$$E=2(1+\nu)G;\quad Q_0=\frac{q}{2\pi\lambda\delta};\quad z_0=x+i(y-v\tau_0);$$

$$z_{\pm}=(x\pm d)+i(y-v\tau_0);\quad \beta_{\pm}^{k}=z_{+}^{-k}\pm z_{-}^{-k};$$

$$\rho=\operatorname{erfc}\left[\frac{d}{2\sqrt{a(\tau-\tau_0)}}\right];\quad \omega_{\pm}=\exp\left[-\frac{(x\pm d)^2+(y-v\tau_0)^2}{4a(\tau-\tau_0)}\right];$$

$$L_{\nu}^{+}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{D_{-\nu}\left[\frac{z_0}{\sqrt{2a(\tau-\tau_0)}}\right]\exp\left[\frac{ix(y-v\tau_0)}{4a(\tau-\tau_0)}\right]+\right.$$

$$\left.+D_{-\nu}\left[\frac{\bar{z}_0}{\sqrt{2a(\tau-\tau_0)}}\right]\exp\left[-\frac{ix(y-v\tau_0)}{4a(\tau-\tau_0)}\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left[\frac{x^2-(y-v\tau_0)^2-2d^2}{8a(\tau-\tau_0)}\right];$$

$$L_{\nu}^{-}=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left\{D_{-\nu}\left[\frac{z_0}{\sqrt{2a(\tau-\tau_0)}}\right]\exp\left[\frac{ix(y-v\tau_0)}{4a(\tau-\tau_0)}\right]-\right.$$

$$\left.-D_{-\nu}\left[\frac{\bar{z}_0}{\sqrt{2a(\tau-\tau_0)}}\right]\exp\left[-\frac{ix(y-v\tau_0)}{4a(\tau-\tau_0)}\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left[\frac{x^2-(y-v\tau_0)^2-2d^2}{8a(\tau-\tau_0)}\right],$$

$D_{-\nu}(\zeta)$ — функція параболічного циліндра.

ЛІТЕРАТУРА

1. Новацкий Н. В. Вопросы термоупругости, М., Изд-во АН СССР, 1962.
2. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К., «Наукова думка», 1972.

УДК 539.3

Н. П. ФЛЕЙШМАН, А. Г. ЗІНЕВИЧ

ПЛАСТИНКИ З РЕБРАМИ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ

Вплив підкріплюючих тонких пружних елементів на напружений стан пластин досліджували багато вчених [1, 4, 6, 7], але до цього часу майже відсутні ефективні інженерні методи розрахунку пластин з ребрами змінної жорсткості, застосування яких дає змогу оптимізувати конструкцію за різними критеріями (вага, міцність, жорсткість).

Ми пропонуємо відносно нескладний алгоритм розв'язання плоскої задачі теорії пружності для однозв'язних скінченних або нескінченних ізотропних пластин, край яких підкріплено ребром змінного перетину. При цьому застосовуємо метод конформного відображення разом з методами колокації та послідовних наближень. Основними шуканими функціями є функції U, V — градієнти переміщень на лінії спаю пластинки з ребром, яка ототожнюється з віссю ребра. Вважаємо відомим розв'язок другої основної задачі для пластинки без ребра. Без принципових ускладнень цей розв'язок можна узагальнити на випадок багатозв'язних й анізотропних пластин [8] на пластинки з несиметричними ребрами та на випадок, коли умови спряження пластинки з ребром записуються на фактичній лінії спаю.

1. Нехай функція $z=\omega(\xi)$ відображає зовнішність (внутрішність) одиничного кола γ комплексної площини ξ на область пластинки зовні (всередині) замкненого контура L. Тоді на γ матимемо (при $\sigma=e^{i\theta}$).

$$t=\omega(\sigma)=R[\omega_1(\theta)+i\omega_2(\theta)], \tag{1}$$

де R — характерний розмір кривої L.

За відомим розв'язком із [5] другої основної задачі плоскої теорії пружності при заданих на L зміщеннях $g(\theta)=g_1(\theta)+$ $+ig_2(\theta)$ визначаємо функцію Колосова-Мусхелішвілі та її граничне значення на γ

$$\varphi(\sigma)=\varphi_1(\theta)+i\varphi_2(\theta)=\pm\left[\frac{\mu}{\varkappa}G(\theta)+Q(\theta)\right], \tag{2}$$

$$G(\theta)=-g(\theta)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[g(\tau)-ig(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-\theta}{2}\right]d\tau, \tag{3}$$

де μ — модуль зсуву; $\varkappa$ — постійна Мусхелішвілі, $Q(\theta)$ — відома функція, яка залежить від $\omega(\theta)$ і від навантаження на безмежності. Вона містить декілька невідомих коефіцієнтів, які визначаються [5] через $g(\theta)$.

З двох знаків у формулах верхній (нижній) береться у випадку пластинки, яка займає внутрішність (зовнішність) ребра жорсткості.

Якщо ввести комплексну комбінацію

$$\pm[F_1(\theta)+iF_2(\theta)]=[(1+\varkappa)\varphi(\theta)-2\mu g(\theta)]|\omega'(\sigma)|/i\sigma\omega'(\sigma) \tag{4}$$

та функції градієнтів переміщень U, V за формулою

$$U+iV=\frac{2\mu R}{i\sigma\omega'(\sigma)}\frac{dg(\theta)}{d\theta}, \tag{5}$$

то граничні умови спаю пластинки з ребром на L [2, 9, 10] можна звести до вигляду

$$U(\theta)=\frac{1}{\delta_1}\left[F_2(\theta)+\frac{1}{\rho(\theta)}\int_0^{\theta}|\omega'(\sigma)|F_1(\theta)\,d\theta+q_1(\theta)\right], \tag{6}$$

$$V(\Theta) = V(0) + \int\limits_0^{\Theta} A_1 [D_1 U(\Theta) - F_2(\Theta) - q_2(\Theta)]\, d\Theta,$$

де

$$D_1(\theta) = \delta_1 + \delta_2 R^2/\rho^2(\theta); \quad A_1 = |\omega'(\sigma)|\rho(\theta)/R^2\delta_2;$$

$$q_2(\Theta) = f_1(t); \; q_1(\Theta) = f_1(t) - \frac{1}{\rho(\Theta)}\left[\int\limits_0^s f_2(t) ds + C_3\right];$$

$$f_1(t) + if_2(t) = \frac{d\bar{d}}{ds}\left[iC_2 - \frac{1}{h}\int\limits_0^s (p_x + ip_y)\, ds\right]; \qquad (7)$$

$$\rho(\theta) = \pm|\omega'(\sigma)|/\{1 + \mathrm{Re}[\sigma\omega''(\sigma)/\omega'(\sigma)]\};$$

$2\mu h R\delta_1(\theta)$, $2\mu h R^3\delta_2(\theta)$ — змінні жорсткості ребра на розтяг і згин; h — товщина пластинки; (p_x+ip_y) — вектор заданих зовнішніх зусиль, які діють на ребро.

2. За методом колокації вимагатимемо задовільнення умов (6) тільки в певній кількості точок $\theta=\theta_j$ на γ ($j=0, 1, \ldots N$). Користуючись методом послідовних наближень, задаємось певними початковими значеннями шуканих функцій $U_0(\theta_j)$, $V_0(\theta_j)$ (наприклад, значенням функцій (5) для пластинки без ребра або з ребром сталого перетину) і розв'язуємо послідовно рівняння

$$U_{n+1}(\Theta_j) = \delta_1^{-1}(\Theta_j)\,[F_2^{(n)}(\Theta_j) + q_1(\Theta_j) + \\ + \rho^{-1}(\Theta_j)\int\limits_0^{\Theta j} |\omega'(\sigma)|\, F_1^{(n)}(\Theta)\, d\Theta, \qquad (8)$$

$$V_{n+1}(\Theta_j) = \int\limits_0^{\Theta j} A_1 [D_1 U_{n+1}(\Theta) - F_2^{(n)}(\Theta) - q_2(\Theta)]\, d\Theta + V_n(0)$$

$j=0, 1, 2, \ldots, N$; $n=0, 1, 2, \ldots$).

При реалізації цього алгоритму на ЕОМ спочатку при $n=0$ за заданою функцією $\omega(\sigma)$ (1), початковими значеннями $U_0(\theta_j)$, $V_0(\theta_j)$ шляхом чисельного інтегрування і формулою (5) визначаємо переміщення $g^{(0)}(\theta_j)$. При цьому необхідно задовольняти умову однозначності. Потім ЕОМ обчислює значення $G^{(0)}(\theta_j)$ (3) та $Q^{(0)}(\theta_j)$. Сингулярні інтеграли обчислюються за формулами роботи [3]. За формулами (2), (4) послідовно визначаємо величини $\varphi_1^{(0)}(\theta_j)$, $\varphi_2^{(0)}(\theta_j)$, $F_1^{(0)}(\theta_j)$, $F_2^{(0)}(\theta_j)$ і чисельним інтегруванням обчислюємо праві частини рівнянь (6), тобто значення $U_1(\theta_j)$, $V_1(\theta_j)$. Далі цикл послідовних наближень повторюємо при $n=1, 2, \ldots$ поки не досягаємо необхідної точності.

Функції $U(\theta_j)$, $V(\theta_j)$ повністю визначають напружено-деформований стан пластинки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Зіневич А. Г. Пластинка з криволінійним отвором, край якого підкріплено ребром змінного перерізу. — «Вісник Львівського університету, серія механіко-математична», 1973, вип. 8.
2. Зонепашвили И. А., Флейшман Н. П. Пластинки с частично подкрепленным краем. Реферативная информация о законченных научно-исследовательских работах в вузах УССР. — «Строительная механика и расчет сооружений», 1975, вып. 6.
3. Корнейчук А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. — В сб.: Численные методы решения диф. и интегр. уравнений и квадратурные формулы. М., Изд-во АН СССР, 1964.
4. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дисс. Львов, 1970.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
6. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки с криволинейными ребрами жесткости. — В сб.: Механика твердого тела. М., «Наука», 1966.
7. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. К., «Наукова думка», 1964.
8. Флейшман Н. П. Пластинки с криволинейными тонкими ребрами переменной жесткости. — В сб.: Тезисы докладов III Республиканской конференции математиков Белоруссии. Минск, 1971.
9. Флейшман Н. П., Старовойтенко Ж. В. Обобщенная граничная задача для пластинки с подкрепленным краем. «Прикладная механика», 1967, т. III, вып. 12,
10. Флейшман Н. П., Старовойтенко Ж. В. Новый способ расчета пластин с подкрепленным краем. — «Сопротивление материалов и теория сооружений», 1974, вып. 23.

ЛИСТ ДО РЕДАКЦІЇ

У моїй замітці «Єдиність розв'язку оберненої задачі потенціалу простого шару», надрукованій у «Віснику Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1972, вип. 7, стор. 98—99, допущена помилка в формулюванні теорем 1 і 2.

У теоремі 1 густину μ слід припускати інтегрованою за Ріманом і $|\mu(\theta)|=1$, а в теоремі 2 густини $\mu_j(x)$ $(j=1, 2)$ — інтегрованими функціями, які задовольняють умову

$$\mu_1(x) \geqslant m_0, \ \mu_2(x) \leqslant m_0,$$

де $m_0>0$ — деяка стала.

С. П. ЛАВРЕНЮК