

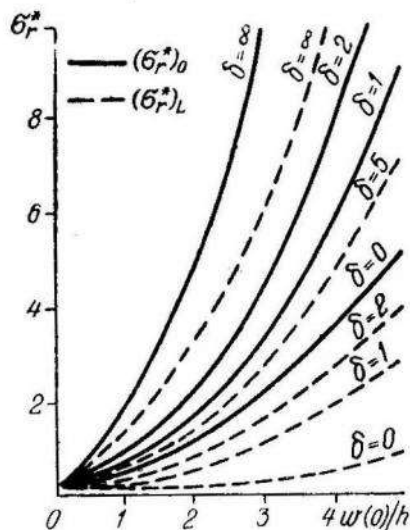


Рис. 3.

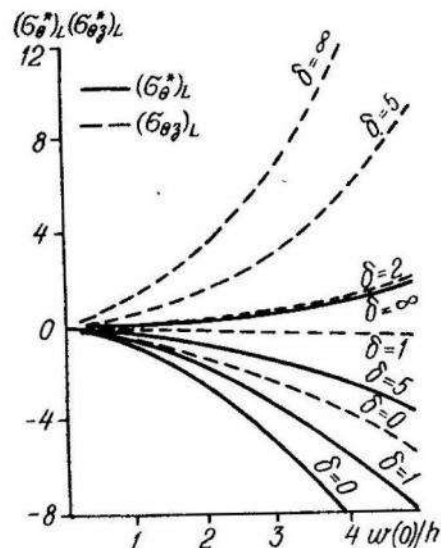


Рис. 4.

але там на відміну від наших результатів (рис. 1) для згинних напружень σ_r^3 в центрі круглої пластинки при $\frac{W(0)}{h_0} > 2,4$ одержані дані, які протирічать експерименту, а саме нульові і навіть від'ємні значення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычисления, т. 1, М., «Наука», 1966.
2. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М., ГИТТЛ, 1956.
3. Перроне, Као. Применение общего итерационного метода нелинейной релаксации для решения нелинейных задач механики. — «Прикладная механика» 1971, № 2.
4. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. К., «Наукова думка», 1964.

УДК 539.3

Н. П. ФЛЕЙШМАН, Б. М. ШПІЛЬКЕРМАН

РОЗРАХУНОК ДЕЯКИХ БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЕЛЕКТРОВАКУУМНИХ ПРИЛАДІВ

Під час проектування електровакуумних приладів потрібно визначати напружений стан їх корпусу, який звичайно є складним з'єднанням оболонок та пластин. Деякі елементи таких приладів мають вигляд круглих або кільцевих скляних пластинок, циклічно послаблених отворами, в які впаяно металеві штирі. Ці пластинки взаємодіють з відповідними оболонками

і перебувають зокрема в узагальненому плоскому напруженому стані під дією циклічного контурного навантаження.

Нижче ми розглядаємо плоску задачу теорії пружності для кільцевої пластинки з N циклічно розміщеними абсолютно жорсткими шайбами ($\alpha = 2\pi/N$ — кут циклічності). Припустимо, що на контурі L_{N+1} радіуса R та на контурі L_0 радіуса r задано навантаження або компоненти зміщення у вигляді циклічних функцій полярного кута (рис. 1). На контурах шайб L_j ($j=1, 2, \dots, N$) одиничного радіуса задається жорстке поступальне переміщення шайб, центр кожної з яких, що має афікс $z_j = e^{i(j-1)\alpha}l$, пересувається вздовж відповідного радіуса на невідому відстань $u_0 = \text{const}$.

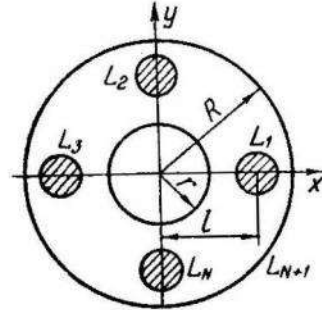


Рис. 1.

Віднесемо пластинку до прямокутної декартової системи координат xoy (рис. 1)

Як відомо, задача про напружений стан пластинки зводиться до визначення комплексних потенціалів $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ з граничних умов [3]:

$$\begin{aligned} F_{N+1} &\equiv \kappa_1 \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} - F(t) - \alpha_1 = 0 \text{ на } L_{N+1}; \\ F_0 &\equiv \kappa_2 \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} - f(t) - \alpha_2 = 0 \text{ на } L_0, \\ F_j &\equiv \kappa \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} - e^{i(j-1)\alpha} u_0 = 0 \text{ на } L_j, \\ &\quad (j=1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (1)$$

де t — афікс точки відповідного контура, $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$; ν — коефіцієнт Пуассона; $F(t)$ і $f(t)$ — відомі функції зовнішнього навантаження або заданих переміщень [3]. Постійні коефіцієнти κ_1 і κ_2 приймають значення $+1$ або $-\kappa$. У першому випадку на відповідному контурі одержимо умови першої основної задачі (задано навантаження) і числа α_1, α_2 підлягають визначенню, у другому — умови другої основної задачі (задано переміщення) і $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

За умовами циклічної симетрії в точках z і $z_s^* = e^{i(s-1)\alpha}z$ ($s=2, \dots, N$) напруження повинні бути однаковими, тобто функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ мають задовольняти такі співвідношення:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= e^{-i(s-1)\alpha} \varphi[e^{i(s-1)\alpha}z]; \\ \psi(z) &= e^{i(s-1)\alpha} \psi[e^{i(s-1)\alpha}z]. \end{aligned} \quad (2)$$

$(s=2, \dots, N).$

Отже, функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ слід зобразити у вигляді:

$$\varphi(z) = \sum_{k=k_1N+1}^{\infty} A_k z^k + \sum_{k=k_2N-1}^{\infty} D_k z^{-k} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i(j-1)(k+1)\alpha} [z - e^{i(j-1)\alpha} l]^{-k}, \\
\psi(z) = & \sum_{k=k_1 N-1}^{\infty} B_k z^k + \sum_{k=k_1 N+1}^{\infty} E_k z^{-k} + \\
& + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{i(j-1)(k-1)\alpha} [z - e^{i(j-1)\alpha} l]^{-k}. \quad (3)
\end{aligned}$$

Тут $k_1=0, 1, 2, \dots$; $k_2=1, 2, \dots$.

Шукані коефіцієнти A_k, D_k, B_k, E_k, a_k і b_k визначаємо з граничних умов (1) на контурах L_0, L_{N+1} та L_1 . Внаслідок циклічної симетрії граничні умови на контурах L_j при $j=2, \dots, N$ задовольнятимуться автоматично.

Відзначимо, що на контурах шайб L_j ($j=1, \dots, N$) повинні виконуватись також умови рівності нулю головного вектора і головного моменту діючих сил [3].

На внутрішньому контурі L_0 матимемо $z=t=r\eta$. Розвинемо функції $[t - e^{i(j-1)\alpha} l]^{-k}$ ($j=1, \dots, N$) в ряд по степенях t/z_j ($|t|=r < l=|z_j|$). Після елементарних перетворень функцій $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ на контурі L_0 набирають вигляду:

$$\begin{aligned}
\varphi(\eta) = & \sum_{k=k_1 N+1}^{\infty} r^k A_k \eta^k + \sum_{k=k_2 N-1}^{\infty} r^{-k} D_k \eta^{-k} + \\
& + N \sum_{k=k_1 N+1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v C_{k+v-1}^k r^k \epsilon_1^{k+v} a_v \eta^k, \\
\psi(\eta) = & \sum_{k=k_1 N-1}^{\infty} r^k B_k \eta^k + \sum_{k=k_1 N+1}^{\infty} r^{-k} E_k \eta^{-k} + \\
& + N \sum_{k=k_2 N-1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v C_{k+v-1}^k r^k \epsilon_1^{k+v} b_v \eta^k. \quad (4)
\end{aligned}$$

Тут і надалі $\epsilon_1=1/l$, $\delta_v^k = \begin{cases} 0 & \text{при } v > k; \\ 1 & \text{при } v \leq k. \end{cases}$

На зовнішньому контурі L_{N+1} , де $z=t=R\eta$, розвинемо вирази $[t - e^{i(j-1)\alpha} l]^{-k}$ ($j=1, \dots, N$) в ряд по степенях z_j/t ($|t|=R > l=|z_j|$). На цьому контурі функції (3) запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned}
\varphi(\eta) &= \sum_{k=k_1N+1}^{\infty} R^k A_k \eta^k + \sum_{k=k_2N-1}^{\infty} R^{-k} D_k \eta^{-k} + \\
&+ N \sum_{k=k_2N-1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \delta_v^k C_{k-1}^{v-1} R^{-k} \varepsilon_1^{v-k} a_v \eta^{-k}, \\
\psi(\eta) &= \sum_{k=k_2N-1}^{\infty} R^k B_k \eta^k + \sum_{k=k_1N+1}^{\infty} R^{-k} E_k \eta^{-k} + \\
&+ N \sum_{k=k_1N+1}^{\infty} \sum_{v=1}^{\infty} \delta_v^k C_{k-1}^{v-1} R^{-k} \varepsilon_1^{v-k} b_v \eta^{-k}. \quad (5)
\end{aligned}$$

Цілком аналогічно одержимо вирази для функцій $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ на контурі першої шайби L_1 , де $z=l=\sigma$

$$\begin{aligned}
\varphi(\sigma) &= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=k_1N+1}^{\infty} \delta_v^k C_k^{v-1} \varepsilon_1^{v-k} A_k \sigma^v + \sum_{v=1}^{\infty} a_v \sigma^{-v} + \\
&+ \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \sum_{k=k_2N-1}^{\infty} C_{k+v-1}^v \varepsilon_1^{k+v} D_k \sigma^v + \\
&+ \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^v C_{k+v-1}^v T_{k,v} a_k \sigma^v, \\
\psi(\sigma) &= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=k_2N-1}^{\infty} \delta_v^k C_k^{v-1} \varepsilon_1^{v-k} B_k \sigma^v + \sum_{v=1}^{\infty} b_v \sigma^{-v} + \\
&+ \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=k_1N+1}^{\infty} (-1)^v C_{k+v-1}^v \varepsilon_1^{k+v} E_k \sigma^v + \\
&+ \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^v C_{k+v-1}^v R_{k,v} t_k \sigma^v. \quad (6)
\end{aligned}$$

Легко переконатись в тому, що вирази

$$\frac{T_{k,v}}{R_{k,v}} = \sum_{j=2}^N e^{i(j-1)(k \pm 1)\alpha} [1 - e^{i(j-1)\alpha}]^{-(k+v)} \varepsilon_1^{k+v} \quad (7)$$

є дійсними при будь-яких значеннях $k=1, 2, \dots$; $v=0, 1, \dots$

Використовуючи метод Бубнова-Гальоркіна [2], підставимо функції (4), (5), (6) в граничні умови (1) і вимагатимемо, щоб функції F_0 , F_1 та F_{N+1} були ортогональні до повної системи функцій σ^m і η^m на відповідних контурах. Показники степеня m функцій σ^m і η^m доцільно вибирати такими, щоб відповідні члени з показниками степеня $\mp(m+1)$ були в виразах (4), (5), (6) для функцій $\varphi(\eta)$ і $\varphi(\sigma)$, а саме: а) на контурі ядра $m=0, 1, 2, \dots$, б) на зовнішньому та внутрішньому контурах $m=-(k_1N+2)$, $m=k_2N-2$.

Для обчислення коефіцієнтів A_k , D_k , B_k , E_k , a_k , b_k одержуємо безмежну алгебраїчну систему рівнянь. Квасірегулярність [1] цієї системи доводиться додаванням і відніманням відповідних рівнянь системи [2]. Як показує аналіз системи при її розв'язанні можна використовувати метод редукції [1], якщо відомі функції $F(t)$ і $f(t)$ — неперервні на відповідних контурах, а їх похідні задовольняють умови Діріхле. При цьому залежно від величини радіуса r (рис. 1), слід розрізняти два випадки: $r > 1$ і $r \leq 1$. Це викликано тим, що одне і те ж рівняння алгебраїчної системи залежно від величини радіуса r виявляється квазірегулярним для різних

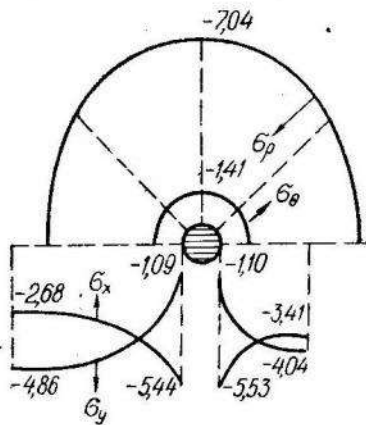


Рис. 2.

коефіцієнтів. Останню обставину слід враховувати, використовуючи метод редукції.

Для прикладу розглянемо випадок пластинки з чотирма жорсткими шайбами ($N=4$) під впливом рівномірно розподілених нормальних напружень $P=\text{const}$, $p=\text{const}$ на відповідних контурах L_5 і L_0 .

При цьому маємо $F(t)=Pt$, $f(t)=pt$, $\kappa_1=\kappa_2=1$.

Для параметрів задачі

$$v=0,2; \quad p=-2,6777602; \quad P=-3,380559;$$

$$l=33,5; \quad r=23,6; \quad R=38,9$$

коефіцієнти розв'язку такі:

$$a_1=a_2=0;$$

$$a_1=-0,2331892; \quad a_2=0,007238671; \quad a_3=-0,1807383 \cdot 10^{-3};$$

$$b_1=-2,50554; \quad b_2=-7,810355; \quad b_3=0,2518429;$$

$$b_4=-0,3686114 \cdot 10^{-2}; \quad b_5=-0,5422152 \cdot 10^{-3}; \quad A_1=-1,889269;$$

$$D_3=136,7782; \quad A_5=0,1649513 \cdot 10^{-8}; \quad E_1=612,2501;$$

$$B_3=-0,122182 \cdot 10^{-4}; \quad E_5=104333,1.$$

За відомими функціями $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ (3) напруження в пластинці визначаються за допомогою формул Колосова-Мусхелішвілі [3].

На рис. 2 зображені епюри напружень σ_x , σ_y вздовж дійсної осі і σ_r , σ_θ вздовж контура жорсткого ядра L_1 . Результати одержано в третьому наближенні.

Аналіз результатів свідчить, що відома умова $\sigma_\theta = \nu \sigma_r$ на контурі спаю пластинки з абсолютно жорстким включенням виконується на L_1 з точністю до 2%. Граничні умови на контурах L_0 , L_5 задовольняються з точністю до 1%. Для практичних потреб така точність розв'язку задачі цілком задовільна.

ЛІТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М., Гостехиздат, 1949.
2. Космодамианский А. С. Многосвязные пластинки. Донецк, 1969.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.

УДК 518.517.948

Ю. М. ЩЕРБИНА

ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ОДНОГО ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

В [1] запропоновано ітераційний метод для розв'язування нелінійних операторних рівнянь

$$P(x) = 0, \quad (1)$$

де P — неперервний оператор, що діє з одного банахового простору в інший.

Для практичного застосування цього методу необхідно мати досить «добре» початкове наближення, яке важко визначити. Ми пропонуємо деяку модифікацію процесу з [1], яка не має цього недоліку

$$x_{n+1} = x_n - [P(x_n, \theta_n)]^{-1} \frac{1}{K_n} P(x_n),$$

$$\theta_n = \begin{cases} \tilde{x}_0, & \text{при } n = 0 \\ x_n - [P(x_{n-1}, \theta_{n-1})]^{-1} \frac{1}{K_n} P(x_n), & \text{при } n \geq 1, \end{cases} \quad (2)$$

де K_n — дійсні числа; $P(x, \theta)$ — перша поділена різниця [3] оператора $P(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

При $K_n = \text{const} = 1$ алгоритм (2) збігається з запропонованим в [1] і має порядок збіжності $\rho = 1 + \sqrt{2}$.