

ЛІТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М., Изд-во АН СССР, 1962.
2. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., ИЛ, 1955.

УДК 539.385

О. П. ПІДДУБНЯК, Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ

СУМІСНЕ КРУЧЕННЯ КРУГЛОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА ТА ПІВПРОСТОРУ ПРИ НЕПОВНОМУ КОНТАКТІ

Осесиметрична задача про сумісне кручення суцільного циліндра і півпростору розв'язана в роботах [3, 5]. Випадок частинно прикріпленого суцільного циліндра з півпростором, що відповідає наявності зовнішньої щілини в зоні спаю двох пружних тіл, вивчався в роботі [7].

У цій статті ми наводимо наближений розв'язок задачі про кручення пружної системи «порожнистий циліндр—півпростір», послабленої в зоні спаю внутрішньою та зовнішньою щілинами.

1. Нехай пружний півпростір $z \leq 0$ скручується пружним циліндром радіусів $R_1, R_2 (R_1 > R_2)$ довжини h . Циліндр навантажений на бічних поверхнях, а на верхньому торці $z = h, R_1 \geq r \geq R_2$ задано або переміщення (задача I), або напруження (задача II). Вважається, що циліндр спаяний з півпростором по кільцю $z = 0, a \leq r \leq b (R_1 > b > a > R_2)$, а поверхні півпростору та нижнього торця циліндра поза областю спаю вільні від навантаження. Півпростір і циліндр заповнені різними ізотропними матеріалами.

Задача полягає у розв'язанні диференціального рівняння кручення [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (1.1)$$

де

$$u = u_1(r, z), \quad z < 0, \quad u = u_2(r, z), \quad z > 0 \quad (1.2)$$

при таких граничних умовах:

$$u_1 \rightarrow 0, \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty, \quad (1.3)$$

$$\tau_{\theta z}^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2; \quad r < a, \quad r > b, \quad z = 0, \quad (1.4)$$

$$u_1 = u_2, \quad \tau_{\theta z}^{(1)} = \tau_{\theta z}^{(2)}, \quad a < r < b, \quad z = 0, \quad (1.5)$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)}(R_i, z) = G_i f_i(z/R_i), \quad 0 < z < h, \quad i = 1, 2, \quad (1.6)$$

$$u_2 = b U(r/R_1), \quad R_1 \geq r \geq R_2, \quad z = h, \quad (\text{задача I}), \quad (1.7)$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)} = G_2 T(r/R_1), \quad R_1 \geq r \geq R_2, \quad z = h, \quad (\text{задача II}). \quad (1.8)$$

Тут u_i — тангенціальні зміщення; $\tau_{\theta z}^{(i)}, \tau_{r\theta}^{(i)}$ — дотичні напруження

$$\tau_{\theta z}^{(i)} = G_i \frac{\partial u_i}{\partial z}, \quad \tau_{r\theta}^{(i)} = G_i r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_i}{r} \right) \quad (G_i — модуль зсуву). \quad (1.9)$$

2. Використавши метод частинних розв'язків [2, 4], загальний розв'язок рівняння (1.1) одержимо у вигляді

$$u_1 = b \int_0^\infty \eta^{-1} e^{\eta \zeta} J_1(\eta x) \Phi(\eta) d\eta, \quad \zeta < 0, \quad (2.1)$$

$$u_2 = b \left\{ A_0 \rho \zeta + B_0 \rho + \sum_{k=1}^\infty [A_k I_1(\lambda_k \rho) + B_k K_1(\lambda_k \rho)] \sin \lambda_k (H - \zeta) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^\infty (C_k \operatorname{ch} \mu_k \zeta + D_k \operatorname{sh} \mu_k \zeta) W_1(\lambda_k \rho) \right\}, \quad 0 < \zeta < H, \quad (2.2)$$

де λ_k — додатні корені функції $W_2(\lambda_k \varepsilon_0)$,

$$W_n(\lambda_k \rho) = J_n(\lambda_k \rho)/J_2(\lambda_k) - N_n(\lambda_k \rho)/N_2(\lambda_k), \quad (2.3)$$

$J_n(x), N_n(x), I_n(x), K_n(x)$ — циліндричні функції,

$$\zeta = z/b, \quad \rho = r/R_1, \quad x = r/b, \quad H = h/b, \quad \chi_k = k\pi/H, \\ \varepsilon_0 = R_2/R_1, \quad \varepsilon_1 = b/R_1, \quad \varepsilon = a/b, \quad k = 1, \infty. \quad (2.4)$$

Розклавши функції $f_i(\zeta)$ ($i=1, 2$) в ряди Фур'є, а функції $U(\rho)$ і $T(\rho)$ в ряди Діні і, задовольнивши граничні умови (1.6) — (1.8), знайдемо сталі інтегрування $A_0, B_0, A_k, B_k, C_k, D_k$ ($k=1, \infty$), а отже, і формули для напружень і переміщень у циліндрі. Задовольнивши решту граничних умов (1.4), (1.5), одержимо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_\varepsilon^1 \xi \tau(\xi) d\xi \int_0^\infty J_1(\eta \xi) J_1(\eta x) d\eta = F(x), \quad \varepsilon < x < 1, \quad (2.5)$$

$$F(x) = F_0 x + \sum_{k=1}^\infty F_k W_1(\mu_k x), \quad \mu_k = \lambda_k \varepsilon_1 \quad (2.6)$$

відносно безрозмірного контактного напруження $\tau(x)$, пов'язаного з функцією $\Phi(\eta)$ за формулою

$$\tau(x) = \begin{cases} \int_0^\infty \Phi(\eta) J_1(\eta x) d\eta, & \varepsilon < x < 1, \\ 0, & 0 < x < \varepsilon, \quad 1 < x < \infty. \end{cases} \quad (2.7)$$

У розкладі (2.6) $F_m = \Omega_m - N_m$ ($m = \overline{0, \infty}$), де сталі Ω_m певним чином виражаються через $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ і, крім того, для задачі I через $U(\rho)$, а для задачі II через $T(\rho)$. Сталі N_m залежать від контактного напруження $\tau(x)$

$$N_0 = \frac{4 H \varepsilon_1^3}{\delta(1 - \varepsilon_0^4)} \int_{\varepsilon}^1 x^2 \tau(x) dx, \quad N_k = \kappa_k \int_{\varepsilon}^1 x \tau(x) W_1(\mu_k x) dx, \quad (2.8)$$

причому

$$\kappa_k = \varepsilon_1^2 L_2(\mu_k H) / (\mu_k \delta \omega_k), \quad L_2(\mu_k H) = \begin{cases} \text{th } \mu_k H & \text{для задачі I,} \\ \text{cth } \mu_k H & \text{для задачі II,} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\omega_k = \frac{1}{2} [W_1^2(\lambda_k) - \varepsilon_0^2 W_1^2(\lambda_k \varepsilon_0)], \quad k = \overline{1, \infty}; \quad \delta = G_2/G_1.$$

Після визначення напруження $\tau(x)$ і сталих N_m ($m = \overline{0, \infty}$) задача буде повністю розв'язана.

3. Інтегральне рівняння (2.5) розв'язували наближеними методами при малих параметрах ε (коли й ε_0 мале) і при ε , близьких до одиниці [1]. Встановлено, що при $0,5 \leq \varepsilon \leq 0,8$ методи перекриваються. Підставивши вирази для напруження $\tau(x)$ в формули (2.8), одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь безмежного порядку відносно N_m ($m = \overline{0, \infty}$), квазіцілкомрегулярність якої доводиться. Згідно з теоремою обернення інтегрального перетворення Хаґкеля [4] із (2.7) одержуємо

$$\varphi(\eta) = \eta \int_{\varepsilon}^1 x \tau(x) J_1(\eta x) dx, \quad 0 < \eta < \infty. \quad (3.1)$$

Тоді за формулами (1.9), (2.1), (2.2) можна знайти напруження та переміщення у півпросторі та циліндрі.

При розрахунку на міцність пружних тіл, чи системи пружних тіл, послаблених щілинами (тріщинами), важливу роль відіграє коефіцієнт інтенсивності напружень на краю щілини. Зокрема, у цій задачі коефіцієнти інтенсивності контактних напружень $\tau(x)$ визначаються за формулами [6]

$$K_{III}^{(i)} = \lim_{S_i \rightarrow 0} \{ \sqrt{2 \pi S_i} \tau(x) \}, \quad i = 1, 2; \quad S_1 = 1 - x, \quad S_2 = x - \varepsilon. \quad (3.2)$$

Обчислення показали, що для $0 \leq \varepsilon \leq 0,8$ (з точністю до $O[\varepsilon^p (\mu_k \varepsilon)^{-q}]$, $P+q < 5$)

$$K_{III}^{(1)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left\{ F_0 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k F_k \left[w_0(\mu_k) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^3 \sum_{m=1}^n \frac{(-1)^{m+1} (2n)!!}{(2n+1)(2n-2m)!!} \times \varepsilon^{2n+2-m} w_{m+1}(\mu_k \varepsilon) / (\mu_k \varepsilon)^m \right] \right\}, \quad (3.3)$$

$$K_{III}^{(2)} = \frac{4\varepsilon}{V\pi} \left[F_0 \varepsilon_1 (0,8479 + 0,2667 \varepsilon^2) + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k F_k w_1(\mu_k \varepsilon) \right], \quad (3.4)$$

а для $0,5 \leq \varepsilon < 1$ (з точністю до $O(\lambda^{-3})$, $\lambda = 2/\ln \frac{1}{\varepsilon}$).

$$K_{III}^{(i)} = \frac{V\pi\lambda}{\varepsilon} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^2 (-1)^{n(i+1)} F_m \eta_{nm}, \quad i = 1, 2. \quad (3.5)$$

У наведених формулах

$$w_1(\mu_k x) = \sqrt{\frac{2}{\pi \mu_k x}} W_{\nu + \frac{1}{2}}(\mu_k x), \quad \eta_{00} = \varepsilon^{3/4} / (\ln 2\lambda + 0,0793) \varepsilon_1,$$

$$\eta_{10} = 1,5 \varepsilon^{3/4} \varepsilon_1 \lambda^{-1}, \quad \eta_{20} = 0,9375 \varepsilon^{3/4} \varepsilon_1 \lambda^{-2}, \quad \eta_{0k} = \frac{S_0 - \frac{1}{2} \lambda^{-1} S_1}{\ln 2\lambda + 0,0793},$$

$$\eta_{1k} = \frac{1}{2} S_1 \lambda^{-1} - \frac{1}{4} S_2 \lambda^{-2}, \quad \eta_{2k} = \left(\frac{1}{4} S_2 - 0,375 S_0 \right) \lambda^{-2}, \quad (3.6)$$

$$S_0 = W_1(\mu_k), \quad S_1 = 2\mu_k W_0(\mu_k) - W_1(\mu_k),$$

$$S_2 = -4\mu_k W_0(\mu_k) + (4\mu_k^2 - 1) W_1(\mu_k), \quad k = \overline{1, \infty}.$$

4. Як приклад розглянемо задачу I, коли $f_1(\zeta) = f_2(\zeta) = 0$, $U(\rho) = \alpha\rho$ (α — кут повороту верхнього торця циліндра як жорсткого цілого під впливом моменту кручення M). Тоді $F_0 = \alpha$ — N_0 , $F_k = 0$ ($k = \overline{1, \infty}$). Проведені на ЕОМ обчислення показу-

Таблиця 1
Значення жорсткості на кручення C
при $0 \leq \varepsilon \leq 0,7$

II	ε	δ		
		1	2	4
0,5	0	1,92	1,40	0,913
1		1,19	0,967	0,707
4		0,353	0,339	0,300
0,5	0,3	1,92	1,32	0,911
1		1,19	0,926	0,706
4		0,364	0,334	0,300
0,5	0,5	1,88	1,38	0,909
1		1,17	0,963	0,931
4		0,362	0,339	0,300
0,5	0,7	1,87	1,36	0,890
1		1,17	0,951	0,693
4		0,362	0,337	0,298

Таблиця 2
Значення жорсткості на кручення C
при $0,5 \leq \varepsilon \leq 0,95$

II	ε	δ		
		1	2	4
0,5	0,5	1,18	1,37	1,05
1		0,855	0,956	0,790
4		0,324	0,338	0,315
0,5	0,7	1,38	1,30	0,955
1		0,959	0,923	0,732
4		0,338	0,334	0,305
0,5	0,9	1,42	1,18	0,810
1		0,981	0,858	0,644
4		0,341	0,325	0,288
0,5	0,95	1,40	1,10	0,737
1		0,969	0,818	0,597
4		0,340	0,319	0,279

ли, що при даних граничних умовах безрозмірна жорсткість пружної системи на кручення

$$C = M/(\alpha R_1^3 G_2) = \pi D_0 (1 - \epsilon_0^4)/(2H), \quad D_0 = N_0/\alpha \quad (4.1)$$

зростає зі зменшенням параметрів ϵ_0, H, δ , але мало змінюється при зміні параметрів ϵ_1 і ϵ . Зокрема, табл. 1, 2 для C при $\epsilon_0=0$,

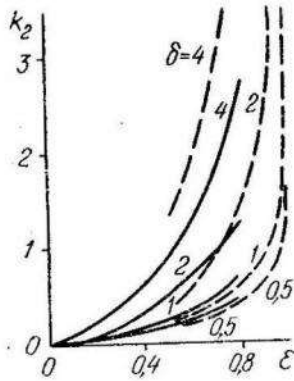


Рис. 1.

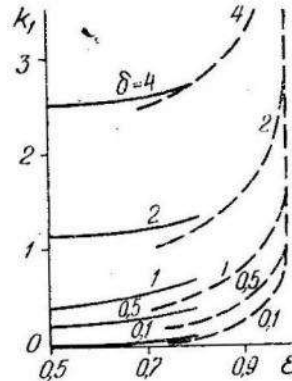


Рис. 2.

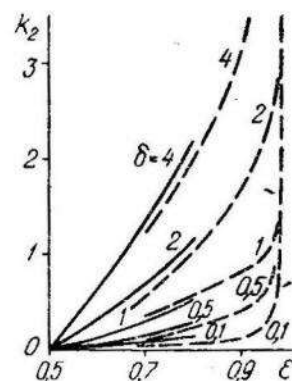


Рис. 3.

$\epsilon_1=1$ (випадок внутрішньої щілини), одержані методами малого та великого параметрів ϵ , свідчать, що результати перекриваються при $0,5 \leq \epsilon \leq 0,8$. Безрозмірні коефіцієнти інтенсивності контактних напружень $k_i = \pi R_1^3 G_2 K_{III}^{(i)} / (2M)$ ($i=1, 2$) майже не залежать від H ($H > 0,5$), але істотно залежать від всіх решти параметрів. На рис. 1 показані графіки залежності k_2 від параметрів ϵ і δ при $\epsilon_1=1, \epsilon_0=0, H=1$, одержані методами малих ϵ (суцільні криві) і великих ϵ (пунктирні криві). Аналогічні графіки зображені на рис. 2 і 3 для k_1 і k_2 при $\epsilon_0=0,5, \epsilon_1=0,99$ і $H=4$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство. — «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1967, № 4.
2. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
3. Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М. Совместное кручение стержня и полупространства. — «Прикладная механика», 1967, т. 3, вып. 2.
4. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., ИЛ, 1955.
5. Фримэн, Кир. Кручение цилиндрического стержня, прикрепленного к упругому полупространству. — «Прикладная механика», серия Е, 1967, т. 34, № 3.
6. Irwin G. R. Fracture. Handbuch der Physik, Bd. 6, Springer-Verlag, Berlin, 1958.
7. Keer L. M., Freeman N. J. Torsion of a finite elastic cylindrical rod partially bonded to an elastic half-space. — «Quart. Appl. Math.», 1969, vol. 26, № 4.