

Т. Л. МАРТИНОВИЧ, М. К. ЗВАРИЧ, М. К. ЧОБА

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З ВПРЕСОВАНИМ КРИВОЛІНІЙНИМ СТЕРЖНЕМ

Нехай в точках z_i та z_j ізотропної пластинки з криволінійним отвором прикладено відповідно зосереджені сили $P_i(X_i, Y_i)$ і моменти M_j ($i=1, 2, \dots, r$; $j=1, 2, \dots, s$). В отвір впресовано або натягнуто на диск замкнутий криволінійний стержень (кільце) сталого поперечного перерізу, контур якого до деформації відрізняється від контура отвору або диска на величину порядку допустимих пружних переміщень. Тертя між пластинкою і кільцем нехтуємо.

Із умови задачі випливає, що після того, як кільце впресовано в отвір пластинки або натягнуто на диск, на лінії контакту L виконуються рівності

$$u_n - u_{1n} = \mp \varepsilon^*; N^{(i)} = N_1^{(i)}; T^{(i)} = T_1^{(i)} = 0, \quad (1)$$

де u_n — нормальна складова переміщення контурних точок пластинки; $N^{(i)}$, $T^{(i)}$ — нормальна і дотична складові контактного напруження; ε^* — величина порядку пружних переміщень. Ті ж величини, позначені індексом — «1» належать до стержня.

Виражаючи контурні рівності (1) через аналітичні функції $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ змінної $z = x + iy$, одержуємо [3]:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} d \{ i \bar{t} [x \overline{\varphi_1(t)} - t \overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)}] \} &= 2 \mu d [u_{1n} \mp \varepsilon^*]; \\ d [\varphi_1(t) + t \overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)}] &= N^{(i)} dt, \quad t \in L. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут t — афікс точки контура L ; $i = \frac{dt}{ds}$.

Залежність між переміщеннями точок крайнього волокна стержня L , відносним подовженням e_0 нульової лінії L_0 і кутом повороту поперечного перерізу стержня θ_b виражається, згідно з [1], формулою

$$\begin{aligned} u_{1n} &= \operatorname{Re} \left\{ i \bar{t} \int_{t_0}^t \left[\frac{r_0}{r_1} e_0 + (r_1 - r_0) \frac{d\theta_b}{ds_1} + i \theta_b \right] dt + t_0 c \bar{t} \right\}, \\ c &= u_{1n}^\circ + i u_{1\tau}^\circ, \end{aligned} \quad (3)$$

де r_0 — радіус кривизни, нейтральної для чистого згину, лінії L_0 , яка зміщена від осі стержня до центру його кривизни на величину η_c . З рівнянь рівноваги елемента стержня з врахуванням третьої із рівностей (1) і закону Гука [1]

$$V_\tau = g e_0; L_b = g \eta_c r_1 i \frac{d\theta_b}{dt} \quad (4)$$

одержуємо

$$N^{(i)} = \mp \frac{1}{2hr_1} \operatorname{Re} \left\{ V_\tau + r_1 t \frac{d}{dt} \left(r_1 t \frac{dV_\tau}{dt} \right) \right\} + \frac{h^* r_2}{h r_1} N; \quad (5)$$

$$\frac{dL_b}{as_1} = -r_0 \frac{dV_\tau}{ds_1}.$$

Верхній знак береться при $r_1 < r_0$, нижній — при $r_1 > r_0$. У (4) і (5) використані позначення роботи [2].

Помножимо рівності (2) і спряжені їм на довільну функцію $F_1(z)$ голоморфну в області D і проінтегруємо вздовж контура L . Тоді одержуємо граничні умови задачі в формі контурних інтегралів, що містять довільну функцію $F_1(z)$:

$$\begin{aligned} & \int_L \bar{t} [\kappa \varphi_1(t) - t \overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)}] F_1'(t) dt - \\ & - \int_L t [\kappa \overline{\varphi_1(t)} - \overline{t \varphi_1'(t)} - \psi_1(t)] F_1'(t) dt = \\ & = 4\pi i \int_L (u_{1n} \mp \varepsilon^*) F_1'(t) dt; \\ & \int_L [\varphi_1(t) + t \overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)}] F_1'(t) dt = - \int_L N^{(i)} F_1(t) dt + \Delta_2; \\ & \int_L [\varphi_1(t) + t \overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)}] F_1'(\bar{t}) d\bar{t} = - \int_L N^{(i)} \overline{F_1(t)} dt + \Delta_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут

$$\Delta_2 = \{[\varphi_1(t) + t \overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)}] F_1(t)\}_L; \quad (7)$$

$$\Delta_3 = \{[\varphi_1(t) + t \overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)}] F_1(\bar{t})\}_L -$$

прирости виразів, взятих в дужки, при обході замкнутого контура L .

Надалі вважатимемо, що кільце не навантажене.

Припустимо, що розглядувана область конформно відображається на зовнішність (внутрішність) одиничного кола γ за допомогою функції $z = \omega(\zeta)$. Тоді граничні умови (6) мають вигляд:

$$\int_\gamma \left[\kappa \varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} \right] \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\sigma |\omega'(\sigma)|} F'(\sigma) d\sigma +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\gamma} \left[\kappa \overline{\varphi(\sigma)} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} \right] \frac{\sigma \omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|} F'(\sigma) d\sigma = \\
& = 4\mu \int_{\gamma} (u_{1n} + \varepsilon^*) F'(\sigma) d\sigma; \\
& \int_{\gamma} \left[\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} \right] F'(\sigma) d\sigma = \\
& = - \int_{\gamma} N^{(i)} F(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma + \Delta_2; \\
& \int_{\gamma} \left[\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} \right] \overline{F'(\sigma)} d\overline{\sigma} = \\
& = - \int_{\gamma} N^{(i)} \overline{F(\sigma)} \overline{\omega'(\sigma)} d\overline{\sigma} + \Delta_3.
\end{aligned} \tag{8}$$

У випадку кругового отвору $\omega(\zeta) = r_1 \zeta$. Функції $\varphi(\zeta) = \varphi_1[\omega(\zeta)]$, $\psi(\zeta) = \psi_1[\omega(\zeta)]$, $F(\zeta) = F_1[\omega(\zeta)]$ допускають поза одиничним колом розклади вигляду [3, 4]

$$\begin{aligned}
\varphi(\zeta) &= \sum_{m=1}^3 c_m \zeta^m - \sum_{i=1}^r P_i \ln(\zeta - \zeta_i) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^{-k}; \\
\psi(\zeta) &= \sum_{m=1}^3 d_m \zeta^m + \kappa \sum_{i=1}^r \overline{P_i} \ln(\zeta - \zeta_i) + \sum_{i=1}^r \frac{P_i \overline{\zeta_i}}{\zeta - \zeta_i} + \\
&+ \sum_{j=1}^s \frac{M_j^*}{\zeta - \zeta_j} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta^{-k}; \\
F(\zeta) &= \sum_{n=0}^{\infty} E_n \zeta^{-n}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Коефіцієнти c_m і d_m залежать від виду навантаження пластинки на нескінченності; $P_i = \frac{X_i + iY_i}{4\pi h(1+\kappa)}$; $M_j^* = \frac{iM_j}{2\pi r_1}$.

Величини e_0 і θ_b , що описують деформацію кільця, подаємо на γ в формі комплексних рядів Фур'є

$$e_0 = \alpha_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sigma^k; \quad \theta_b = \beta_0 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sigma^k. \tag{10}$$

Нормальний тиск (5) на лінії контакту L з врахуванням (4) і (10) обчислюється за формулою

$$N^{(i)} = \frac{g}{2hr_1} \left[\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (1-k^2) (\alpha_k \sigma^k + \bar{\alpha}_k \sigma^{-k}) \right], \quad (11)$$

Якщо $N^{(i)} \leq 0$, то пластинка контактуватиметься з кільцем вздовж всього контура L . За допомогою цієї умови визначається величина ϵ_{min}^* .

Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку з круговим отвором радіуса r_1 , в який впresовано стержень сталого перерізу шириною « b ». Зовнішній радіус кільця в недеформованому стані дорівнює $r_1 + \epsilon^*$ ($\epsilon^* > 0$). Вважаємо, що початок координат лежить в центрі отвору, вісь Ox напрямлена вздовж повздовжньої осі симетрії пластинки.

Вносимо розклади (9), (10) в крайові умови (8) з врахуванням (3) і (11) і виконуємо інтегрування вздовж контура γ , враховуючи при цьому, що всі E_n , крім E_j , дорівнюють нулю. Тоді одержуємо таку систему алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} \bar{b}_1 - \frac{g}{2h} \alpha_0 &= -c_1 - \bar{c}_1 - \sum_{i=1}^r P_i \zeta_i^{-1}; \quad b_2 = -\bar{c}_2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \bar{P}_i \bar{\zeta}_i^{-2}; \\ b_1 + \bar{b}_1 + 4\mu r_0 \alpha_0 &= -4\mu \epsilon^* - (1-\kappa) \left(c_1 + \bar{c}_1 + \sum_{i=1}^r P_i \zeta_i^{-1} - \sum_{i=1}^r \bar{P}_i \bar{\zeta}_i^{-1} \right); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\bar{b}_n - (\kappa + n - 2) \bar{a}_{n-2} - \frac{4\mu r_0 (1 + (r_0/\eta_c))}{n(n-2)} \alpha_{n-1} = A_n^{(1)};$$

$$\bar{b}_n - (n-2) \bar{a}_{n-2} + \frac{(n-2)g}{2h} \alpha_{n-1} = A_n^{(2)};$$

$$\bar{a}_{n-2} - \frac{ng}{2h} \alpha_{n-1} = A_n^{(3)},$$

де

$$\begin{aligned} A_n^{(1)} &= (\kappa - 3) c_3 \delta_{-1, 2-n} - d_3 \delta_{-1, 4-n} - d_2 \delta_{-1, 3-n} - d_1 \delta_{-1, 2-n} + \\ &+ \frac{\kappa}{n} \sum_{i=1}^r P_i \zeta_i^{-n} + \frac{\kappa}{n-2} \sum_{i=1}^r \bar{P}_i \bar{\zeta}_i^{2-n} - \sum_{i=1}^r P_i \zeta_i^{-n} + \sum_{i=1}^r \bar{P}_i \bar{\zeta}_i^{1-n} + \\ &+ \sum_{j=1}^s M_j^* \zeta_j^{1-n}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$A_n^{(2)} = -c_3 \delta_{-1, 2-n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r P_i \zeta_i^{-n};$$

$$A_n^{(3)} = -3c_3 \delta_{-1, n-4} - d_3 \delta_{-1, n-6} - d_2 \delta_{-1, n-5} - d_1 \delta_{-1, n-4} - \\ - \sum_{i=1}^r P_i \zeta_i^{-n} + \frac{\kappa}{n-2} \sum_{i=1}^r \bar{P}_i \zeta_i^{2-n} + \sum_{i=1}^r P_i \bar{\zeta}_i \zeta_i^{1-n} + \sum_{j=1}^s M_j^* \zeta_j^{1-n};$$

$$\delta_{-1, j} = \begin{cases} 1, & j = -1 \\ 0, & j \neq -1 \end{cases}, \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

Розглянемо деякі часткові випадки навантаження пластинки.

1. Пластинка згинається в своїй площині моментами M_1 . Тоді, враховуючи $c_1 = d_1 = c_3 = d_3 = 0$; $P_i = M_j^* = 0$

$$c_2 = \frac{iM_1 r_1^2}{8I}; \quad d_2 = -\frac{iM_1 r_1^2}{8I},$$

одержуємо

$$a_0 = -\frac{4h\mu\epsilon^*}{D}; \quad b_1 = -\frac{2\mu g\epsilon^*}{D}; \quad b_2 = \frac{iM_1 r_1^2}{8I}; \quad (14)$$

$$a_3 = -\frac{ih}{4F} (1 + \kappa) \frac{M_1 r_1^2}{I}; \quad a_2 = \frac{i}{8F} \left[2g - h\mu r_0 \left(1 + \frac{r_0}{\eta_c} \right) \right] \frac{M_1 r_1^2}{I};$$

$$b_4 = \frac{i}{4F} \left[(1 - \kappa) g - h\mu r_0 \left(1 + \frac{r_0}{\eta_c} \right) \right] \frac{M_1 r_1^2}{I}; \quad \beta_3 = \frac{ir_0}{3\eta_c} a_3,$$

де $F = h\mu r_0 \left(1 + \frac{r_0}{\eta_c} \right) + 2(1 + 2\kappa)g$; $D = 4h\mu r_0 + g$.

Мінімальну величину посадки $\epsilon_{\min}^*$, при якій кільце не відстає від пластинки по всьому контуру L , знаходимо з умови $N^{(i)} = 0$ при $\theta = \frac{\pi}{2}$; маємо

$$\epsilon_{\min}^* = (1 + \kappa) \frac{D}{\mu F} \frac{M_1 r_1^2}{I}. \quad (15)$$

2. Згин у своїй площині поперечною силою Q . У цьому випадку

$$c_1 = 0; \quad c_2 = -\frac{iAr_1^2}{8}; \quad c_3 = -\frac{iBr_1^3}{24}; \quad d_3 = \frac{iBr_1^3}{12}; \quad d_2 = \frac{iAr_1^2}{8}; \quad (16)$$

$$d_1 = -iE_1 r_1; \quad A = \frac{Q(l-a)}{I}; \quad B = -\frac{Q}{I}; \quad E_1 = \frac{Qh_0^2}{2I}; \quad P_i = M_j = 0.$$

В (16) використані позначення роботи [4].

Шукані коефіцієнти

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= -\frac{4\mu h\varepsilon^*}{D}; \quad b_1 = -\frac{2\mu g\varepsilon^*}{D}; \quad b_2 = -\frac{1}{8}iAr_1^2; \\
 \alpha_2 &= -\frac{i}{2E}(1+\kappa)h(r_1^2 - 6h_0^2)Br_1; \quad \alpha_3 = \frac{i}{4F}(1+\kappa)hAr_1^2; \\
 a_1 &= -\frac{i}{8E}\left\{8\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right)(r_1^2 - 4h_0^2) - 3g[(1-\kappa)r_1^2 - 8h_0^2]\right\}Br_1; \\
 b_3 &= -\frac{i}{6E}\left\{8\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right)(r_1^2 - 3h_0^2) + \right. \\
 &\quad \left. + 3g[2\kappa r_1^2 + 3(1-\kappa)h_0^2]\right\}Br_1; \\
 a_2 &= -\frac{i}{8F}\left[2g - h\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right)\right]Ar_1^2; \\
 a_3 &= -\frac{i}{6K}\left[15g - 4h\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right)\right]Br_1^3; \\
 b_4 &= -\frac{i}{4F}\left[(1-\kappa)g - h\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right)\right]Ar_1^2; \\
 \alpha_4 &= \frac{5i}{2K}(1+\kappa)hBr_1^3; \\
 b_5 &= -\frac{i}{4K}\left[15(1-\kappa)g - 8h\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right)\right]Br_1^3.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Тут введено позначення

$$E = 8h\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right) + 3(1+3\kappa)g;$$

$$K = 8h\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right) + 15(3+5\kappa)g.$$

3. Розтяг пластинки на нескінченості. Тоді $c_2 = c_3 = d_3 = d_2 = 0$; $P_i = M_j = 0$,

а

$$c_1 = \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{4}r_1; \quad d_1 = -\frac{\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty}{2}r_1.$$

Одержуємо результати [1].

4. Розтяг пластинки зосередженими силами. Обмежимося випадком двох рівних і прямопротилежних сил. Не порушуючи загальності, вважаємо, що сили прикладені в точках $z_1 = \rho$ і $z_2 = -\rho$. Враховуючи, що навантаження на нескінченності відсутні і $M_j = 0$, коефіцієнти функцій $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ і e_0 обчислюються з системи (12).

У випадку розтягу пластинки силами P , мінімальна величина посадки $\varepsilon_{\min}^*$ дорівнює

$$\varepsilon_{\min}^* = \frac{P\rho^{-1}}{4\pi h\mu} + \frac{D}{2h\mu} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} (1-k^2) \alpha_k. \quad (18)$$

Нормальні напруження в перерізі кільця обчислюються за формулою

$$\sigma = E^* \left[\frac{r_0}{r} e_0 + (r_1 - r_0) \frac{r_1}{r} i \frac{d\Theta_b}{dt} \right], \quad (19)$$

де r — радіус кривизни довільного волокна стержня.

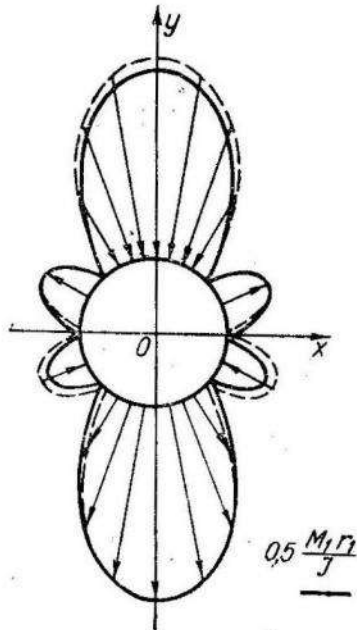


Рис. 1.

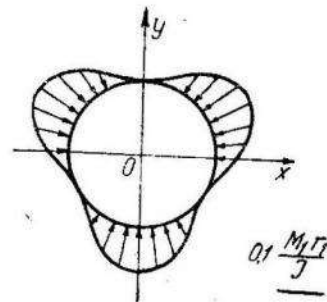


Рис. 2.

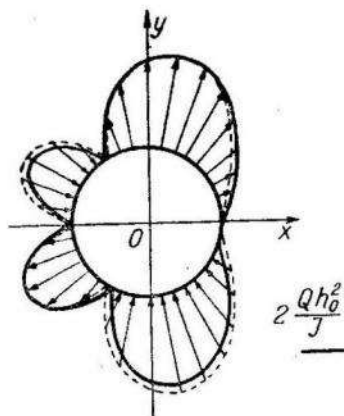


Рис. 3.

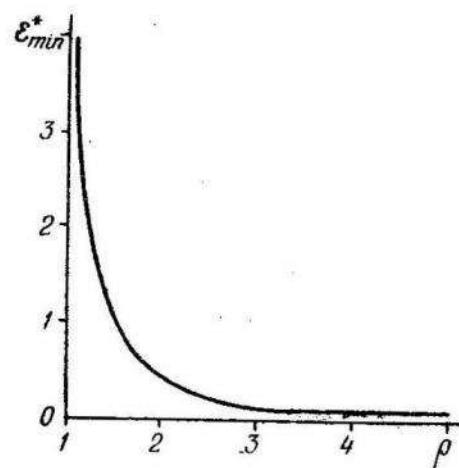


Рис. 4.

Для числового прикладу візьмемо мідну пластинку і стальне кільце прямокутного перерізу при таких значеннях пружних

сталих матеріалу і геометричних параметрів: $\mu = 4,42 \times 10^5 \text{ кг/см}^2$; $E^* = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$; $\kappa = 2,08$; $\gamma = \frac{h^*}{h} = 1,0$; $\delta = \frac{b}{r_1} = 0,2$; $\frac{b}{a} = 4$; $\frac{b}{h_0} = 10$; $\frac{r_1}{h_0} = 0,25$.

На рис. 1, 2 побудовано графіки розподілу напруження σ_θ в пластинці і контактного тиску $N^{(i)}$ у випадку згину пластинки моментами M_1 . На рис. 3 побудовані графіки напружень σ_θ , коли пластинка згинається поперечною силою Q . Розрахунки проведені для випадку, коли $\varepsilon^* = \varepsilon_{\min}^*$. Пунктирною лінією зображені графіки розподілу напружень σ_θ при відсутності кільця [4].

Залежність $\varepsilon_{\min}^*$ в долях $10^{-10}/9,81 \text{ Прн/м}$, від точки прикладання зосереджених сил подана на рис. 4.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дисс., Львов, 1970.
2. Мартынович Т. Л., Зварич М. К. Впрессовка замкнутого стержня в криволинейное отверстие изотропной пластинки. — «Прикладная механика», 1974, т. 10, вып. 9.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
4. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. М., Гостехиздат, 1951.

УДК 539. 377

В. З. ДІДИК, Б. М. КОРДУБА

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ В ЗАЩЕМЛЕНІЙ ПЛАСТИНЦІ З ПОСТІЙНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ТЕПЛОВІДДАЧІ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ ТЕПЛООБМІНІ

Нехай півнескінченна пластинка, край якої $x=0$ защемлений, нагрівається джерелом тепла, яке має потужність $\frac{q}{2\delta}$ та

рухається з постійною швидкістю в додатному напрямі осі y на віддалі d від її краю. Через поверхні пластинки здійснюється теплообмін із зовнішнім середовищем нульової температури.

Нестационарне температурне поле, яке виникає в пластинці, визначимо з рівняння теплопровідності [2]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \kappa^2 T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{q}{2\lambda\delta} \delta(x-d, y-v\tau), \quad (1)$$