УДК 539.3

Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ, В. Г. ГАБРУСЄВ

ОСЕСИМЕТРИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНОГО ШАРУ

Багато задач математичної фізики, зокрема задач теорії пружності та термопружності при змішаних граничних умовах, зводяться до парних інтегральних рівнянь, аналітичний розв'язок яких не завжди буває ефективним або найбільш доцільним. Тому актуальним питанням є побудова простих аналітико-числових способів розв'язування таких задач, зокрема дуальних інтегральних рівнянь або їх систем.

У цій роботі запропоновано наближену методику знаходження числового розв'язку парного інтегрального рівняння

$$\begin{gathered}\int_0^\infty \varphi(\eta)\frac{R_1(\eta)}{Q_1(\eta)}J_0(\rho\eta)\,d\eta = f_1(\rho),\ 0\leqslant\rho<1,\\ \int_0^\infty \varphi(\eta)\frac{R_2(\eta)}{Q_2(\eta)}J_0(\rho\eta)\,d\eta = f_2(\rho),\ 1\leqslant\rho<\infty,\end{gathered} \tag{1}$$

(де $\varphi(\eta)$ — шукана функція; $J_0(\rho\eta)$ — функція Бесселя 1-го роду; всі інші функції задані), до якого зводиться дослідження осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск нагрітого штампа на трансверсально ізотропний шар.

Користуючись властивостями функції Хевісайда та ввівши невідому $X(\rho)$, друге рівняння (1) можна зобразити у вигляді

$$\int_0^\infty \varphi(\eta)\frac{R_2(\eta)}{Q_2(\eta)}J_0(\rho\eta)\,d\eta = f_2(\rho)\,u(\rho-1)+X(\rho)\,u(1-\rho),\ 0\leqslant\rho<\infty, \tag{2}$$

де $u(x)$ — функція Хевісайда.

Застосовуючи до співвідношення (2) формулу обернення інтегрального перетворення Ханкеля [2], одержуємо

$$\varphi(\eta)=\eta\frac{Q_2(\eta)}{R_2(\eta)}\left[\int_1^\infty \rho f_2(\rho)J_0(\rho\eta)\,d\rho+\int_0^1 \rho X(\rho)J_0(\rho\eta)\,d\rho\right]. \tag{3}$$

Вважаючи, що $X(\rho)$ задовольняє умови Діріхле на інтервалі $0 \leqslant \rho < 1$, шукатимемо її у вигляді

$$X(\rho) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n J_0(\rho\lambda_n), \tag{4}$$

де $a_0 = f_2(1)$, $J_0(\lambda_n) = 0$; a_n — невідомі коефіцієнти.

Взявши до уваги співвідношення (4), після обчислення інтегралів, що входять до рівності (3), знайдемо функцію $\varphi(\eta)$, підставивши яку в перше рівняння (1), одержуємо умову для визначення невідомих коефіцієнтів a_n $(n=1, 2, \ldots, N)$.

Розбиваючи інтервал $0 \leqslant \rho < 1$ рівномірно N точками і вимагаючи виконання отриманої умови в цих точках, маємо систему N алгебраїчних рівнянь для визначення N невідомих a_n. Вибираємо N таким, щоб величина похибки при виконанні граничних умов не перевищувала заданої.

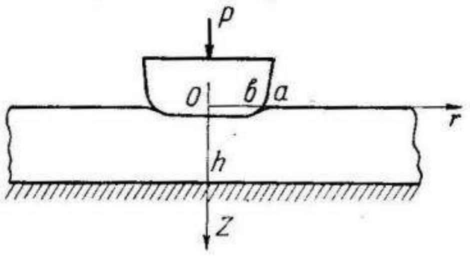

Рис. 1.

Наведемо результати розв'язання осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск жорсткого гладкого нагрітого штампа на трансверсально ізотропний шар скінченної товщини h, що лежить на гладкій неподатливій основі (рис 1).

Граничні умови задачі мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial z} = k_1 (T - T_0^{(1)}), \quad z=0, \quad 0 \leq r < a, \\
&\frac{\partial T}{\partial z} = k_2 (T - T_0^{(2)}), \quad z=0, \quad a \leqslant r < \infty, \\
&\frac{\partial T}{\partial z} = -k_3 T, \qquad z=h, \quad 0 \leq r < \infty,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&w(r, z) = w(r), \quad z=0, \quad 0 \leqslant r < a, \\
&\sigma_{zz}(r, z) = 0, \quad z=0, \quad a \leqslant r < \infty, \\
&\sigma_{rz}(r, z) = 0, \quad z=0, \quad 0 \leqslant r < \infty, \\
&\sigma_{rz}(r, z) = 0, \quad z=h, \quad 0 \leqslant r < \infty, \\
&w(r, z) = 0, \quad z=h, \quad 0 \leqslant r < \infty,
\end{aligned} \tag{6}$$

де k_3 — набуває значення 0 або ∞; k_1 — величина обернена термоопору; a — заздалегідь невідомий радіус площадки контакту; $w(r)$ — функція, що визначається геометрією штампа.

У задачі необхідно визначити величину площадки контакту і характер розподілу на ній тиску. При розв'язанні поставленої задачі використовуємо залежності термопружності для трансверсального ізотропного тіла, що наводяться в роботі [1].

Матеріал трансверсального ізотропного шару характеризується такими значеннями параметрів: $\mu_1 = 1{,}388$; $\mu_3 = 0{,}705$; $\mu_5 = 1{,}0$. Рівняння основи штампа визначається функцією

$$z = \frac{(r-b)^2}{R} u(r-b).$$

Вважаємо, що $T_0^{(2)} = 0$, $k_3 = 0$, $\gamma = \frac{h}{a} = 1$, $T_0^{(1)} = T_0$.

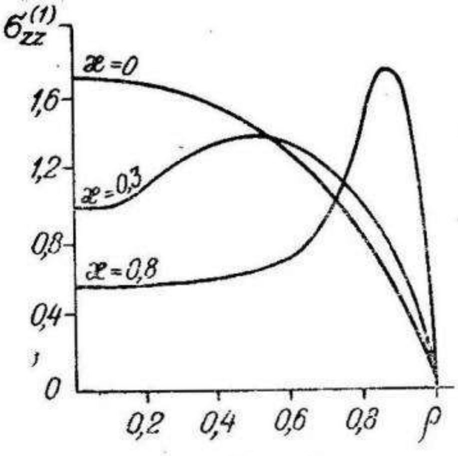

Рис. 2.

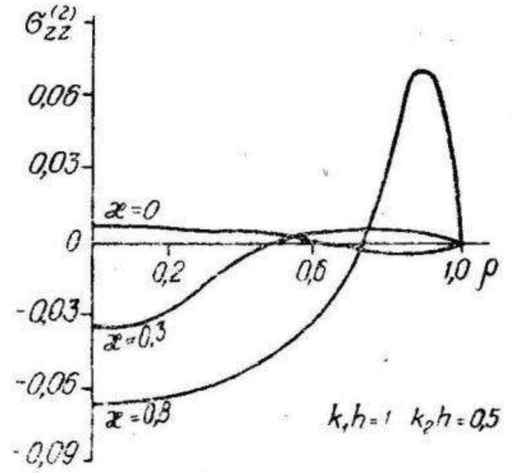

Рис. 3.

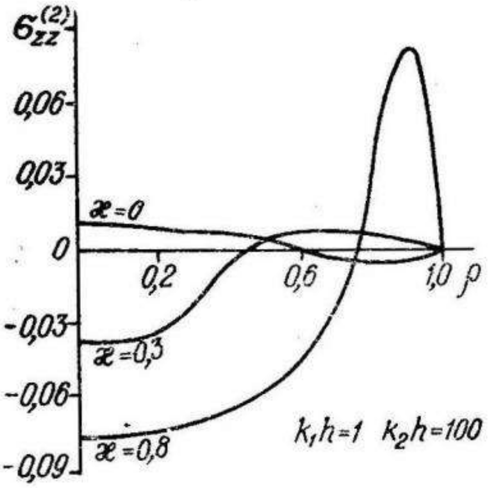

Рис. 4.

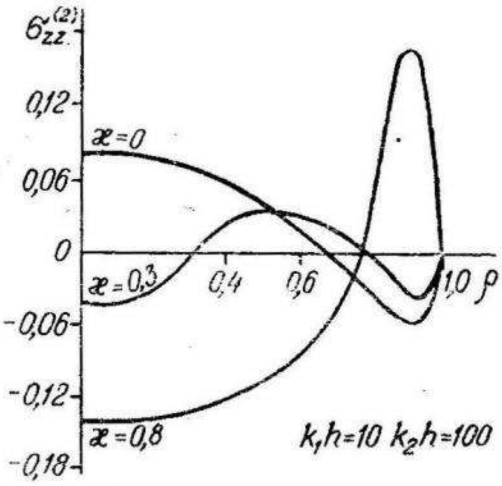

Рис. 5.

На рис. 2 зображено розподіл силової складової контактних напружень $\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(p)} \Big/ \frac{P}{\pi a^2}$, а на рис. 3—5 — розподіл температурної складової $\sigma_{zz}^{(2)} = \sigma_{zz}^{(T)}/\rho T_0$, тут використані позначення $\rho = \frac{r}{a}$, $\varkappa = b/a$.

Радіус площадки визначається з умови рівноваги штампа.

ЛІТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М., Изд-во АН СССР, 1962.
2. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., ИЛ, 1955.

УДК 539.385

О. П. ПІДДУБНЯК, Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ

СУМІСНЕ КРУЧЕННЯ КРУГЛОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА ТА ПІВПРОСТОРУ ПРИ НЕПОВНОМУ КОНТАКТІ

Осесиметрична задача про сумісне кручення суцільного циліндра і півпростору розв'язана в роботах [3, 5]. Випадок частинно прикріпленого суцільного циліндра з півпростором, що відповідає наявності зовнішньої щілини в зоні спаю двох пружних тіл, вивчався в роботі [7].

У цій статті ми наводимо наближений розв'язок задачі про кручення пружної системи «порожнистий циліндр—півпростір», послабленої в зоні спаю внутрішньою та зовнішньою щілинами.

1. Нехай пружний півпростір $z\leqslant 0$ скручується пружним циліндром радіусів R_1, $R_2 (R_1>R_2)$ довжини h. Циліндр навантажений на бічних поверхнях, а на верхньому торці $z=h$, $R_1\geqslant r\geqslant R_2$ задано або переміщення (задача I), або напруження (задача II). Вважається, що циліндр спаяний з півпростором по кільцю $z=0$, $a\leqslant r\leqslant b\,(R_1>b>a>R_2)$, а поверхні півпростору та нижнього торця циліндра поза областю спаю вільні від навантаження. Півпростір і циліндр заповнені різними ізотропними матеріалами.

Задача полягає у розв'язанні диференціального рівняння кручення [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \tag{1.1}$$

де

$$u=u_1(r, z),\ z<0,\ u=u_2(r, z),\ z>0 \tag{1.2}$$

при таких граничних умовах:

$$u_1\to 0,\ \sqrt{r^2+z^2}\to\infty, \tag{1.3}$$

$$\tau_{\theta z}^{(i)}=0,\ i=1,\ 2;\ r<a,\ r>b,\ z=0, \tag{1.4}$$

$$u_1=u_2,\ \tau_{\theta z}^{(1)}=\tau_{\theta z}^{(2)},\ a<r<b,\ z=0, \tag{1.5}$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)}(R_i,\ z)=G_2 f_i(z/R_1),\ 0<z<h,\ i=1,\ 2, \tag{1.6}$$

$$u_2=bU(r/R_1),\ R_1\geqslant r\geqslant R_2,\ z=h,\ (\text{задача I}), \tag{1.7}$$