача вже розглядалась в роботах,

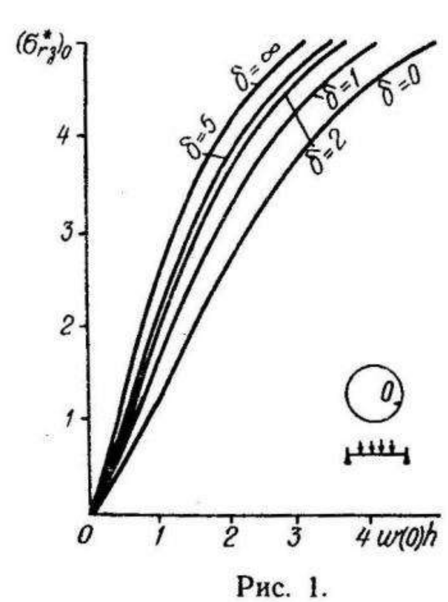

Рис. 1.

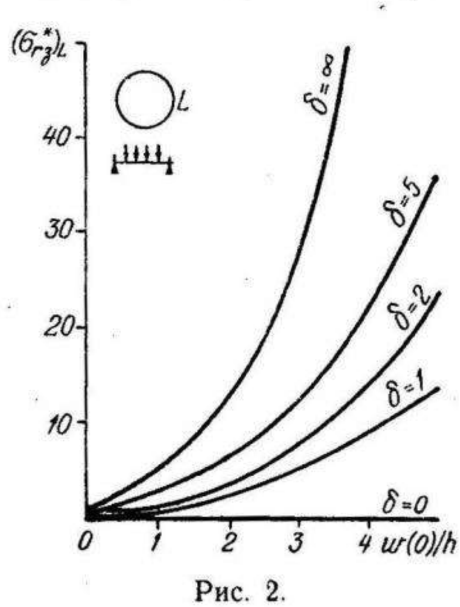

Рис. 2.

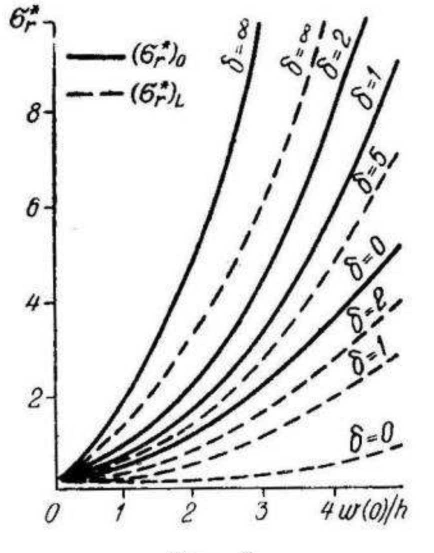

Рис. 3.

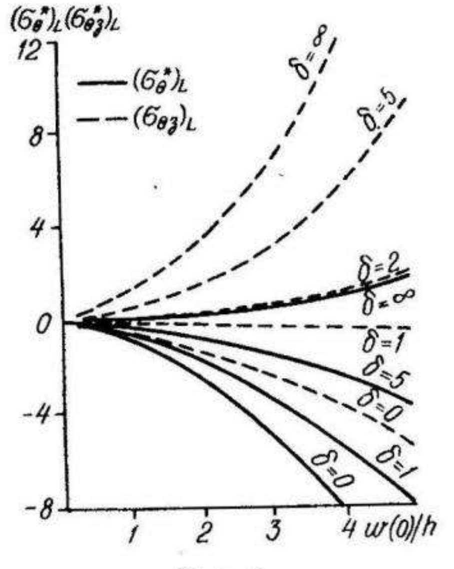

Рис. 4.

але там на відміну від наших результатів (рис. 1) для згинних напружень σ_r^3 в центрі круглої пластинки при $\frac{W(0)}{h_0} > 2{,}4$ одержані дані, які протирічать експерименту, а саме нульові і навіть від'ємні значення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычисления, т. 1, М., «Наука», 1966.
2. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М., ГИТТЛ, 1956.
3. Перроне, Као. Применение общего итерационного метода нелинейной релаксации для решения нелинейных задач механики. — «Прикладная механика» 1971, № 2.
4. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. К., «Наукова думка», 1964.

УДК 539.3

Н. П. ФЛЕЙШМАН, Б. М. ШПІЛЬКЕРМАН

РОЗРАХУНОК ДЕЯКИХ БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЕЛЕКТРОВАКУУМНИХ ПРИЛАДІВ

Під час проектування електровакуумних приладів потрібно визначати напружений стан їх корпусу, який звичайно є складним з'єднанням оболонок та пластин. Деякі елементи таких приладів мають вигляд круглих або кільцевих скляних пластинок, циклічно послаблених отворами, в які впаяно металеві штирі. Ці пластинки взаємодіють з відповідними оболонками