УДК 539.311

Г. Т. СУЛИМ

РЕГУЛЯРНІСТЬ ДЕЯКИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ*

У роботі [2] задачу про пружну рівновагу кусково-однорідної площини з тонкостінним пружним включенням скінченної довжини на лінії розділу матеріалів зведено до системи трьох інтегро-диференціальних рівнянь. Для випадку симетричного навантаження однорідної площини з включенням одержана безмежна система лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу шуканої функції у ряд за поліномами Чебишова, яка розв'язується методом редукції. Ця ж задача у менш загальній постановці розв'язана аналогічним методом у [4].

У цій статті обгрунтовується застосування методу редукції шляхом дослідження регулярності систем лінійних алгебраїчних рівнянь задачі [2, 4], одержаних для довільного силового навантаження.

Запишемо системи рівнянь відносно A_j^i

$$\frac{\pi}{2} A^0_{2p+1+k} + \sum_{l=0}^{\infty} a^k_{pl} A^0_{2l+1+k} = \Phi_{2p+k}, \qquad (1.к)$$

$$(k = 0{,}1;\ p = 0{,}1,\ \ldots),$$

$$\frac{\pi}{2} A^1_{2p+1+k} + \lambda \sum_{l=0}^{\infty} B_{2l+k,\,2p+k} A^1_{2l+1+k} \Phi^1_{2p+k}, \qquad (2.к)$$

де

$$a^k_{pl} = r_1 B_{2l+k,\,2p+k} + r_2 \sum_{n=0}^{\infty} b^k_{lnp},\ b^k_{lnp} = B_{2l+k,\,2n+k} B_{2n+k,\,2p+k}$$

і співвідношення

$$A^2_{2p+1+k} = \frac{2}{\pi n_1}\left[\Phi^2_{2p+k} - \frac{\pi}{2} A^0_{2p+1+k} - n' \sum_{l=0}^{\infty} B_{2l+k,\,2p+k} A^0_{2l+1+k}\right]$$

$$(k = 0{,}1;\ p = 0{,}1,\ \ldots). \qquad (3.к)$$

1. Неважко показати, що при довільному силовому навантаженні однорідної площини з включенням для визначення коефіцієнтів розкладу (21) з [2] маємо системи рівнянь (1.к), (2.к), а також співвідношення (3.к) ($k=0$, 1), де позначено

$$B_{l-1,\,p} = \frac{1}{l^2 - p^2} - \frac{1}{l^2 - (p+2)^2},\ \lambda = -a_3'$$

* Робота виконана під керівництвом проф. Д. В. Гриліцького.

$$\Phi_j^0 = g_j^0 - n'\delta_j A_0^0,\ \Phi_j^1 = g_j^1 + a_3'\delta_j A_0^1,\ \Phi_j^2 = g_j^2 + (b_3' A_0^0 + b_4' A_0^2)\,\delta_j, \tag{4}$$

$$g_j^i = \int_{-1}^{1} G_c(x)\,U_j(x)\sqrt{1-x^2}\,dx,\quad \delta_j = \begin{cases} 0 & j - \text{парне}, \\ B_{-1,\,j} & j - \text{непарне}, \end{cases}$$

$$G_i(x) = F_0(x) + \frac{n'}{2a}A^0,\ G_1(x) = F_1(x) - \frac{a_3'}{2a}A_1,$$

$$G_2(x) = F_2(x) - \frac{1}{2a}(b_3' A^0 + b_4' A^2);$$

A_0^i визначається з умов (14) [2],

$$A_0^i = \frac{1}{\pi}A^i,\quad A^i = \int_{-a}^{a} f_i(x)\,dx. \tag{5}$$

Решта позначень такі ж як і в [2]. Зауважимо тільки, що для всіх можливих значень параметрів задачі

$$r_1,\ r_2,\ \lambda > 0. \tag{6}$$

Системи рівнянь (1.κ), (2.κ) розділяються на дві незалежні (1.0), (2.0) для симетричного навантаження і (1.1), (2.1) для несиметричного.

2. Дослідимо систему рівнянь (1.κ). Для цього розглянемо вирази

$$S_p^k = \sum_{l=0}^{\infty} \left| B_{2l+k,\,2p+k} \right|,\quad M_p^k = \sum_{l=0}^{\infty} \left| \sum_{n=0}^{\infty} b_{lnp}^k \right|. \tag{7}$$

Можна показати [1], що

$$S_p^0 = \begin{cases} \dfrac{8}{3} - \dfrac{\pi^2}{8}\,(p=0), \\ \dfrac{8\,(2p+1)}{(4p+1)\,(4p+3)}\,(p = 1,\ 2,\ \ldots), \end{cases} \tag{8}$$

$$S_p^1 = \frac{16\,(p+1)}{(4p+3)\,(4p+5)} - \frac{4\,(p+1)}{(2p+1)^2\,(2p+3)^2}\,(p=0,\ 1,\ \ldots), \tag{9}$$

$$S_p^k \leqslant S_0^k,\ M_p^k \leqslant S_0^k S_p^k \leqslant (S_0^k)^2\ \ (k=0,\ 1;\ p=0,\ 1,\ \ldots). \tag{10}$$

Відзначимо, що співвідношення (9) наведено також у роботі [3].

Рівняння (1.κ) перепишемо в іншому вигляді

$$b_p^k A_{2p+1+k}^0 + {\sum_{l=0}^{\infty}}' a_{pl}^k A_{2l+1+k}^0 = \Phi_{2p+k}\ (k=0,\ 1;\ p=0,\ 1,\ \ldots), \tag{11}$$

де

$$b_p^k = \frac{\pi}{2} + r_1 a_p^k + r_2 \sum_{n=0}^{\infty} b_{pnp}^k, \quad a_p^k = B_{2p+k,2p+k}; \tag{12}$$

штрих означає, що в сумі відсутній член $l=p$. Оскільки a_p^k, b_{pnp}^k, r_1, $r_2>0$, то умова регулярності системи (12) набере вигляду

$$D_p^k = \frac{\sum_{l=0}^{\infty}{}' |a_{pl}^k|}{b_p^k} < 2\frac{r_1(S_p^k - a_p^k) + r_2 M_p^k}{\pi + 2r_1 a_p^k} < 1 \quad (k=0,\ 1;\ p=0,\ 1,\ \ldots). \tag{13}$$

Звідки використавши (8)—(10) маємо умови

$$r_1 > \frac{4}{\pi^2}[2r_2(S_0^0)^2 - \pi] \quad (p=0);$$

$$r_2 < \frac{\pi}{2S_0^0 S_p^0} (p=1,\ 2,\ldots) \text{ для } k=0, \tag{14}$$

$$r_2 S_0^1 S_p^1 < \frac{\pi}{2} + r_1 \frac{4(p+1)}{(2p+1)^2(2p+3)^2}, \quad (p=0,\ 1,\ \ldots) \text{ для } k=1. \tag{15}$$

Для невід'ємних r_1 умови (14) та (15) виконуються, коли

$$r_2 < \frac{\pi}{2(S_0^k)^2} \quad (k=0,\ 1). \tag{16}$$

Отже, за умови (16) система (1.к) буде регулярною для довільних $r_1 \geqslant 0$.

Коли r_1, r_2 обмежені, то $\lim\limits_{p\to\infty} D_p^k = 0$ $(k=0, 1)$ і система (1.к) є принаймні квазірегулярною.

Окремо розглянемо випадок, коли $r_1=\infty$. Це можливе, якщо включення: а) нерозтягливе; б) абсолютно податливе. Тоді система рівнянь (1.к) вироджується у

$$\sum_{l=0}^{\infty} B_{2l+k,\,2p+k} A_{2l+1+k}^0 = \delta \sum_{l=0}^{\infty} B_{2l+k,\,2p+k} \Phi_{2l+k}^0 \quad (p=0,\ 1,\ \ldots) \tag{17}$$

і має розв'язок

$$A_{2l+1+k}^0 = \delta \Phi_{2l+k}^0 \quad (k=0,\ 1;\ l=0,\ 1,\ \ldots);$$

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \text{ для випадку а;} \\ 0 \text{ для випадку в.} \end{cases} \tag{18}$$

3. Розглянемо рівняння (2.κ). Враховуючи, що $\lambda \geqslant 0$, умова регулярності для нього матиме вигляд

$$2\lambda (S_p^k - a_p^k)(\pi + 2\lambda a_p^k)^{-1} < 1 \quad (k = 0,\ 1;\ p = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{19}$$

звідки одержимо

$$\begin{cases} \lambda > -\dfrac{4}{\pi}\ (p=0) \\ -\infty < \lambda < \infty\ \ (p = 1,\ 2,\ \ldots) \end{cases} \quad \text{для} \ \ k = 0;$$

$$\lambda \frac{4p+1}{(2p+1)^2\,(2p+3)^2} > -\frac{\pi}{2} \ \ (p = 0,\ 1,\ \ldots) \ \text{для} \ k = 1. \tag{20}$$

Нерівності (20) виконуються для довільного $0 \leqslant \lambda < \infty$. Це твердження суттєво узагальнює результати робіт [3, 5], де задача для півплощини з пружною накладкою зводиться до системи рівнянь, аналогічної системі (2.κ). Одержані в [3, 5] області регулярності не виходять за межі $\lambda < 1{,}1$ для $k=0$ і $\lambda < 2{,}5$ для $k=1$.

Підсумовуючи сказане вище, можна стверджувати, що для розв'язання безмежних систем лінійних алгебраїчних рівнянь (1.κ), (2.κ) можна застосовувати метод редукції при довільних силових, геометричних та механічних параметрах задачі [2]. Це твердження також правильне для задач [3, 4, 5], більше того, системи рівнянь, одержані в цих роботах, будуть завжди регулярними.

ЛІТЕРАТУРА

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.

2. Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т. Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением. «Математические методы и физико-механические поля», 1975, вып. 1.

3. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. — «Прикладная математика и механика», 1970, т. 34, вып. 3.

4. Сулим Г. Т. Концентрація напружень на тонкостінному включенні в кусково-однорідній площині. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1974, вип. 9.

5. Эрдоган, Гупта. Задача о полуплоскости с упругой накладкой. — «Прикладная механика», «Мир», сер. Е, 1971, № 4.