На рис. 2 зображені епюри напружень σ_x, σ_y вздовж дійсної осі і σ_ρ, σ_Θ вздовж контура жорстокого ядра L_1. Результати одержано в третьому наближенні.

Аналіз результатів свідчить, що відома умова $\sigma_\Theta = \nu\sigma_\rho$ на контурі спаю пластинки з абсолютно жорстким включенням виконується на L_1 з точністю до 2%. Граничні умови на контурах L_0, L_5 задовольняються з точністю до 1%. Для практичних потреб така точність розв'язку задачі цілком задовільна.

ЛІТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М., Гостехиздат, 1949.
2. Космодамианский А. С. Многосвязные пластинки. Донецк, 1969.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.

УДК 518:517.948

Ю. М. ЩЕРБИНА

ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ОДНОГО ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

В [1] запропоновано ітераційний метод для розв'язування нелінійних операторних рівнянь

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

де P — неперервний оператор, що діє з одного банахового простору в інший.

Для практичного застосування цього методу необхідно мати досить «добре» початкове наближення, яке важко визначити. Ми пропонуємо деяку модифікацію процесу з [1], яка не має цього недоліку

$$x_{n+1} = x_n - [P(x_n, \theta_n)]^{-1}\frac{1}{K_n}P(x_n),$$

$$\theta_n = \begin{cases} \tilde{x}_0, \text{ при } n = 0 \\ x_n - [P(x_{n-1}, \theta_{n-1})]^{-1}\frac{1}{K_n}P(x_n), \text{ при } n \geq 1, \end{cases} \tag{2}$$

де K_n — дійсні числа; $P(x, \theta)$ — перша поділена різниця [3] оператора $P(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

При $K_n = \text{const} = 1$ алгоритм (2) збігається з запропонованим в [1] і має порядок збіжності $\rho = 1 + \sqrt{2}$.

У цій статті ми використовуємо методику роботи [2], де аналогічну модифікацію методу Ньютона розглянуто для систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь.

В особливому випадку алгоритм (2) дає змогу наблизитись до розв'язку x^* рівняння (1) із наперед заданою точністю.

Надалі $P(x, y, z)$ означає другу поділену різницю [3] оператора $P(x)$; x_0 — початкове наближення до розв'язку;

$$A_0 = \frac{\alpha+1}{\|P(x_0)\|} \| P(x_1, x_0, \tilde{x}_0) \| \, \| \Gamma_0 P(x_0) \|^2,$$

$$A_n = \frac{1}{\|P(x_n)\|} \| P(x_{n+1}, \theta_n, x_n) \Gamma_n P(x_n) \Gamma_{n-1} [P(x_n, \theta_n) - \\ - P(x_{n-1}, \theta_{n-1})] \Gamma_n P(x_n) \|,$$

де $\Gamma_n = [P(x_n, \theta_n)]^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$; $0 < \alpha = \mathrm{const}$.

Теорема. *Нехай в області* $\Omega = \{x : \|P(x)\| \leqslant \|P(x_0)\|\}$ *оператори* $\Gamma(x, \theta) = [P(x, \theta)]^{-1}$ *і* $P(x, y, z)$ існують *і рівномірно обмежені, а вектор* $\tilde{x}_0$ *вибраний так, що*

$$\|x_0 - \tilde{x}_0\| \leqslant \alpha \|x_1 - x_0\|.$$

Тоді при достатньо великих K_n, *причому* $K_n \geqslant \beta A_n$ $(1 < \beta = \mathrm{const})$, $K_n \geqslant 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *ітераційний процес (2) збігається і граничний елемент*

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$$

є одним із розв'язків рівняння (1).

Доведення. Використовуючи умови теореми і аналог інтерполяційної формули Ньютона для операторів [3], одержуємо

$$\|P(x_1)\| - \frac{K_0 - 1}{K_0} \|P(x_0)\| \leqslant \| P(x_1) - P(x_0) - \\ - P(x_0, \tilde{x}_0)(x_1 - x_0) \| = \| P(x_1, x_0, \tilde{x}_0)(x_1 - \tilde{x}_0)(x_1 - x_0) \| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{K_0^2} A_0 \| P(x_0) \|. \quad (3)$$

Аналогічно при $n \geqslant 1$

$$\| P(x_{n+1}) \| - \frac{K_n - 1}{K_n} \| P(x_n) \| \leqslant \frac{1}{K_n^2} A_n \| P(x_n) \|. \quad (4)$$

Тому що оператор $P(x)$ неперервний в Ω, а $\Gamma(x, \theta)$ обмежений, то із (2) випливає, що можна підібрати на кожному кроці настільки великі $K_n \geqslant 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, що x_{n+1}, θ_n будуть належати області Ω. Тоді, використовуючи умови теореми, легко показати, що

$$0 < A_n \leqslant h = \max\{4M^2B^4 \|P(x_0)\|^2, (\alpha+1) M B^2 \|P(x_0)\|\},$$

де $\|\Gamma(x, \theta)\| \leqslant B$, $\|P(x, y, z)\| \leqslant M$ в Ω, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Із обмеженості послідовності $\{A_n\}$ в Ω випливає, що ми зможемо вибрати $K_n \geqslant \beta A_n$ $(\beta > 1)$, $K_n \geqslant 1$ і з (3) та (4) маємо

$$\frac{\|P(x_{n+1})\|}{\|P(x_n)\|} \leqslant \frac{K_n - 1}{K_n} + \frac{A_n}{K_n^2} = q_n < 1 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Отже, послідовність $\{\|P(x_n)\|\}$ є монотонно спадною

$$\|P(x_0)\| > \|P(x_1)\| > \ldots > \|P(x_n)\| > \ldots . \tag{5}$$

Далі, як і в [2], можна показати, що

$$\lim_{n\to\infty} \|P(x_n)\| = 0. \tag{6}$$

Отже, $P(x^*) = 0$, тобто x^* — розв'язок (1).

Дійсно, послідовність $\{q_n\}$ має максимальний елемент $\bar{q} < 1$ [2]. Вибираючи $K_n \geqslant \beta A_n$ при $A_n > \bar{q}$, або $K_n = 1$, коли при деяких n буде $A_n \leqslant \bar{q}$, одержуємо $q_n \leqslant \bar{q} < 1$. Отже, $\|P(x_n)\| \leqslant \leqslant \bar{q}^n \|P(x_0)\|$, $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, звідки і випливає (6).

В особливому випадку [2] визначимо вкладену в Ω «малу» область ω, що містить x^* і задовольняє нерівність

$$\|P(x)\| - \|P(x^*)\| \leqslant \varepsilon, \quad x \in \omega,$$

де ε — мала додатна величина. Тоді для всіх $x \in \Omega \setminus \omega$ можна вказати величину $0 < h < +\infty$ таку, що для всіх n $A_n \leqslant h$, а отже, і підібрати відповідні K_n, так що $\lim\limits_{n\to\infty} \|P(x_n)\| \leqslant \varepsilon$. При практичній реалізації процесу (2) на ЕОМ коефіцієнти $K_n \geqslant 1$ підбираються із умови (5).

ЛІТЕРАТУРА

1. Бартіш М. Я., Щербина Ю. М. Про один різницевий метод розв'язування нелінійних операторних рівнянь. — ДАН УРСР, серія А, 1972, № 7.
2. Матвеев В. А. Метод приближенного решения систем нелинейных уравнений. — «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1964, т. 4, № 6.
3. Сергеев А. С. О методе хорд. — «Сибирский математический журнал», 1961, т. 2, № 2.