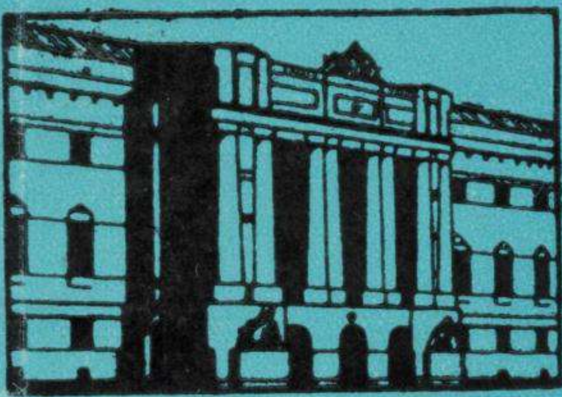
ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ім. ІВ. ФРАНКА

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА

Випуск 10



ТЕОРЕТИЧНА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

1975

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ
СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР

ВІСНИК
ЛЬВІВСЬКОГО ОРДЕНА ЛЕНІНА
ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ім. ІВАНА ФРАНКА

СЕРІЯ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНА
Випуск 10

ТЕОРЕТИЧНА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

ВИДАВНИЧЕ ОБ'ЄДНАННЯ «ВИЩА ШКОЛА»
ВИДАВНИЦТВО ПРИ ЛЬВІВСЬКОМУ ДЕРЖАВНОМУ УНІВЕРСИТЕТІ
ЛЬВІВ — 1975

УДК 513

У Віснику вміщені статті з теорії функцій, теорії ймовірностей, диференціальних та інтегральних рівнянь, функціонального аналізу, геометрії і теорії пружності.

Розрахований на наукових працівників, аспірантів та студентів старших курсів.

В $\frac{20203\text{-}106}{М225(04)\text{-}75}$

УДК 517.512

В. О. ГУКЕВИЧ

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ПОВНИХ СИСТЕМ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЙЖЕ ОРТОГОНАЛЬНІ ЗА БЕЛМАНОМ

Лема. Нехай $f(t)$ є $L_2(a, b)$ і $\varphi_i(t)$ — система майже ортогональних за Белманом функцій на $[a, b]$ [1], для яких

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2 = A < 1, \tag{1}$$

де

$$a_{ik} = \begin{cases} \int\limits_a^b \varphi_i(t)\,\varphi_k(t)\,dt, & i \neq k, \\ 0, & i = k. \end{cases}$$

Якщо $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{in}\varphi_i(t)$ — узагальнений многочлен порядку n найкращого середньоквадратичного наближення функції $f(t)$ на $[a, b]$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2 \leqslant \frac{1}{1-\sqrt{A}} \int\limits_a^b f^2(t)\,dt.$$

Доведення. Нехай $c_i = \int\limits_a^b f(t)\varphi_i(t)\,dt$. Тоді, як відомо [1],

$$c_i = \alpha_{in} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kn}\, a_{ik} \tag{2}$$

$$0 \leqslant \int\limits_a^b \left[f(t) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}\varphi_i(t) \right]^2 dt = \int\limits_a^b f^2(t)\,dt - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} c_i. \tag{3}$$

Таким чином,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} c_i \leqslant \int\limits_a^b f^2(t)\,dt$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} c_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2 + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} \alpha_{kn} a_{ik}.$$

Але за нерівністю Шварца

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{in} \alpha_{kn} a_{ik} \right| \leqslant \sqrt{\sum_{k-1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2 \alpha_{kn}^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2 \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2} \leqslant A \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2 .$$

Із формули (3) і останньої нерівності дістаємо

$$(1 - \sqrt{A}) \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2 - \left| \sum_{k-1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} \alpha_{kn} a_{ik} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i-1}^{n} \alpha_{in} c_i \leqslant \int_a^b f^2(t)\, dt,$$

що, беручи до уваги умову $A < 1$, завершує доведення леми.

Теорема 1. *Нехай* $\{\varphi_n(t)\}$ — *система майже ортогональних за Белманом на* $[a, b]$ *функцій:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ik}^2 = A < 1.$$

Якщо, крім того, система $\{\varphi_n(t)\}$ є повною на $[a, b]$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t) = \infty$$

майже скрізь на $[a, b]$.

Доводимо від протилежного. Нехай E — множина збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2 \ (t)$ і mes $E > 0$. Тоді існує таке число $\mu > 0$ і така множина F, що mes $F > 0$ і

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(t) < \mu \text{ на } F. \tag{4}$$

Нехай далі множина $G \subset F$, $0 < \text{mes}\, G \leqslant \frac{1-\sqrt{A}}{4\mu}$ і $g(t)$ — характеристична функція множини G.

Якщо через $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}\varphi_i(t)$ позначити узагальнений многочлен порядку n найкращого середньоквадратичного наближення функції $g(t)$ на $[a, b]$, то за лемою 1

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2 \leqslant \frac{1}{1-\sqrt{A}} \int_a^b g^2(t)\,dt \leqslant \frac{\text{mes}\, G}{1-\sqrt{A}} \leqslant \frac{1}{4\mu}.$$

З останньої нерівності, нерівностей Шварца і (4) дістаємо для $t \in F$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}\varphi_i(t)\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}^2}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2(t)} < \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Але, зважаючи на повноту системи $\{\varphi_n(t)\}$ на $[a, b]$ послідовність $\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}\varphi_i(t)\right\}$ є збіжною до $g(t)$ на $[a, b]$ і тим більше на G в сенсі середньоквадратичного наближення. З останнього випливає [1] існування такої послідовності натуральних чисел $\{n_k\}$ і такої множини $G^* \subset G$, mes $G^* =$ mes G, що

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_{in_k}\varphi_i(t) = g(t),\ \ t \in G^*, \tag{6}$$

Але $g(t) = 1$ на G^*, оскільки $G^* \subset G$ і $g(t)$ — характеристична функція множини G. Зі сказаного і нерівності (6) випливає для $t \in G^*$ існування такого числа $n(t)$, що

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in}\varphi_i(t) > \frac{1}{2},$$

коли $n_k > n(t)$. Ми одержали протиріччя з нерівністю (5).

Теорема 1 є перенесенням відомої теореми для повних ортонормованих систем [1] на повні системи майже ортогональні в сенсі Белмана.

Для тих систем при обмеженні $A < 1$ справедливе також твердження, аналогічне до відповідного твердження для повних ортонормованих систем [1], яке доводиться подібним способом. А саме справедлива теорема 2.

Теорема 2. *Нехай* $\{\varphi_n(t)\}$ *— повна майже ортогональна за Белманом система функцій на* $[a, b]$ *та*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}^2 = A < 1.$$

1. Існує послідовність $\{a_k\}$ *така,* що $\lim\limits_{K\to\infty} a_k = 0$, *але*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \varphi_n^2(t) = \infty .$$

2. Послідовність $\{b_k\}$ *така, що* $\lim\limits_{K\to\infty} b_k = 0$, *але*

$$\lim_{n\to\infty} \text{syp} \left| \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k(t) \right| = \infty$$

майже скрізь на $[a, b]$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кичмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1958.

УДК 517.917

Л. М. ЛІСЕВИЧ, Б. В. КОВАЛЬЧУК

СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ І ПОНЯТТЯ РЯДУ ФУР'Є ДЛЯ S^p-МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

1. Середнє значення S**-майже періодичних матриць** *. У роботі [3] дано означення S^p-майже періодичної матриці ($p \geqslant 1$) і введено поняття S^p-норми.

Матрицю $F(x) = [f_{jk}(x)] (-\infty < x < +\infty)$ називаємо S^p-майже періодичною, якщо всі елементи її $f_{jk}(x)$ є S^p-майже періодичними функціями, а S^p-норму матриці вводимо так:

$$\| F \|_{S^p} = \sup_x \sum_{j,k} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} | f_{jk}(t)^p | \, dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Відомо [2], що для кожної S-майже періодичної функції $f(x)$ існує середнє значення

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\, dx$$

рівномірно відносно $\alpha \in (-\infty, +\infty)$.

* При $p = 1$ пишемо S замість S^1.

Означення. Середнім значенням S-майже періодичної матриці $F(x)=[f_{jk}(x)]$ назвемо числову матрицю

$$M\{F(x)\}=[M\{f_{jk}(x)\}]. \tag{1.1}$$

Середнє значення (1.1) має такі очевидні властивості:

а) якщо $F(x)=A$ — стала матриця, то $M\{A\}=A$.

б) $M\{F(ax+b)\}=M\{F(x)\}$, де $a\neq 0$, b — довільні дійсні числа.

в) $M\{\alpha F(x)+\beta G(x)\}=\alpha M\{F(x)\}+\beta M\{G(x)\}$, де $F(x)$, $G(x)$—S-майже періодичні матриці, а α, β — довільні комплексні числа.

г) $M\{\overline{F(x)}\}=\overline{M\{F(x)\}}$.

Теорема 1.1. *Якщо $F(x)=[f_{jk}(x)]$ ненульова S-майже періодична матриця, то*

$$\| M\{F(x)\}\|_s>0. \tag{1.2}$$

Доведення. Якщо S-майже періодична функція $f(x)\not\equiv$ $\not\equiv 0$, то

$$M\{|f(x)|\}>0.$$

У такому разі на основі співвідношення

$$\| M\{F(x)\}\|_s=\sum_{j,k} M\{|f_{jk}(x)|\}$$

одержуємо наше твердження.

Наслідок. Із теореми 1.1 випливає, що

$$\| M\{F(x)\|_s=0 \tag{1.3}$$

тоді і тільки тоді, коли S-майже періодична матриця $F(x)$ є нульовою.

Теорема 1.2. *Якщо $F(x)=[f_{jk}(x)]$ — S-майже періодична матриця, то*

$$\|M\{F(x)\}\|_s\leqslant\|F(x)\|_s. \tag{1.4}$$

Доведення. Для S-майже періодичних функцій $f_{jk}(x)$ маємо

$$\frac{1}{T}\int_x^{x+T}|f_{jk}(t)|\,dt\leqslant\sup_x\frac{1}{T}\int_x^{x+T}|f_{jk}(t)|\,dt=\|f_{jk}\|_s,$$

а, отже, і

$$M\{|f_{jk}(x)|\}\leqslant\|f_{jk}\|_s.$$

Тепер легко одержати нерівність (1.4)

Теорема 1.3 *Якщо $F_n(x)\,(n=1, 2, \ldots)$ — S-майже періодичні матриці і*

$$\lim_{n\to\infty}\| F_n(x)-F(x)\|_s=0$$

рівномірно відносно $x \in (-\infty, +\infty)$, то

$$\lim_{n \to \infty} \| M\{F_n(x)\} - M\{F(x)\}\|_s = 0. \tag{1.5}$$

Доведення. У [3] показано, що $F(x)$ є S-майже періодичною матрицею. А на основі теореми 1.2 одержуємо

$$\| M\{F_n(x)\} - M\{F(x)\}\|_s \leqslant \| F_n(x) - F(x)\|_s.$$

Звідси випливає наше твердження.

2. Простір S^p-майже періодичних матриць. Означення 1. Множину Σ_p всіх S^p-майже періодичних матриць $F(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ називатимемо простором S^p-майже періодичних матриць.

Легко зауважити, що множина Σ_p^* всіх S^p-майже періодичних матриць одного й того ж виміру є лінійним підпростором простору Σ_p.

Під скалярним добутком двох S^2-майже періодичних функцій $f(x)$, $g(x)$ розуміють число

$$(f, g) = M\{f(x) \cdot \overline{g(x)}\}.$$

Означення 2. Скалярним добутком двох матриць $F(x) = [f_{jk}(x)]$, $G(x) = [g_{jk}(x)]$ із Σ_2^* назвемо число

$$(F, G) = M\left\{\sum_{j,k} f_{jk}(x) \cdot \overline{g_{jk}(x)}\right\} = M\{Sp(F \cdot G^*)\}, \tag{2.1}$$

де $G^*(x)$ — ермітово-транспонована матриця $G(x)$.

Легко перевірити, що скалярний добуток (2.1) має всі властивості скалярного добутку і при цьому справедливе співвідношення

$$(F, G) = \sum_{j,k} (f_{jk}, g_{jk}). \tag{2.2}$$

Під нормою S^2-майже періодичної функції $f(x)$ розуміють невід'ємне число

$$\| f \| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{M\{|f(x)|^2\}}.$$

Означення 3. Нормою матриці $F(x) = [f_{jk}(x)]$ із Σ_2^*, породженою скалярним добутком (2.1), назвемо невід'ємне число

$$\| F \| = \sqrt{(F, F)} = \sqrt{M\left\{\sum_{j,k} |f_{jk}(x)|^2\right\}}. \tag{2.3}$$

Можна довести, що введена норма (2.3) має всі відомі властивості норми і при цьому

$$\| F \| = \sqrt{\sum_{j,k} \| f_{jk} \|^2}. \tag{2.4}$$

О з н а ч е н н я 4. Дві матриці $F(x)$, $G(x)$ із Σ_2^* назвемо ортогональними, якщо

$$(F, G) = 0. \tag{2.5}$$

О з н а ч е н н я 5. Матрицю $F(x) \in \Sigma_2^*$ назвемо нормованою, якщо

$$\|F\| = 1, \tag{2.6}$$

тобто

$$(F, F) = 1.$$

Ортогональну і нормовану систему матриць із Σ_2^* називатимемо ортонормованою системою.

3. Ряд Фур'є S^p-майже періодичних матриць. Розглянемо S^p-майже періодичну матрицю $F(x) = [f_{jk}(x)]$ і знайдемо добуток

$$F(x)\, e^{-i\lambda x} = [f_{jk}(x)\, e^{-i\lambda x}] \quad (-\infty < \lambda < +\infty),$$

який є S-майже періодичною матрицею [3].

Відомо [2], що для кожної S^p-майже періодичної функції $f(x)$ її спектральна функція

$$a(\lambda) = M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\} \tag{3.1}$$

відмінна від нуля лише для скінченної або зчисленної множини значень λ.

Отже, S-норма матриці

$$A(\lambda) = M\{F(x)\, e^{-i\lambda x}\} \tag{3.2}$$

буде додатна також для скінченної або зчисленної множини значень λ. Ті значення $\lambda = \lambda_n$, для яких норма матриці (3.2) додатна, називатимемо показниками Фур'є S^p-майже періодичної матриці $F(x)$, а

$$A_n = A(\lambda_n) = M\{F(x)\, e^{-i\lambda_n x}\} \tag{3.3}$$

її матричними коефіцієнтами Фур'є.

Сукупність всіх показників Фур'є S^p-майже періодичної матриці $F(x)$ називається її спектром.

О з н а ч е н н я. Рядом Фур'є S^p-майже періодичної матриці $F(x) = [f_{jk}(x)]$ назвемо скінченний або нескінченний тригонометричний ряд

$$F(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}, \tag{3.4}$$

де $\{\lambda_n\}$ — спектр матриці $F(x)$, а A_n — матричні коефіцієнти Фур'є цієї матриці, які визначаються формулою (3.3)

Зауважимо, що інколи ряд Фур'є S^p-майже періодичної матриці $F(x)$ записуємо у вигляді континуальної суми

$$F(x) \sim \sum_\lambda A(\lambda)\, e^{i\lambda x}, \tag{3.5}$$

де матричні коефіцієнти Фур'є $A(\lambda)$ визначаються формулою (3.2). При цьому треба розуміти, що в ряді Фур'є (3.5) норма матриці (3.2) дорівнює нулеві для λ, не рівного показникові Фур'є матриці $F(x)$.

Теорема 3.1. *Для кожної S^2-майже періодичної матриці $F(x)=[f_{jk}(x)]$ ряд із квадратів норм її матричних коефіцієнтів Фур'є A_n збіжний. При цьому справедлива нерівність Бесселя*

$$\sum_n \|A_n\|^2 \leqslant \|F\|^2. \tag{3.6}$$

Доведення. Якщо $f(x)$ є S^2-майже періодична функція, то для будь-якого скінченного набору $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$ різних дійсних чисел має місце нерівність Бесселя [2]

$$\sum_{n=1}^{N} |a(\lambda_n)|^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{3.7}$$

де $a(\lambda_n)$ визначаються формулою (3.1).

Тому що

$$A(\lambda_n)=[a_{jk}(\lambda_n)],$$

то на основі формул (2.4) і (3.7) одержуємо

$$\sum_{n=1}^{N} \|A(\lambda_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{N}\Big(\sum_{j,k} |a_{jk}(\lambda_n)|^2\Big) = \sum_{j,k}\Big(\sum_{n=1}^{N} |a_{jk}(\lambda_n)|^2\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j,k} \|f_{jk}\|^2 = \|F\|^2,$$

тобто

$$\sum_{n=1}^{N} \|A(\lambda_n)\|^2 \leqslant \|F\|^2.$$

Перейшовши в останній нерівності до границі, коли $N \to +\infty$, маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A(\lambda_n)\|^2 \leqslant \|F\|^2.$$

Тим самим твердження теореми доведено.

Теорема 3.2. *Якщо тригонометричний ряд*

$$F(x)=\sum_n C_n e^{i\lambda_n x} \quad (-\infty<x<+\infty), \tag{3.8}$$

де $C_n=[c_{jk}^{(n)}]$, рівномірно збіжний за S^p-нормою, то він є рядом Фур'є своєї суми $F(x)$.

Доведення. Відомо [3], що сума $F(x)$ є S^p-майже періодичною матрицею. Тепер на основі співвідношення

$$A(\lambda) = M\{F(x)e^{-i\lambda x}\} = \left[\sum_n C_{jk}^{(n)} M\{e^{i(\lambda_n-\lambda)x}\}\right]$$

наше твердження доводиться так само, як аналогічна теорема в роботі [1].

Наслідок. Тригонометричний ряд (3.8) є рядом Фур'є своєї суми $F(x)$, якщо

$$\sum_n \| C_n \|_s < \infty.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости М., «Наука», 1967.
2. Левитан Б. М. Почти периодические функции. М., ГИТТЛ, 1953.
3. Лісевич Л. М., Ковальчук Б. В. S^p-майже періодичні матриці та лінійна система диференціальних рівнянь з S^p-майже періодичною правою частиною. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1973, вип. 8.

УДК 517.946

І. М. КОЛОДІЙ

НЕРІВНІСТЬ ХАРНАКА ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

У роботі розглядаються квазілінійні еліптичні диференціальні рівняння з виродженням виду

$$\operatorname{div} A(x, u, u_x) = B(x, u, u_x). \tag{1}$$

Для узагальнених розв'язків доведено нерівність, що узагальнює класичну нерівність Харнака для гармонічних функцій. Ми застосовуємо техніку, запропоновану в [5] і розвинуту в інших роботах [4, 6].

Результат нашої статті анонсовано в [1].

Нехай Ω — обмежена область в n-мірному евклідовому просторі E^n, $x=(x_1, \ldots, x_n)$; $K_r(y)$ — куб $(x: |x_i-y_i|<r)$, $K_r=K_r(0)$; $\mu=\mu(x)=(\mu_1(x), \ldots, \mu_n(x))$, де $\mu_i(x)$, $i=1, \ldots, n$ — невід'ємні вимірні функції на Ω, $W_\beta^1(\mu, \Omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_\beta^1(\mu, \Omega)$ — повні нормовані простори [2].

Розглянемо рівняння (1) в області Ω за умови, що функції $A(x, u, u_x)$, $B(x, u, u_x)$ задовольняють умовам (2), (3) роботи [2]. Позначимо

$$M(\rho, y) = \sum_{i=1}^{n} \left(\rho^{-n} \int_{K_\rho(y)} (\mu_i^\beta(x) \lambda_i^{1-\beta}(x))^s \, dx \right)^{\frac{1}{s}}, P_{(\rho,y)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\rho^{-n} \int_{K_\rho(g)} \lambda^{-t_i}(x) \, dx \right)^{\frac{1}{t_i}};$$

$$H(\rho, y) = M(\rho, y) . P(\rho, y), \quad H(\rho) = M(\rho) P(\rho) = M(\rho, 0) P(\rho, 0);$$

$$\varkappa(\rho) = \left(\rho^{\frac{\theta}{4}} \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{e^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x)}{\mu_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x)} \right\|_{L_s(K_\rho)} \right)^{\frac{1}{\beta}} + \left(\rho^{\frac{\theta}{4}} \| f(x) \|_{L_s(K_\rho)} \right)^{\frac{1}{\beta-1}} +$$

$$+ \left(\rho^{\frac{\theta}{4}} \| g(x) \|_{L_s(K_\rho)} \right)^{\frac{1}{\beta}};$$

$$\theta = n \left(\frac{\beta}{n} - \frac{1}{s} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} \right) > 0.$$

Теорема. *Нехай $u(x)$ — невід'ємний узагальнений розв'язок* рівняння (1) в кубі $K_{8r} \subset \Omega$ (число r — достатньо мале), а $\varkappa_1$ — додатна константа, така, що $H(h, y) \leqslant \varkappa_1$ для довільної точки $y \in K_{4r}$ і довільного $h \in (0{,}8\, r)$. Тоді*

$$\operatorname*{Vrai\,max}_{K_r} u(x) \leqslant C (\operatorname*{Vrai\,min}_{K_r} u(x) + \varkappa(8r), \tag{2}$$

де $C = C(n, \beta, t_i, s, a_1, a_2, \varkappa_1)$.

Доведення. Позначимо $\bar{u} = u + \varkappa + \varepsilon$, $\varkappa = \varkappa(8r)$, $\varepsilon > 0$; $w = \ln \bar{u}$. Підставимо в інтегральну тотожність функцію $\varphi(x) = \eta^\beta \bar{u}^{1-\beta}$, де $\eta = \prod_{i=1}^{n} \eta_{h,h}(|x_i - y_i|)$, $\eta_{h\,h}(|x_i - y_i|)$ — неперервна функція, що дорівнює одиниці при $|x_i - y_i| \leqslant h$, нулеві при $|x_i - y_i| \geqslant 2h$, лінійна при $h < |x_i - y_i| < 2h$. Тоді, враховуючи умови (2), (3) роботи [2] та нерівність Юнга, одержуємо

$$\int_{K_{8r}} \eta^\beta \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) |w_{x_i}|^\beta \, dx \leqslant C \left[\int_{K_{8r}} |\eta_x|^\beta \sum_{i=1}^{n} \mu_i^\beta(x) \lambda_i^{1-\beta}(x) \, dx + \right.$$

---

* Означення узагальненого розв'язку в сенсі інтегральної тотожності є в [2].

$$+\int\limits_{K_{8r}}\eta^{\beta}\left(\sum_{i=1}^{n}c_i^{\beta}(x)\,\lambda_i^{1-\beta}(x)+\sum_{i=1}^{n}\bar{b}^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x)\,\mu_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x)+\bar{d}(x)+\bar{\omega}(x)\right)dx\Bigg],$$

де

$$\bar{d}(x)=d(x)+\varkappa^{-\beta}g(x),\ \bar{\omega}(x)=\omega(x)+\varkappa^{1-\beta}f(x),\bar{b}(x)=b(x)+\varkappa^{1-\beta}e(x).$$

Для правої частини цієї нерівності застосовуємо лему 1 п. 2 роботи [3] і скористаємося тим, що r достатньо мале. Тоді

$$\int\limits_{K_{8r}}\eta^{\beta}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\,|w_{x_i}|^{\beta}\,dx\leqslant C\int\limits_{K_{8r}}|\eta_x|^{\beta}\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{\beta}(x)\,\lambda_i^{1-\beta}(x)\,dx.$$

Звідси, беручи до уваги вибір функції η і нерівність Гельдера, випливає оцінка

$$\int\limits_{K_h(y)}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\,|w_{xi}|^{\beta}\,dx\leqslant C\,h^{n-\beta}M\,(2h,y),\ 0<h\leqslant 4r. \tag{3}$$

Позначимо $\tilde{w}=(\mathrm{mes}\,K_h(y))^{-1}\int\limits_{k_h(y)}w\,dx$. Використовуючи теорему С. Л. Соболєва, нерівність Тельдера та оцінку (3), маємо

$$h^{-n}\int\limits_{K_h(y)}|w-\tilde{w}|\,dx\leqslant Ch^{-n+1}\int\limits_{K_h(y)}|w_x|\,dx\leqslant CH^{\frac{1}{\beta}}(2h,y)\leqslant C\varkappa_1^{\frac{1}{\beta}}=\varkappa_0.$$

Тоді за лемою Джона та Ніренберга [7] при $\tau<\tau_0<1$

$$r^{-2n}\int\limits_{K_{4r}}\bar{u}^{-\tau}\,dx\int\limits_{K_{4r}}\bar{u}^{\tau}\,dx\leqslant\zeta, \tag{4}$$

де τ_0 і ς залежать від n і $\varkappa_0$.

Підставимо в інтегральну тотожність функцію $\varphi(x)=\eta^{\beta}\bar{u}^{\alpha}$, де $\eta=\prod\limits_{=1}\eta_{\rho,\sigma}(|x_i|)$, $r<\rho<\rho+\sigma\leqslant 4r$, $\alpha=\beta(q-1)+1$, $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 1-\beta$. Тоді записуємо

$$0=\mathrm{sign}\,\alpha\int\limits_{K_{4r}}(\varphi_x A+\varphi\,\beta)\,dx=\int\limits_{K_{4r}}\mathrm{sign}\,\alpha\,(\eta^{\beta}\,\alpha\,\bar{u}^{\alpha-1}Au_x+$$

$$+\beta\eta^{\beta-1}\bar{u}^{\alpha}A_{\eta_x}+\eta^{\beta}\bar{u}^{\alpha}B)\,dx.$$

Враховуючи в останній рівності умови (2), (3) роботи [2], нерівність Юнга, лему роботи [2], нерівність Гельдера, вибір функції η та малість числа r, одержуємо оцінку

$$\left(r^{-n}\int\limits_{K_\rho}\overline{u}^{\beta m p}\,dx\right)^{\frac{1}{m}} \leqslant C^{s'}\left(1+\frac{r}{\sigma}\right)^{\beta s'}\left(1+\frac{1}{|\alpha|}\right)^{s'}|q|^{s'\beta}\,[r^{\frac{\theta}{2}}+$$

$$+H(4r)]^{s'}\left(r^{-n}\int\limits_{K_{\rho+\sigma}}\overline{u}^{\beta p}\,dx\right), \tag{5}$$

де $m=k(s')^{-1}>1$, $s^{-1}+(s')^{-1}=1$, $p=s'q$, $\alpha=\beta(q-1)+1$.

Проітерувавши цю оцінку при $p\geqslant s'(q\geqslant 1)$, $r<\rho<\rho+\sigma\leqslant\leqslant 2r$, маємо

$$\operatorname*{Vrai\,max}_{K_r}\overline{u}^{\beta}\leqslant C\,[H(4r)+r^{\frac{\theta}{2}}]^{\frac{m}{m-1}}\left(r^{-n}\int\limits_{K_{2r}}\overline{u}^{s'\beta}\,dx\right)^{\frac{1}{s'}}. \tag{6}$$

Оскільки $\alpha\neq 0$, то оцінка (5) справедлива при $q>0$, $q\neq\dfrac{\beta-1}{\beta}$ і $2r\leqslant\rho<\rho+\sigma\leqslant 4r$. Можна вважати, що $m^{-\nu}\neq\dfrac{\beta-1}{\beta}$ при цілих $\nu>0$. Приймемо $p=s'm^{-\nu-1}$, $\nu=0,1,\ldots,l-1$, $\gamma=m^{-l}$, де l — найменше з чисел, що задовольняють умові $\tau=\beta m^{-l}s'<\tau_0$. Нехай

$$\rho=\rho_\nu=2r\left(1+\frac{\nu}{l}\right),\quad \rho+\tau=\rho_{\nu+1},\ \tau_c\ H_\nu=r^{-n}\int\limits_{K_{\rho_\nu}}\overline{u}^{\beta s m^{-\nu}}\,dx,$$

тоді з (5) маємо

$$H_\nu\leqslant C\,[H(4r)+r^{\frac{\theta}{2}}]^{s'm}H_{\nu+1}^{m}.$$

Звідси

$$H_0\leqslant r^{-n}\int\limits_{K_{2r}}\overline{u}^{s'\beta}\,dx\leqslant C\,[H(4r)+r^{\frac{\theta}{2}}]^{s'}\sum_{\nu=0}^{l-1}m^{\nu+1}H_l^{m^l}=$$

$$=C\,[H(4r)+r^{\frac{\theta}{2}}]^{s'\frac{m}{m-1}\cdot\frac{1-\gamma}{\gamma}}\left(r^{-n}\int\limits_{K_{4r}}\overline{u}^{\tau}\,dx\right)^{\frac{\beta s'}{\tau}}. \tag{7}$$

З оцінок (4), (6), (7) випливає

$$\operatorname*{Vraimax}_{K_r}\overline{u}^{\beta}\leqslant C\,[H(4r)+r^{\frac{\theta}{2}}]^{\frac{m}{m-1}\frac{1}{\gamma}}\left(r^{-n}\int\limits_{K_{4r}}\overline{u}^{-\beta\gamma s'}\,dx\right)^{-\frac{1}{\gamma s'}} \tag{8}$$

Приймаємо в (5) $p=-\gamma s'm^{\nu}$, $\nu=0, 1, 2, \ldots, 2r<\rho<\rho+\sigma\leqslant\leqslant 4r$, $\rho+\sigma=\rho_\nu=2r(1+2^{-\nu})$, $\rho=\rho_{\nu+1}$; проітерувавши цю нерівність, одержуємо

$$\operatorname{Vrai}\min_{K_{2r}} \bar{u}^{\beta} \geqslant C\left[H(4r)+r^{\frac{\theta}{2}}\right]^{-\frac{1}{\gamma}\frac{m}{m-1}}\left(r^{-n}\int\limits_{K_{4r}} \bar{u}^{-\beta\gamma s'}\,dx\right)^{-\frac{1}{\gamma s'}}. \quad (9)$$

Об'єднавши оцінки (8), (9) і спрямувавши ε до нуля, дістаємо нерівність (2).

ЛІТЕРАТУРА

1. Колодий И. М. О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений. — ДАН СССР, 1971, т. 197, № 2.
2. Колодій І. М. Оцінка максимуму модуля узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1974, вип. 9.
3. Колодій І. М. Локальна неперервність за Гельдером узагальнених розв'язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1974, вип. 9.
4. Кружков С. Н. Априорные оценки и некоторые свойства решений эллиптических и параболических уравнений. — «Математический сборник», 1964, т. 65, № 4.
5. Moser J. On Harnack's theorem of elliptic differential equations. — «Comm. Pure Appl. Math»., 1961, v. 14, № 3.
6. Serrin J. Local behavior of solutions of quasilinear equations. — «Acta Math»., 1964, v. III, № 3—4.
7. Tohn F. and Nirenberg L. On functions of bounded mean oscillation. — «Comm. Pure Appl. Math»., 1961, v. 14, E 3.

УДК 517.946

Г. П. БОЙКО

ПРО ТРЕТЮ ЗОВНІШНЮ УЗАГАЛЬНЕНУ ЗАДАЧУ

У роботах [1—3, 8] досліджується узагальнена задача Неймана для рівняння Лапласа і однорідного еліптичного рівняння другого порядку в області $D\subset R^n$, $n\geqslant 2$, обмеженій поверхнею класу C^m і C^∞. Задача узагальнена в тому сенсі, що права частина граничної умови є узагальненою функцією. Доведені теореми єдності та зображення розв'язку, його властивості.

Ми розглядаємо третю зовнішню узагальнену (в тому ж сенсі) задачу для рівняння Шредінгера.

Нехай Ω — область в R^n, розташована зовні замкненої поверхні S класу C^∞; $\nu(y)$ — орт зовнішньої нормалі n_y до поверхні S в точці y; S_ε — поверхня, розміщена на відстані ε, $\varepsilon\geqslant 0$ по нормалі n від S; Σ_r — сфера радіуса r з центром в початку координат, що містить в собі S. Не порушуючи загальності, вважатимемо, що початок координат перебуває всередині поверхні S. Простір нескінченно диференційованих функцій, визначених на S (простір основних функцій) позначимо через $D(S)$, простір лінійних неперервних функціоналів над $D(S)$ (простір узагальнених функцій) — через $D'(S)$, дію узагальненої функції A на основну функцію φ — через $A[\varphi]$.

Постановка задачі. Нехай $F \in D'(S)$. Треба знайти розв'язок рівняння

$$\Delta u + [\omega^2 + c(x)]\, u = 0 \tag{1}$$

в області Ω, який задовольняє граничній умові

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} P u(x_\varepsilon)\, \varphi(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = F[\varphi] \tag{2}$$

для кожної $\varphi \in D(S)$, $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(y)$ при $x_\varepsilon = y + \varepsilon \nu(y)$; $y \in S$, а на безмежності — умову випромінювання вигляду

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\Sigma_r} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - i\omega u \right|^2 d\Sigma_r = 0, \tag{3}$$

де

$$\omega^2 = \text{const} > 0,\ \ P_y = \frac{\partial}{\partial n_y} + \sigma(y),\ \ \sigma \in D(S),\ \ c(x) \in C^\infty(\Omega).$$

Задача (1)—(3) з умовою на границі вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\,|_S = F,$$

де $F \in C^{(0,h)}$, була розглянута в [5]. В [6] знайдено фундаментальний розв'язок $\Phi(x, y)$ рівняння (1), який задовольняє умові (3), в припущенні, що в області Ω

$$c(x) = 0\ \left(|x|^{-\frac{n+1}{2} - \delta}\right),\ \ |x| \to \infty,\ \ \delta > 0.$$

Вважатимемо цю умову виконаною. Тоді мають місце такі твердження.

Лема 1. Для кожної $\varphi \in D(S)$

$$\int_S \varphi(x)\, P_x \Phi(x, y)\, dS \in D(S)$$

і рівномірно відносно $y \in S$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon)\, P_{x_\varepsilon} \Phi(x_\varepsilon, y)\, dS_\varepsilon = -\frac{1}{2}\varphi(y) + \int_S \varphi(x)\, P_x \Phi(x, y)\, dS.$$

Лема 1 є наслідком відповідної леми в [3].

Розглянемо такі інтегральні рівняння:

$$\varphi(y)+2\lambda\int_S \varphi(x)P_x\Phi(x,\ y)\,dS=0, \tag{4}$$

$$\psi(y)+2\lambda\int_S \psi(x)P_y\Phi(y,\ x)\,dS=0. \tag{5}$$

Лема 2. Число $\lambda=-1$ тоді і тільки тоді є характеристичним числом рангу r інтегральних рівнянь (4) і (5), коли ω^2 — власне число кратності r внутрішньої однорідної задачі Діріхле для рівняння (1).

Лема 2 доводиться методом, використаним в [7] при дослідженні граничних задач для рівняння Гельмгольца.

Якщо ω^2 — власне число кратності r внутрішньої однорідної задачі Діріхле для рівняння (1), то існує, згідно з [7], біортогональна і нормована система головних функцій $\varphi_l^i(y)$, $\psi_l^i(y)$ ($i=1$, $l=1,\ldots,p_1;\ \ldots;\ i=r$, $l=1,\ldots,p_r$) інтегральних рівнянь (4) і (5), що відповідає характеристичному числу $\lambda=-1$ рангу r кратності k. Тут $p_1\leqslant p_2\leqslant\ldots\leqslant p_r;$ $p_1+p_2+\ldots+p_r=k$. Ці функції визначаються із таких інтегральних рівнянь:

$$-\varphi_{p_i}^i(y)+2\int_S \varphi_{p_i}^i(x)P_x\Phi(x,\ y)\,dS=0,\quad i=1,\ldots,r;$$

$$-\varphi_{p_i-l}^i(y)+2\int_S \varphi_{p_i-l}^i(x)P_x\Phi(x,\ y)\,dS=\varphi_{p_i-l+1}^i(y),$$

$$l=1,\ldots,p_i-1;$$

$$-\psi_1^i(y)+2\int_S \psi_1^i(x)P_y\Phi(y,\ x)\,dS=0,\quad i=1,\ldots,r;$$

$$-\psi_l^i(y)+2\int_S \psi_l^i(x)P_y\Phi(y,\ x)\,dS=\psi_{l-1}^i(y),\quad l=2,\ldots,p_i,$$

причому

$$\int_S \varphi_j^i(y)\,\psi_l^m(y)\,dS=\begin{cases}1, & \text{якщо } i=m, j=l \text{ або } j=l-1,\\ 0 & \text{в інших випадках.}\end{cases}$$

Введемо такі позначення:

$$V'(S)=\{V\in D'(S): V[\varphi_{p_i}^i]=0,\quad i=1,\ldots,r\},$$

$$W'(S)=\{W\in D'(S): W[\varphi_1^i]=0,\quad i=1,\ldots,r\}.$$

Лема 3. Перетворення, задане співвідношенням

$$G[g]=F[\varphi_g], \tag{6}$$

де $g \in D(S)$, φ_g — розв'язок інтегрального рівняння

$$-\varphi(y) + 2\int_S \varphi(x) P_x \Phi(x, y)\, dS = g(y) - \sum_{i=1}^{r} B_i \varphi_1^i(y), \quad (7)$$

$$B_i = \int_S g(y)\, \psi_1^i(y)\, dS, \quad i = 1, \ldots, r$$

визначає ізоморфізм простору $V'(S)$ на $W'(S)$. Обернене перетворення визначається як

$$F[\varphi] = G\left[-\varphi(y) + 2\int_S \varphi(x) P_x \Phi(x, y)\, dS\right] \quad (8)$$

для кожної $\varphi \in D(S)$.

Твердження леми випливає з властивостей узагальнених функцій і розв'язків інтегрального рівняння (7).

Теорема 1. *Нехай* $F \in D'(S)$ *і*

$$G[g] = F[\varphi_g] - \sum_{i=1}^{r} F[\varphi_{p_i}^i] \int_S \varphi_g(y)\, \psi_{p_i}^i(y)\, dS, \quad (9)$$

де $g \in D(S)$, φ_g — *розв'язок інтегрального рівняння (7), тоді функція*

$$u(x) = 2G[\Phi(x, y)] + \sum_{i=1}^{r} F[\varphi_{p_i}^i] \times \quad (10)$$

$$\times \left(\sum_{j=i}^{r} C_j^i \int \psi_{p_j - p_i + 1}^i(y) P_y \Phi(x, y)\, dS\right), \quad x \in \Omega,$$

(де C_j^i — певні сталі) *є розв'язком задачі (1)—(3).*

Доведення. Аналогічно [7] можна показати, що

$$\psi_k^i(y) = \sum_{j=i}^{r} C_j^i \int_S \varphi_{p_j - k + 1}^j(x) P_y P_x \Phi(x, y)\, dS, \quad y \in \overline{\Omega},$$

$i = 1, \ldots, r$; $k = 1, \ldots, p_i$. Згідно з властивостями узагальнених функцій і фундаментального розв'язку $\Phi(x, y)$, функція (10) задовольняє рівняння (1) і умову (3). Покажемо, що вона задовольняє граничну умову (2).

Визначимо узагальнену функцію H таким співвідношенням:

$$H[\varphi] = F[\varphi] - \sum_{i=1}^{r} F[\varphi_{p_i}^i] \int_S \varphi(y)\, \psi_{p_i}^i(y)\, dS, \quad \varphi \in D(S).$$

Легко бачити, що $H \in V'(S)$, і тоді до узагальненої функції H можна застосувати лему 3. Застосовуючи до лівої частини граничної умови послідовно лему 5 з [1] і леми 1, 3, одержуємо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{S_\varepsilon} Pu(x_\varepsilon)\,\varphi(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon = G[-\varphi(y) + 2\int\limits_S \varphi(x)\,P_x\Phi(x, y)\,dS] +$$

$$+ \sum_{l=1}^{r} F[\varphi_{p_l}^{l}] \int\limits_S \varphi(y)\,\psi_{p_l}^{l}(y)\,dS = H[\varphi] +$$

$$+ \sum_{l=1}^{r} F[\varphi_{p_l}^{l}] \int\limits_S \varphi(y)\,\psi_{p_l}^{l}(y)\,dS = F[\varphi]$$

для кожної $\varphi \in D(S)$.

Т е о р е м а 2. *Розв'язок третьої зовнішньої узагальненої задачі для рівняння (1) єдиний.*

Теорема доводиться так само, як і теорема 2 із [3].

Аналогічні результати мають місце для третьої зовнішньої узагальненої задачі для рівняння

$$\sum_{j,\,e=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_e}\left(a_{je}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + (\omega^2 + c(x))\,u = 0,$$

де

$$a_{je}(x) \in C^\infty(\Omega);\ a_{je}(x) = \delta_{je},\ |x| \to \infty;$$

$$c(x) = 0\left(|x|^{-\frac{n+1}{2}-\delta}\right),$$

$$\delta > 0,\ |x| \to \infty.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Г у п а л о Г. С. Про узагальнену задачу Діріхле. — «Доповіді АН УРСР», 1966, № 7.
2. Г у п а л о Г. С. Про узагальнену задачу Неймана. — «Доповіді АН УРСР», 1967, № 3.
3. Г у п а л о Г. С. Про узагальнену задачу Неймана для диференціального рівняння другого порядку еліптичного типу. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1969, вип. 4.
4. Г е л ь ф а н д И. М., Ш и л о в Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М., Физматгиз, 1958.
5. Д а н и л о в а И. А. Построение функции Грина третьей внешней краевой задачи для уравнений Шредингера. — «Дифференциальные уравнения», 1970, т. 6, № 12.
6. Д а н и л о в а И. А. Третья внешняя краевая задача для эллиптического уравнения второго порядка. I. — «Дифференциальные уравнения», 1971, т. 7, № 4.
7. К у п р а д з е В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
8. S z m y d t Z. Sur un probléme de Neumann généralise. — «Ann. Polon. Math.», 1964, 15, № 3.

УДК 517.946

С. П. ЛАВРЕНЮК

ЄДИНІСТЬ І СТІЙКІСТЬ ДЕЯКИХ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

Нехай в однозв'язній області D_0 площини x, y заданий еліптичний диференціальний оператор порядку $2n (n \geqslant 1)$ [2]

$$Lu \equiv \sum_{i+j=2n} a_{ij}(x, y) \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^i \partial y^j} + \sum_{i+j \leqslant 2n-1} b_{ij}(x, y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = 0, \tag{1}$$

коефіцієнти якого мають скінченні і неперервні похідні до порядку, що дорівнює сумі їх індексів плюс одиниця. Крім того, припустимо, що в області D_0 корені рівняння характеристик будуть всі комплексні, обмежені, неперервні разом з своїми похідними перших $2n+1$ порядків і мають у всій області D_0 сталу кратність.

Нехай D — обмежена область, границя якої S належить класу $A^{(1, \lambda)}$, $D \subset D_0$, а $\mu(x, y)$, $\nu(x, y)$ — обмежені сумовані функції в області D_0.

Плоским потенціалом і потенціалом простого шару для рівняння (1) відповідно називатимемо функції

$$w(x, y; \mu, D) = \iint\limits_D \mu(\xi, \eta) \Omega(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta,$$

$$v(x, y;, \nu, S) = \int\limits_S \nu(\xi, \eta) \Omega(x, y; \xi, \eta) d_{\xi\eta} S,$$

де $\Omega(x, y; \xi, \eta)$ — фундаментальний розв'язок рівняння (1) в області D_0.

Задача 1. Нехай в області $D_0 \setminus D$ відомо значення плоского потенціалу $w(x, y; \mu, D)$. Потрібно знайти область D.

Задача 2. Припустимо, що в області $D_0 \setminus D$ відоме значення потенціалу простого шару $v(x, y; \nu, S)$. Потрібно знайти криву S.

Нехай $D_j (j=1, 2)$ — скінченні області, обмежені кривими S_j з класу $A^{(1, \lambda)}$, $\bar{D}_j \subset D_0$.

Легко довести лему.

Лема 1. Для того, щоб мали місце рівності

$$w(x, y; \mu_1, D_1) = w(x, y, \mu_2, D_2), \ (x, y) \in D_0 \setminus \bar{D}^e,$$

$$v(x, y; \nu_1, S_1) = v(x, y; \nu_2, S_2), \ (x, y) \in D_0 \setminus D^e$$

необхідно та достатньо, щоб для будь-якої функції $u(x, y)$, яка є розв'язком рівняння

$$L^* u = 0 \tag{2}$$

в області D_0', $\bar{D}^e \subset D_0' \subset \bar{D}_0' \subset D_0$, відповідно мали місце рівності

$$\iint_{D_1} \mu_1 u d\xi d\eta - \iint_{D_2} \mu_2 u d\xi d\eta = 0,$$

$$\int_{S_1} \nu_1 u ds - \int_{S_2} \nu_2 u ds = 0$$

(L^* — оператор, спряжений до L в сенсі Лагранжа).

Припускаємо, що оператор L^* можна зобразити у вигляді добутку двох операторів $L_1 \cdot L_2$, де

$$L_2 \equiv A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 A_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + B_1 \frac{\partial}{\partial x} + B_2 \frac{d}{dy} + C$$

є еліптичним оператором в області D_0, причому $C \geqslant 0$. Тоді очевидно, що кожна функція, яка є регулярним розв'язком рівняння

$$L_2 U = 0 \tag{3}$$

є також розв'язком рівняння (2). Справедлива лема.

Л е м а 2. Якщо наявні рівності

$$w(x, y; \mu_1, D_1) = w(x, y; \mu_2, D_2), \ (x, y) \in D_0 \setminus (\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2),$$

$$v(x, y; \nu_1, S_1) = v(x, y; \nu_2, S_2,) \ (x, y) \in D_0 \setminus (\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2),$$

то для довільної функції $u(x, y)$, яка є узагальненим в сенсі Вінера розв'язком рівняння (3) в області $(D_1 \cup D_2)$, відповідно мають місце рівності

$$\iint_{D_1} \mu_1 u d\xi d\eta = \iint_{D_2} \mu_2 u d\xi d\eta, \ \int_{S_1} \nu_1 u ds = \int_{S_2} \nu_2 u ds.$$

Використовуючи лему 2, легко довести ряд теорем єдиності задачі 1, справедливих для оберненої задачі ньютонівського потенціалу. Зокрема, справедлива наступна теорема.

Т е о р е м а 1. *Нехай області $D_j (j=1, 2)$, обмежені неперервно диференційованими кривими S_j, є зірковими відносно спільної точки, а неперервно диференційовану в D_0 функцію $\mu(x, y)$ можна зобразити у вигляді*

$$\mu = \rho^l \sigma(\varphi) \quad (l \geqslant 1)$$

(ρ, φ — *полярні координати точки x, y, причому початок координат перебуває в точці зірковості областей D_j). Тоді, якщо*

$$w(x, y; \mu_1, D_1) = w(x, y; \mu_1, D_2); \ (x, y) \in D_0 \setminus (\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2),$$

то $D_1 = D_2$.

Для задачі 2 справедлива теорема:

Теорема 2. *Нехай області* $D_j \subset D_0 (j=1, 2)$ *обмежені опуклими неперервно диференційованими кривими* S_j, *а* $\nu(x, y) \equiv \mathrm{const}$. *Якщо*

$$v(x, y; \nu, S_1) = v(x, y; \nu, S_2), \ (x, y) \in D_0 \setminus (\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2),$$

то $S_1 \equiv S_2$.

Покладемо надалі $L_2 \equiv \Delta$. Введемо позначення

$$v(x, y) = v(x, y; 1, S_1) - v(x, y; 1, S_2),$$
$$w(x, y) = w(x, y; 1, D_1) - w(x, y; 1, D_2),$$

S^e — границя області $D_1 \cup D_2$.

Теорема 3. *Нехай області* $D_j \subset D_0 (j=1, 2)$, *обмежені неперервно диференційованими кривими* S_j, *є зіркові відносно деякої точки* $0 \in D_0$ *і для будь-якої точки* $P \in S_j$ *виконується умова*

$$\gamma_0 \leqslant (\vec{OP}, \wedge\ \vec{t}_P) \leqslant \pi - \gamma_0,$$

де $\vec{t}_P$ *— дотична до* S_j *в точці* P, *а* $\gamma_0 > 0$ *— деяка стала.* Якщо

$$\sum_{i+k \leqslant 2n-1} \left| \frac{\partial^{i+k} w(x, y)}{\partial x^i \partial y^k} \right| \leqslant \varepsilon, \ (x, y) \in S^e,$$

то має місце оцінка

$$|f_1(\varphi) - f_2(\varphi)| \leqslant \frac{C_1}{\sqrt[4]{m}},$$

де число m визначається зі співвідношень

$$\left(\frac{1}{m+1}\right)^{2nm+2n+1} \leqslant \varepsilon \leqslant \left(\frac{1}{m}\right)^{2nm+1}.$$

Тут $\rho = f_j(\varphi)$ — рівняння кривих S_j в полярній системі координат з центром в точці O, а стала C_1 залежить від n, γ_0, D_0.

Теорема 4. *Нехай області* $D_j \subset D_0 (j=1, 2)$, *які обмежені відповідно кривими* S_j, *опуклі,* $D_1 \cap D_2 \neq 0$, *а функції* $f_j(\varphi)$ *двічі неперервно диференційовані на* $[0, 2\pi]$ *і*

$$|f'(\varphi)| + |f''(\varphi)| \leqslant M.$$

Тоді, якщо має місце нерівність

$$\sum_{i+k \leqslant 2n-1} \left| \frac{\partial^{i+k} v(x, y)}{\partial x^i \partial y^k} \right| \leqslant \varepsilon, \ (x, y) \in S^e,$$

справедлива оцінка

$$|f_1(\varphi) - f_2(\varphi)| \leqslant \frac{C_2}{\sqrt[4]{m}},$$

де число m визначається зі співвідношення

$$\left(\frac{1}{m+1}\right)^{2n(m+1)} \leqslant \varepsilon \leqslant \left(\frac{1}{m}\right)^{2nm},$$

а стала C_2 залежить від n, M, D_0.

Тут, як і вище, $\rho = f_j(\varphi)$ — рівняння кривих S_j в полярній системі координат з центром у деякій точці області $D_1 \cap D_2$.

Зауваження. Теореми 1, 2 доводяться аналогічно, як в [3], а доведення теорем 3 і 4 проводиться методом з [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск, 1962.
2. Леви Е. Е. О линейных эллиптических уравнениях в частных производных. — УМН, 1940, вып. 8.
3. Прилепко А. И. Обратные задачи обобщенных магнитных потенциалов. — «Дифференциальные уравнения», 1970, т. 6, № 1.

УДК 513.88

О. Г. СТОРОЖ

РОЗКЛАД ЗА ВЛАСНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОПЕРАТОРА, СПОРІДНЕНОГО З ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ

У цій статті досліджується розклад за власними функціями оператора T, про який йшла мова в [3]. Вирази $l[y]$, $t[y]$, крайові форми $U_1, \ldots, U_{2n}$, функції $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}$, $\psi_1, \ldots, \psi_p$, $\chi_1, \ldots, \chi_p$ тут означають те ж, що в [3]. Вважається, що оператор T регулярний, тобто задовольняє умови теореми 2 роботи [3].

Дослідимо спочатку резольвенту оператора T. Кожний розв'язок рівняння $(T-\lambda)y=f$ є розв'язком рівняння $t[y]-\lambda y=f$. В свою чергу y буде розв'язком цього рівняння тоді і тільки тоді, коли існують числа $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_p$, такі, що

$$l[y]-\lambda y = f - \sum_{j=1}^{n} a_j \varphi_{n+j} - \sum_{q=1}^{p} b_q \chi_q, \tag{1}$$

$$\begin{cases} U_{n+j}(y) = a_j, \quad j = 1, \ldots, n; \\ \int\limits_0^1 y\bar{\psi}_q dx = b_q, \quad q = 1, \ldots, p. \end{cases} \tag{2}$$

Загальний розв'язок рівняння (1) залежить від $2n+p$ сталих $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_p$, $c_1, \ldots, c_n$, які можна знайти, використовуючи умови (2) і той факт, що $y \in D(T)$. Провівши детальні обчислення, одержуємо такий висновок.

Теорема 1. *Резольвента оператора T є інтегральним оператором, точніше*

$$(T-\lambda)^{-1}f=\int_0^1 G(x,\ \xi,\ \lambda)\,f(\xi)\,d\xi, \tag{3}$$

де

$$G(x,\ \xi,\ \lambda)=(-1)^{2n+p}\frac{H(x,\ \xi,\ \lambda,)}{\Delta(\lambda)}; \tag{4}$$

а $H(x,\ \xi,\ \lambda)=$

$$=\begin{vmatrix}
y_1(x),\ldots,\ y_n(x),\ \{g,\ \varphi_{n+1}\},\ldots,\ \{g,\ \varphi_{2n}\},\ \{g,\ \chi_1\},\ldots,\ \{g,\ \chi_p\},\ g(x,\ \xi) \\
V_1(y_1),\ldots,\ V_1(y_n),\ V_1\{g,\ \varphi_{n+1}\},\ldots,\ V_1\{g,\ \varphi_{2n}\},\ V_1\{g,\ \chi_1\},\ldots,\ V_1\{g,\ \chi_p\},\ V_1(g) \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
V_n(y_1),\ldots,\ V_n(y_n),\ V_n\{g,\ \varphi_{n+1}\},\ldots,\ V_n\{g,\ \varphi_{2n}\},\ V_n\{g,\ \chi_1\},\ldots,\ V_n\{g,\chi_p\},\ V_n(g) \\
V_{n+1}(y_1),\ldots,V_{n+1}(y_n),V_{n+1}\{g,\varphi_{n+1}\}+1,\ldots,V_{n+1}\{g,\varphi_{2n}\},\ V_{n+1}\{g,\ \chi_1\},\ V_{n+1}\{g,\ \chi_p\},\ V_{n+1}(g) \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
V_{2n}(y_1),\ldots,\ V_{2n}(y_n)\ \ V_{2n}\{g,\ \varphi_{n+1}\},\ldots,\ V_{2n}\{g,\ \varphi_{2n}\}+1,\ V_{2n}\{g,\ \chi_1\},\ldots,\ V_{2n}\{g,\ \chi_p\},\ V_{2n}(g) \\
(y_1\ \psi_1),\ldots,(y_n,\ \psi_1),\ (\{g,\ \varphi_{n+1}\},\ \psi_1),\ldots,\ (\{g,\ \varphi_{2n}\},\ \psi_1),\ (\{g,\ \chi_1\},\ \psi_1),+1,\ldots,\ (\{g,\ \chi_p\},\ \psi_1),\ (g,\ \psi_1) \\
\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\
(y_1,\ \psi_p),\ldots,\ (y_n,\ \psi_p),\ (\{g,\ \varphi_{n+1}\},\ \psi_p),\ldots,\ (\{g,\ \varphi_{2n}\},\ \psi_p),\ (\{g,\ \chi_1\},\ \psi_p),\ldots,(\{g,\ \chi_p\},\ \psi_p)+1,\ (g,\ \psi_p)
\end{vmatrix}. \tag{5}$$

Далі

$$V_m(y)\overset{\mathrm{df}}{=}\begin{cases} U_m(y)-\int_0^1 y\bar{\varphi}_m dx, & m=1,\ldots n; \\ U_m(y), & m=n+1,\ldots,\ 2n, \end{cases}$$

$$\{g,\ \mu\}\overset{\mathrm{df}}{=}\int_0^1 g(x,\ \eta)\,\mu(\eta)\,d\eta,\ (\alpha,\ \beta)\overset{\mathrm{df}}{=}\int_0^1 \alpha(x)\,\overline{\beta(x)}\,dx,$$

$y_1, \ldots, y_n$ — деяка фундаментальна система розв'язків рівняння $l[y]=\lambda y$,

$$g(x, \xi) = \pm \frac{1}{2W(\xi)} \begin{vmatrix} y_1(x), & \ldots, & y_n(x) \\ y_1^{(n-2)}(\xi), & \ldots, & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1(\xi), & \ldots, & y_n(\xi) \end{vmatrix},$$

$$\text{де } W = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)}, & \ldots, & y_n^{(n-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1, & \ldots, & y_n \end{vmatrix},$$

причому в передостанній рівності знак «$+$» береться при $x>\xi$, а «$-$» при $x<\xi$. У виразах $V_m(g)$ всі похідні беруться за змінною x, $\Delta(\lambda)$ — алгебраїчне доповнення елемента $g(x, \xi)$ у визначнику (5). Власними числами оператора T є корені рівняння $\Delta(\lambda)=0$. Якщо ж число $\lambda=\lambda_0$ не є власним значенням оператора T, то розв'язок рівняння $(T-\lambda_0)y=f$ існує $\forall\ f\in L_2(0, 1)$.

Зауваження. Останні два твердження випливають з того, що $\Delta(\lambda)$ є визначником системи лінійних рівнянь для знаходження невідомих $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_p, c_1, \ldots, c_n$.

На функцію $G(x, \xi, \lambda)$, яку за аналогією з класичним випадком називатимемо функцією Гріна оператора $T-\lambda$, переносяться основні властивості звичайної функції Гріна.

Твердження. Якщо λ_0 — простий нуль функції $\Delta(\lambda)$, то

$$G(x, \xi, \lambda) = -\frac{y_0(x)\overline{z_0(\xi)}}{(\lambda-\lambda_0)\int\limits_0^1 y_0(\xi)\overline{z_0(\xi)}\,d\xi} + G_1(x, \xi, \lambda), \qquad (6)$$

де $G_1(x, \xi, \lambda)$ — аналітична в околі точки λ_0; y_0, z_0 — відповідно власні функції операторів T при $\lambda=\lambda_0$ та T^* при $\lambda=\overline{\lambda_0}$. Доведення таке ж, як і в класичному випадку.

Перейдемо тепер до розкладу за власними функціями. Нехай спочатку $T=T^*$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $Z(T)=\{0\}$. У протилежному разі розглянемо оператор $T-\lambda_0$ такий, що $Z(T-\lambda_0)=\{0\}$. Таке λ_0 існує, оскільки розглядуваний оператор має не більше ніж зчислену кількість власних значень [3]. Нехай $G(x, \xi)$ — функція Гріна оператора T

$$T^{-1}h = \int\limits_0^1 G(x, \xi)\, h(\xi)\, d\xi, \quad h\in D(T^{-1}) = L_2(0, 1),$$

T^{-1} — цілком неперервний самоспряжений оператор. Тому власні функції цього оператора, які одночасно є власними функціями оператора T, утворюють в $L_2(0, 1)$ повну систему, тобто

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, y_n) y_n, \quad f \in L_2(0, 1),$$

де $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ — ортонормована система власних функцій для T. Звідси випливає рівність Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, y_n)|^2.$$

Тепер розглянемо несамоспряжений випадок. Причому вважатимемо, що оператор T регулярний, а число $\lambda=0$ не є його власним значенням. Нехай $G(x, \xi)$ — функція Гріна оператора T. Розглянемо в λ-площині послідовність кіл Γ_k, $k=1, 2 \ldots$ з центром у початку координат, які мають такі властивості:

1) радіус R_k кола Γ_k необмежено зростає при $k \to \infty$;

2) існує $\delta > 0$ таке, що прообрази ρ_k в $S_0 \cup S_1 = \left\{\rho : 0 \leqslant \arg \rho \leqslant \frac{2\pi}{n}\right\}$ власних значень оператора T при відображенні $\lambda = -\rho^n$ знаходяться для достатньо великих k на відстані $\geqslant \delta$ від прообразів кожного з кіл Γ_k.

Зважаючи на асимптотичні властивості власних значень оператора T такі кола існують. Нехай $G(x, \xi, \lambda)$ — функція Гріна оператора $T-\lambda$, зокрема $G(x, \xi, 0) = G(x, \xi)$. Розглянемо інтеграл $I_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_k} \frac{G(x, \xi, \lambda)}{\lambda} d\lambda$. Згідно з теоремою про лишки

$$I_k = G(x, \xi) + \sum_{\nu=1}^{m_k} \frac{H_\nu(x, \xi)}{\lambda_\nu}, \tag{7}$$

де $H_\nu(x, \xi)$ — лишок функції $G(x, \xi, \lambda)$ відносно її полюса λ_ν, який, як ми вважаємо, є простим, а m_k — кількість цих полюсів у крузі, обмеженому колом Γ_k. Можна довести, що

$$\lim_{k\to\infty} I_k(x, \xi) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{H_k(x, \xi)}{\lambda_k} = 0 \tag{8}$$

і притому рівномірно відносно x та ξ. З огляду на (7) випливає, що має місце розклад

$$G(x, \xi) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{H_\nu(x, \xi)}{\lambda_\nu}. \tag{9}$$

Як і в класичному випадку, умови (8) виводяться з того, що має місце лема.

Л е м а. На колах Γ_k функція $G(x, \xi, \lambda)$ задовольняє нерівність

$$|G(x, \xi, \lambda)| \leqslant \frac{M}{|\lambda|^{\frac{n-1}{n}}},$$

де M — стала.

Ця лема доводиться так само, як і для диференціальних операторів, лише в класичному випадку тільки до останнього стовпця визначника H додається деяка лінійна комбінація перших його стовпців, а тут вона додається до кожного стовпця визначників H та Δ, за винятком n перших. З (9) випливає така теорема.

Т е о р е м а 2. *Якщо всі власні значення оператора (регулярного) T — прості нулі функції Δ, то для його функції Гріна має місце розклад в рівномірно збіжний ряд*

$$G(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{y_\nu(x)\overline{z_\nu(\xi)}}{\lambda_\nu}.$$

Т е о р е м а 3. *В умовах теореми 2 будь-яка функція f з області визначення оператора T розкладається в рівномірно збіжний ряд за його власними функціями*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int_0^1 f(\xi)\overline{z_\nu(\xi)}\, d\xi \right) y_\nu(x),$$

де y_ν, z_ν — власні функції операторів T, T^* при власних значеннях λ_ν, $\overline{\lambda}_\nu$.

Хід доведення такий же, як і у випадку диференціальних операторів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Л я н ц е В. Э. О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве. — «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», 1972, вып. 16.

2. Н а й м а р к М. А. Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1969.

3. С т о р о ж О. Г. Асимптотика власних значень і власних функцій операторів, споріднених з диференціальними. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1974, вип. 9.

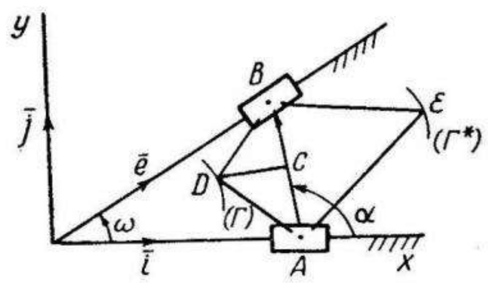
УДК 513.7

С. В. ДЕНИСКО

МЕХАНІЗМИ ДЛЯ ВІДТВОРЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ЕЛІПСІВ

Як відомо [1], точки D, E механізму, що зображений на рисунку 1, описують еліпси (Γ), (Γ^*) з спільним центром в точці 0.

Нехай еліпс (Γ) відображається на еліпс (Γ^*) так, що відповідними при цьому відображенні точками є точки, які вказаним механізмом відтворюються в один і той же момент часу. Це відображення для зручності називатимемо відображенням T.



Розглянемо відображення T, що задовольняє умову

$$l_{\widehat{P^*Q^*}} = ml_{\widehat{P^*Q^*}}, \qquad (1)$$

де $m=\text{const}$; $l_{\widehat{PQ}}$ — довжина довільної дуги $\widehat{PQ}$ еліпса (Γ); $l_{\widehat{P^*Q^*}}$ — довжина дуги $\widehat{P^*Q^*}$ еліпса (Γ^*), яка є образом дуги $\widehat{PQ}$.

Зобразимо умову (1) в іншому вигляді.

Нехай вектор $\overline{CД}$ перпендикулярний до вектора $\overline{AB}$, довжина якого l; $\bar{\rho}$, $\bar{\rho}^*$ — радіуси-вектори точок D, E, а α, ω — кути, які утворюють з ортом $\bar{i}$ відповідно вектор $\overline{AB}$ і орт $\bar{e}$.

Тоді рівняння еліпсів (Γ), (Γ^*) матимуть вигляд

$$\bar{\rho}=l\{\bar{i}[(\operatorname{ctg}\omega-\mu)\sin\alpha+(\lambda-1)\cos\alpha]+\bar{j}(\lambda\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\}, \qquad (2)$$

$$\bar{\rho}^*=l\{\bar{i}[(\operatorname{ctg}\omega-\mu^*)\sin\alpha+(\lambda^*-1)\cos\alpha]+ \\ +\bar{j}(\lambda^*\sin\alpha+\mu^*\cos\alpha)\}, \qquad (3)$$

де λ, μ, λ^*, μ^* — деякі сталі.

Оскільки

$$l_{\widehat{PQ}}=\int\limits_{\alpha_P}^{\alpha_Q}\left|\frac{d\bar{\rho}}{d\alpha}\right|d\alpha,\quad l_{\widehat{P^*Q^*}}=\int\limits_{\alpha_P}^{\alpha_Q}\left|\frac{d\rho^*}{d\alpha}\right|d\alpha,$$

то, зважаючи на рівняння (2), (3), дістаємо потрібний нам запис умови (1)

$$[(1-\lambda)^2+\mu^2]\sin^2\alpha+2[(1-\lambda)\operatorname{ctg}\omega-\mu]\sin\alpha\cos\alpha+ \\ +[(\operatorname{ctg}\omega-\mu)^2+\lambda^2]\cos^2\alpha=m^2\{[(1-\lambda^*)^2+ \\ +\mu^{*2}]\sin^2\alpha+2[(1-\lambda^*)\operatorname{ctg}\omega-\mu^*]\sin\alpha\cos\alpha+ \\ +[(\operatorname{ctg}\omega-\mu^*)^2+\lambda^{*2}]\cos^2\alpha\}.$$

Ми дістали тотожність відносно α. Тому умова (1) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$(1-\lambda)^2+\mu^2=m^2[(1-\lambda^*)^2+\mu^{*2}];$$
$$(1-\lambda)\operatorname{ctg}\omega-\mu=m^2[(1-\lambda^*)\operatorname{ctg}\omega-\mu^*];$$
$$(\operatorname{ctg}\omega-\mu)^2+\lambda^2=m^2[(\operatorname{ctg}\omega-\mu^*)^2+\lambda^{*2}]. \qquad (4)$$

Встановимо умову, необхідну і достатню для того, щоб еліпс (Γ) допускав відображення T, що задовольняє вимогу (1). Як видно з (4), має місце така система рівностей:

$$m^2\operatorname{ctg}\omega(\operatorname{ctg}\omega-\mu^*)+m^2\lambda^*=\frac{1}{2}(m^2-1)(1+\operatorname{ctg}^2\omega)+$$
$$+(\operatorname{ctg}\omega-\mu)\operatorname{ctg}\omega+\lambda;$$
$$m^2(\operatorname{ctg}\omega-\mu^*)-m^2\lambda^*\operatorname{ctg}\omega=\operatorname{ctg}\omega-\mu-\lambda\operatorname{ctg}\omega.$$

Звідси знаходимо

$$\operatorname{ctg}\omega-\mu^*=\frac{1}{m^2}\left(\frac{m^2+1}{2}\operatorname{ctg}\omega-\mu\right);\quad \lambda^*=\frac{1}{m^2}\left(\frac{m^2-1}{2}+\lambda\right). \qquad (5)$$

Підставивши ці вирази в третє рівняння системи (4), маємо

$$(m^2+1)\left(\lambda^2-\lambda+\mu^2-\mu\operatorname{ctg}\omega-\frac{m^2-1}{4\sin^2\omega}\right)=0.$$

Звідси, оскільки неможливо, як це видно з (5), щоб $m^2-1=0$, дістаємо шукану умову:

$$\lambda^2-\lambda+\mu^2-\mu\operatorname{ctg}\omega-\frac{m^2-1}{4\sin^2\omega}=0. \qquad (6)$$

З умови (6) виходить, що λ та μ задовольняють такі нерівності:

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{m}{\sin\omega}\right)\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{m}{\sin\omega}\right),$$
$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\omega-\frac{m}{\sin\omega}\right)\leqslant\mu\leqslant\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\omega+\frac{m}{\sin\omega}\right),$$

причому $0<\omega<\pi$.

Теорема 1. *Еліпси* (Γ), (Γ^*), *які допускають відображення T, що задовольняє умову* (1), *подібні.*

Доведення. З рівняння (2) маємо

$$x=l[(\operatorname{ctg}\omega-\mu)\sin\alpha+(\lambda-1)\cos\alpha];$$
$$y=l(\lambda\sin\alpha+\mu\cos\alpha),$$

де x, y — координати біжучої точки D еліпса (Γ). Звідси дістанемо таке рівняння еліпса (Γ):

$$(\lambda^2+\mu^2)x^2+2(\mu-\lambda\operatorname{ctg}\omega)xy+[(\operatorname{ctg}\omega-\mu)^2+$$
$$+(1-\lambda)^2]y^2=l^2(\mu\operatorname{ctg}\omega-\mu^2+\lambda-\lambda^2)^2. \qquad (7)$$

Беручи до уваги рівняння (6) і (7), за відомими формулами аналітичної геометрії [2] знаходимо велику і малу півосі еліпса (Г)

$$a = \frac{l(m+1)}{2\sin\omega},\ b = \frac{l|m-1|}{2\sin\omega}. \tag{8}$$

Аналогічно до попереднього велику і малу півосі еліпса (Г*) знаходимо за формулами

$$a^* = \frac{l(m+1)}{2m\sin\omega},\ b^* = \frac{l|m-1|}{2m\sin\omega}. \tag{9}$$

Порівнюючи (8) і (9), дістаємо

$$a = a^* m,\ b = b^* m,$$

а це і доводить нашу теорему.

Теорема 2. *Прямі, що з'єднують відповідні при відображенні T точки еліпсів* (Г), (Г*), *не можуть утворювати пучка.*

Доведення. Нехай прямі, що з'єднують відповідні при відображенні T точки еліпсів (Г), (Г*), утворюють пучок прямих з власним центром в точці S, координати якої ξ, η. Згідно з (2) та (3) умова паралельності векторів $\bar{\rho}-\bar{\rho}^*$, $\bar{SD}$ запишеться таким чином:

$$[\mu\lambda^*-\mu^*\lambda+(\lambda-\lambda^*)\operatorname{ctg}\omega]\sin^2\alpha+[\lambda-\lambda^*-$$
$$-(\mu-\mu^*)\operatorname{ctg}\omega]\sin\alpha\cos\alpha+(\mu^*\lambda-\lambda^*\mu+$$
$$+\mu-\mu^*)\cos^2\alpha-[(\mu-\mu^*)\eta+(\lambda-\lambda^*)\xi]\sin\alpha+$$
$$+[(\lambda-\lambda^*)\eta-(\mu-\mu^*)\xi]\cos\alpha=0.$$

Оскільки ми дістали тотожність відносно α, то

$$\begin{gathered}\mu\lambda^*-\mu^*\lambda+(\lambda-\lambda^*)\operatorname{ctg}\omega=0;\\ \lambda-\lambda^*-(\mu-\mu^*)\operatorname{ctg}\omega=0;\\ \mu^*\lambda-\lambda^*\mu+\mu-\mu^*=0;\\ (\mu-\mu^*)\eta+(\lambda-\lambda^*)\xi=0;\\ (\lambda-\lambda^*)\eta-(\mu-\mu^*)\xi=0.\end{gathered} \tag{10}$$

З огляду на першу та третю рівності системи (10) маємо

$$(\lambda-\lambda^*)\operatorname{ctg}\omega+\mu-\mu^*=0.$$

Ця рівність разом з другою рівністю системи (10) утворює систему, для якої $\lambda-\lambda^*$ і $\mu-\mu^*$ не можуть одноразово дорівнювати нулеві. Тому

$$\operatorname{ctg}^2\omega+1=0,$$

що неможливо.

Нехай тепер прямі, що з'єднують відповідні при відображенні T точки еліпсів (Γ), (Γ^*), утворюють пучок прямих з невласним центром. Тоді вектор $\rho-\rho^*$ колінеарний деякому сталому ненульовому вектору з координатами p, q. Отже, наявна рівність

$$\frac{(\lambda-\lambda^*)\cos\alpha-(\mu-\mu^*)\sin\alpha}{p}=\frac{(\lambda-\lambda^*)\sin\alpha+(\mu-\mu^*)\cos\alpha}{q}.$$

Це є тотожність відносно α, а тому

$$(\lambda-\lambda^*)p+(\mu-\mu^*)q=0;$$
$$(\lambda-\lambda^*)q-(\mu-\mu^*)p=0.$$

Звідси маємо $p=q=0$, що приводить до протиріччя. Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых. М., Изд-во АН СССР, 1959.
2. Делоне Б. Н, Райков Д. А. Аналитическая геометрия, т. 1. М.—Л., Гостехиздат, 1948.

УДК 517.913

К. С. КОСТЕНКО

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для рівняння

$$y^{(IV)}+p_1(x)y''+(p_2(x)+r(x)y'+p_3(x)y=0 \qquad (1)$$

розглянемо задачу Коші у вигляді

$$y^{(IV)}+A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=(A(x)-p_1(x)y''+$$
$$+(A'(x)-r(x))y'+(C(x)-p_3(x)y, \qquad (2)$$
$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',\ y''(x_0)=y_0'',\ y'''(x_0)=y_0''',$$

де

$$A(x)=\xi^{-2}(x)\left(\mu-5\xi''(x)\xi(x)+\frac{5}{2}\xi'^2(x)\right);$$
$$B(x)=\lambda\xi^{-3}(x)+A'(x); \qquad (3)$$
$$C(x)=\left(\nu-\frac{3}{2}\lambda\xi'(x)\right)\xi^{-4}(x)+0{,}3A''(x)+\left(0{,}3A(x)\right)^2,$$

$\xi(x)$ — довільна неперервно диференційована функція до четвертого порядку, μ, λ, ν — довільні сталі та $p_2(x)=\lambda\xi^{-3}(x)\neq 0$.

Нехай $\pm\beta_1$ — корені рівняння

$$\beta^6+2\mu\beta^4+(\mu^2-4\nu)\beta^2-\lambda^2=0, \tag{4}$$

причому

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu+\frac{\lambda}{\beta_1}\right)=-a_1^2<0,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu-\frac{\lambda}{\beta_1}\right)=-a_2^2<0.$$

Тоді [2] рівняння

$$y^{(\mathrm{IV})}+A(x)y''+B(x)y'+C(x)y=0 \tag{1_1}$$

має фундаментальну систему розв'язків:

$$\tilde{y}_1(x,x_0)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2}+a_1\right)\varphi(x,x_0)\right],$$

$$\tilde{y}_2(x,x_0)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2}-a_1\right)\varphi(x,x_0)\right],$$

$$\tilde{y}_3(x,x_0)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\left(-\frac{\beta_1}{2}+a_2\right)\varphi(x,x_0)\right],$$

$$\tilde{y}_4(x,x_0)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[-\left(\frac{\beta_1}{2}+a_2\right)\varphi(x,x_0)\right], \tag{5}$$

де $\varphi(x, x_0)=\int\limits_{x_0}^{x}\xi^{-1}(t)\,dt.$

За допомогою (5) задача Коші (2) зводиться до інтегрального рівняння Вольтерра:

$$y(x,x_0)=\xi^{\frac{3}{2}}(x)\left\{c_1\exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2}+a_1\right)\varphi(x,x_0)\right]+\right.$$

$$+c_2\exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2}-a_1\right)\varphi(x_1x_0)\right]+c_3\exp\left[\left(-\frac{\beta_1}{2}+a_2\right)\varphi(x,x_0)\right]+$$

$$+c_4\exp\left[-\left(\frac{\beta_1}{2}+a_2\right)\varphi(x,x_0)\right]+\int\limits_{x_0}^{x}\xi^{-\frac{1}{2}}(t)\left[P_1(t)\exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+a_1\right)\varphi(x_1t)\right]+P_2(t)\exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2}-a_1\right)\varphi(x,t)\right]+$$

$$+P_3(t)\exp\left[\left(-\frac{\beta_1}{2}+a_2\right)\varphi(x,t)\right]+P_4(t)\exp\left[-\left(\frac{\beta_1}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+a_2\right)\varphi(x,t)\right]\right]y(t,x_0)\,dt\right\}, \tag{6}$$

де

$$P_1(x) = 2a_2\left[(a_1-\beta_1)^2 - a_2^2\right]\left[\left(\frac{3}{2}\xi''(x)\,\xi(x) + \frac{3}{4}\xi'^2(x) - \right.\right.$$

$$\left. - (\beta_1+2a_1)\,\xi'(x) + \left(\frac{\beta_1}{2}+a_1\right)^2\right)(A(x)-p_1(x)) +$$

$$+ \xi(x)\,(3\xi'(x)-\beta_1-2a_1)\left(\frac{A'(x)+r(x)}{2} - p_1'(x)\right) +$$

$$\left. + \xi^2(x)\,(C(x)+r'(x)-p_3(x)-p_1''(x))\right]W^{-1};$$

$$P_2(x) = 2a_2\left[a_2^2-(a_1+\beta_1)^2\right]\left[\frac{3}{2}\xi''(x)\,\xi(x) + \frac{3}{4}\xi'^2(x) - \right.$$

$$\left. - (\beta_1-2a_1)\,\xi'(x) + \left(\frac{\beta_1}{2}-a_1\right)^2\right)(A(x)-p_1(x)) +$$

$$+ \xi(x)\,(3\xi'(x)-\beta_1+2a_1)\left(\frac{A'(x)+r(x)}{2} - p_1'(x)\right) +$$

$$\left. + \xi^2(x)\,(C(x)+r'(x)-p_3(x)-p_1''(x))\right]W^{-1}; \qquad (7)$$

$$P_3(x) = 2a_1\left[(a_2+\beta_1)^2-a_1^2\right]\left[\left(\frac{3}{2}\xi''(x)\,\xi(x) + \frac{3}{4}\xi'^2(x) + \right.\right.$$

$$\left. + (\beta_1-2a_2)\,\xi'(x) + \left(\frac{\beta_1}{2}-a_2\right)^2\right)(A(x)-p_1(x)) +$$

$$+ \xi(x)\,(3\xi'(x)+\beta_1-2a_2)\left(\frac{A'(x)+r(x)}{2} - p_1'(x)\right) +$$

$$\left. + \xi^2(x)\,(C(x)+r'(x)-p_3(x)-p_1''(x))\right]W^{-1};$$

$$P_4(x) = 2a_1\left[a_1^2-(a_2-\beta_1)^2\right]\left[\left(\frac{3}{2}\xi''(x)\,\xi(x) + \frac{3}{4}\xi'^2(x) + \right.\right.$$

$$\left. + (\beta_1+2a_2)\,\xi'(x) + \left(\frac{\beta_1}{2}+a_2\right)^2\right)(A(x)-p_1(x)) +$$

$$+ \xi(x)(3\xi'(x)+\beta_1+2a_2)\left(\frac{A'(x)+r(x)}{2} - p_1'(x)\right) +$$

$$\left. + \xi^2(x)(C(x)+r'(x)-p_3(x)-p_1''(x))\right]W^{-1};$$

$W = 4a_1a_2\left((2\beta_1^4 + 2\mu\beta_1^2 + \frac{\lambda^2}{\beta_1^2}\right)$, $c_1, \ldots, c_4$ залежать лише від $y_0, \ldots, y_0''', \xi(x_0), \ldots, \xi'''(x_0), p_1(x_0), p_1'(x_0)$.

Нехай $\xi(x) > 0$ на інтервалі $x_0 \leqslant x < \infty$ і $\frac{1}{2}\beta_1 + a_1 > -\frac{1}{2}\beta_1 + a_2$.

Інтегральне рівняння (6) заміною

$$y(x, x_0) = \xi^{\frac{3}{2}}(x) \exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2} + a_1\right)\varphi(x, x_0)\right] z(x, x_0) \tag{8}$$

зведеться до

$$z(x, x_0) = c_1 + c_2 \exp(-2a_1\varphi(x, x_0)) + c_3 \exp[(-\beta_1 - a_1 + a_2)\varphi(x, x_0)] + c_4 \exp[-(\beta_1 + a_1 + a_2)\varphi(x, x_0)] + \int_{x_0}^{x} \xi(t)\{P_1(t) + P_2(t)\exp(-2a_1\varphi(x, t)) + P_3(t)\exp[(-\beta_1 - a_1 + a_2)\varphi(x, t)] + P_4(t)\exp[-(\beta_1 + a_1 + a_2)\varphi(x, t)]\} z(t, x_0)\,dt. \tag{9}$$

Потім аналогічно до [4] за умов

$$\int_{x_0}^{\infty} b(x)\,dx < \infty, \ \lim_{x\to\infty} \varphi(x, x_0) = \infty, \ \lim_{x\to\infty} P_i(x)\xi^2(x) = 0, (i = 1, 2, 3, 4), \tag{10}$$

де

$$b(x) = 4|\xi(x)| \max_x [|P_1(x)|, |P_2(x)|, |P_3(x)|, |P_4(x)|], \tag{10$_1$}$$

з врахуванням (8) знаходимо асимптотичні формули для одного розв'язку рівняння (1)

$$y_1(x, x_0) = \xi^{\frac{3}{2}}(x) \exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2} + a_1\right)\varphi(x, x_0)\right](1 + o(1)), x \to \infty \tag{11}$$

та його першої похідної. При цьому головну частину цієї похідної можна одержати формальним диференціюванням головної частини формули (11).

Те ж саме маємо для похідних другого і третього порядку цього розв'язку за додаткових умов

$$\lim_{x\to\infty} (A(x) - p_1(x))\xi^2(x) = 0, \tag{12}$$

$$\lim_{x\to\infty} (p_1'(x) - r(x))\xi^3(x) = 0. \tag{13}$$

Щоб одержати асимптотичні зображення при $x \to \infty$ трьох інших лінійно незалежних розв'язків рівняння (1), введемо спочатку в ньому заміну

$$y = y_1(x, x_0) z, z' = u, \ u = (y_1(x, x_0))^{-\frac{4}{3}} v. \tag{14}$$

У результаті рівняння (1) зведеться до рівняння третього порядку

$$v''' + P_0(x) v' + Q_0(x) v = 0, \tag{15}$$

в якому

$$P_0(x) = 6 y_1'' y_1^{-1} - 4 (y_1' y_1^{-1})' - \frac{16}{3} (y_1' y_1^{-1})^2 + p_1(x),$$

$$Q_0(x) = \frac{128}{27} (y_1' y_1^{-1})^3 - 8 y_1' y_1'' y_1^{-2} + 4 y_1''' y_1^{-1} - \frac{4}{3} (y_1' y_1^{-1})'' +$$

$$+ \frac{2}{3} y_1' y_1^{-1} p_1(x) + p_2(x) + r(x).$$

Так само, якщо в рівнянні (1_1) з умовами (3) ввести заміну (14), в якій взяти $y_1(x, x_0) = \tilde{y}_1(x, x_0)$ з (5), то рівняння (1_1) зведеться до

$$v''' + P(x) v' + Q(x) v = 0, \tag{16}$$

де

$$P(x) = \xi^{-2}(x) \left[\mu + \frac{2}{3} \left(\frac{\beta_1}{2} + a_1 \right)^2 - 2 \xi''(x) \xi(x) + \xi'^2(x) \right],$$

$$Q(x) = \xi^{-3}(x) \left[\lambda + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\beta_1}{2} + a_1 \right) + \frac{20}{27} \left(\frac{\beta_1}{2} + a_1 \right)^3 - \right.$$

$$- \xi'''(x) \xi^2(x) + 2 \xi''(x) \xi'(x) \xi(x) -$$

$$\left. - \left(\mu + \frac{2}{3} \left(\frac{\beta_1}{2} + a_1 \right)^2 \right) \xi'(x) - \xi'^3(x) \right].$$

Рівняння (16) інтегрується в замкнутій формі [3], причому його фундаментальну систему розв'язків можна зобразити в явному вигляді за допомогою коренів рівняння

$$\alpha^3 + \mu_1 \alpha - \lambda_1 = 0, \tag{17}$$

де

$$\mu_1 = \mu + \frac{2}{3} \left(\frac{\beta_1}{2} + a_1 \right)^2, \quad \lambda_1 = \lambda + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\beta_1}{2} + a_1 \right) + \frac{20}{27} \left(\frac{\beta_1}{2} + a_1 \right)^3.$$

Легко переконатись, що $\alpha_1 = -\frac{2}{3}(\beta_1 - a_1)$, $\alpha_2 = -\frac{\alpha_1}{2} - a_2$, $\alpha_3 = -\frac{\alpha_1}{2} + a_2$ є корені рівняння (17), причому $\alpha_2 \alpha_3 - \frac{1}{4} \alpha_1^2 = -a_2^2 < 0$. Тоді [3], [1]

$$\hat{v}_1(x, x_0) = \xi(x) \exp \left[\left(\frac{\alpha_1}{2} + a_2 \right) \varphi(x, x_0) \right],$$

$$\hat{v}_2(x, x_0) = \xi(x) \exp \left[\left(\frac{\alpha_1}{2} - a_2 \right) \varphi(x, x_0) \right],$$

$$v_3(x, x_0) = \xi(x)\exp(-\alpha_1\varphi(x, x_0))$$

є фундаментальною системою розв'язків рівняння (16).

Записавши (15) у вигляді

$$v''' + P(x)v' + Q(x)v = (P(x) - P_0(x))v' + (Q(x) - Q_0(x))v,$$

можна переконатись, що умови (10), (12), заміна (14), асимптотична формула (11) для розв'язку $y_1(x, x_0)$ рівняння (1) і асимптотичні формули для похідних цього розв'язку першого і другого порядку забезпечують умови існування асимптотичних зображень фундаментальної системи розв'язків рівняння (15) при $x \to \infty$ та їх похідних до другого порядку включно.

Таким чином, для розв'язків рівняння (15) маємо [1] асимптотичні формули:

$$v_1(x, x_0) = \xi(x)\exp\left[\left(\frac{\alpha_1}{2} + a_2\right)\varphi(x, x_0)\right](1 + o(1)), \quad x \to \infty; \tag{18}$$

$$v_2(x, x_0) = \xi(x)\exp\left[\left(\frac{\alpha_1}{2} - a_2\right)\varphi(x, x_0)\right](1 + o(1)), \quad x \to \infty; \tag{19}$$

$$v_3(x, x_0) = \xi(x)\exp(-\alpha_1\varphi(x, x_0)(1 + o(1)), \quad x \to \infty. \tag{20}$$

Головні частини асимптотичних зображень для похідних першого і другого порядку цих розв'язків одержуємо формальним диференціюванням головних частин асимптотичних зображень розв'язків (18)—(20).

Використавши тепер (11), (18)—(20) та заміну (14), одержуємо:

$$y_2(x, x_0) = -y_1(x, x_0)\int_x^\infty [y_1(x, x_0)]^{-\frac{4}{3}} v_3(x, x_0)\,dx =$$

$$= \xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2} - a_1\right)\varphi(x, x_0)\right](1 + o(1)), x \to \infty; \tag{21}$$

$$y_3(x, x_0) = -y_1(x, x_0)\int_x^\infty [y_1(x, x_0)]^{-\frac{4}{3}} v_1(x, x_0)\,dx =$$

$$= \xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[\left(-\frac{\beta_1}{2} + a_2\right)\varphi(x, x_0)\right](1 + o(1)), \quad x \to \infty; \tag{22}$$

$$y_4(x, x_0) = -y_1(x, x_0)\int_x^\infty [y_1(x, x_0)]^{-\frac{4}{3}} v_2(x, x_0)\,dx =$$

$$= \xi^{\frac{3}{2}}(x)\exp\left[-\left(\frac{\beta_1}{2} + a_2\right)\varphi(x, x_0)\right](1 + o(1)), \quad x \to \infty. \tag{23}$$

Головні частини асимптотичних зображень для похідних останніх розв'язків до третього порядку включно також можна дістати формальним диференціюванням головних частин асимптотичних формул (21)—(23).

У випадку $\xi(x)<0$ ця схема приводить до тих же самих асимптотичних формул для розв'язків рівняння (1) і їх похідних.

Отже, має місце теорема.

Теорема. *Нехай в рівнянні (1) функція* $p_3(x)$ *неперервна, а* $r(x)$, $p_1(x)$ і $p_2(x)=\lambda\xi^{-3}(x)\neq 0$ *неперервно диференційовані відповідно один, два і три рази на інтервалі* $x_0\leqslant x<\infty$. *Нехай також* $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ *задовольняють умову* (3), $\pm\beta_1$ — *дійсні корені рівняння* (4), *причому* $\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu+\frac{\lambda}{\beta_1}\right)=-a_1^2<0$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^2}{2}+\mu-\frac{\lambda}{\beta_1}\right)=-a_2^2<0$.

Тоді, якщо мають місце умови (10), *в яких* $P_1(x),\ldots,P_4(x)$, $b(x)$ *визначені виразами* (7), (10_1) *і* $\varphi(x, x_0)=\int\limits_{x_0}^{x}\xi^{-1}(t)\,dt$, *рівняння* (1) *має фундаментальну систему розв'язків, асимптотичне зображення яких при* $x\to\infty$ *дають формули (11), (21)—(23).*

За цих же умов головні частини асимптотичних формул для перших похідних фундаментальної системи розв'язків рівняння (1) одержуємо формальним диференціюванням головних частин формул (11), (21)—(23).

Те ж саме маємо для похідних другого і третього порядку цих розв'язків за додаткових умов (12) і (13).

ЛІТЕРАТУРА

1. Костенко Е. С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. — «Дифференциальные уравнения», 1974, 10, № 10.

2. Костенко К. С. Лінійні звичайні диференціальні рівняння четвертого порядку, інтегровані в замкнутій формі. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1974, вип. 9.

3. Костенко К. С. Групові властивості звичайних лінійних диференціальних рівнянь третього порядку та зображення їх розв'язків у замкнутій формі. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1973, вип. 8.

4. Павлюк І. А. Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. Вид-во Київського ун-ту, 1970.

УДК 517.946

М. С. ВОЛОШИНА, Г.-В. С. ГУПАЛО

РОЗВ'ЯЗОК УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ БАГАТОЗВ'ЯЗНОЇ ОБЛАСТІ

У роботі [3] розв'язок задачі Діріхле для тривимірного рівняння Лапласа в багатозв'язній області шукають у вигляді комбінованого потенціалу (мікст-потенціалу) подвійного і простого шарів з невідомою густиною, для визначення якої одержують інтегральне рівняння, розв'язальне за першою теоремою Фредгольма (якщо ж розв'язок шукати у вигляді потенціалу подвійного шару, то інтегральне рівняння, як відомо, розв'язальне за третьою теоремою Фредгольма).

Ми, використовуючи результати робіт [1—3], розглядаємо задачу Діріхле для n-вимірного рівняння Лапласа в багатозв'язній області, коли на границі області задана узагальнена функція.

1. Нехай Ω_i — область, яка обмежена замкненими $(n-1)$-вимірними поверхнями $S_0, S_1, \ldots, S_m$ класу C^∞, які не перерізають одна одну, причому S_0 містить всередині всі інші поверхні (S_0 може бути відсутньою). Позначимо через $S = \bigcup\limits_{i=0}^{m} S_i$ повну границю Ω_i, через Ω_e — доповнення Ω_i до всього нескінченного простору. Нехай $\nu(y)$ — орт внутрішньої відносно Ω_i нормалі до поверхні S в точці y. Вважатимемо, що можна взяти таке $\varepsilon (0<\varepsilon<\varepsilon_1)$, що поверхня S_ε, яка перебуває на відстані ε по внутрішній нормалі в кожній точці від поверхні S, не мала самоперерізів. Через $D(S)$ позначимо простір нескінченно диференційованих (основних) функцій $\varphi(y)$ на S, а через $D'(S)$ — простір лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій) над $D(S)$, через $F[\varphi]$ — дію $F \in D'(S)$ на $\varphi \in D(S)$.

2. Постановка задачі. Нехай $F \in D'(S)$. Знайти гармонічну функцію $u(x)$ в області Ω_i, яка на границі S набуває узагальнених граничних значень F, тобто

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} u(x_\varepsilon)\, \varphi(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = F[\varphi] \quad \text{для кожної } \varphi \in D(S), \tag{1}$$

де $$\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(y), \; x_\varepsilon = y + \varepsilon \nu y, \; x_\varepsilon \in S_\varepsilon, \; y \in S.$$

Має місце лема.

Лема. Оператор $$(A\varphi)(x) = \int_S K(x, y)\, \varphi(y)\, d_y S, \quad x \in S$$

діє в $D(S)$, де $K(x, y) = \dfrac{\partial \omega(x, y)}{\partial \nu_y} + C\omega(x, y)$, $\omega(x, y)$ — фундаментальний розв'язок n-вимірного рівняння Лапласа, C — довільна додатна костанта.

Ця лема випливає з леми 2 [1] і леми 1 з [2].

Теорема. *Якщо* $F \in D'(S)$ *і* $G[g] = F[\varphi_g]$, *де* φ_g — *розв'язок інтегрального рівняння*

$$p\varphi(y) + \int_S K(x, y)\varphi(x)\, d_x S = g(y), \quad y \in S \tag{2}$$

$p = \frac{1}{2}\omega_n$, ω_n — *площа поверхні одиничної сфери в n-вимірному просторі, то функція* $u(x) = G[K(x, y)]$, $x \in \Omega_i$ *є розв'язком розглядуваної задачі.*

Безпосередньою перевіркою встановлюється виконання умови (1) та гармонічність функції $u(x)$ в області Ω_i.

Так само, як у [3], встановлюється, що інтегральне рівняння (2) розв'язальне за першою теоремою Фредгольма.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гупало Г. С. Про узагальнену задачу Діріхле. — ДАН УРСР, 1966, № 7.
2. Гупало Г. С. Про узагальнену задачу Неймана. — ДАН УРСР, 1967, № 3.
3. Купрадзе В. Д. К решению задачи Дирихле для многосвязной области. — «Сообщения Грузинского филиала АН СССР», 1940, № 1.

УДК 517.512

Г. П. ГУБАНОВ, Б. В. КОВАЛЬЧУК

НАБЛИЖЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЛІНІЙНИМИ СЕРЕДНІМИ ПОЛІНОМІВ, НАЙЛІПШИМИ В ЗАДАНІЙ СИСТЕМІ ТОЧОК

Нехай $\omega(t)$ заданий модуль неперервності, тобто неперервна на $[0; 2\pi]$ функція, яка задовільняє нерівності

$$\omega(0) = 0, \ 0 \leqslant \omega(t_2) - \omega(t_1) \leqslant \omega(t_2 - t_1) \ \text{для} \ t_2 > t_1.$$

Якщо $\omega(t)$ задовольняє додатково нерівність

$$\omega(t_1) + \omega(t_2) \leqslant 2\omega\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right),$$

то модуль неперервності називаємо опуклим.

Через H_ω позначимо клас функцій $f(x) \in C_{2\pi}$, модуль неперервності яких $\omega(f; t)$ не перевищує заданого модуля неперервності $\omega(t)$: $\omega(f; t) \leqslant \omega(t)$.

Нехай

$$T_{n-1}(f; x) = \frac{1}{2nq} \sum_{k=1}^{2nq} f(x_k) \sin \frac{2n-1}{2}(x - x_k) \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(x - x_k) -$$

тригонометричний поліном $(n-1)$-го порядку, найліпший в заданій системі рівновіддалених точок $x_k = \frac{k\pi}{nq}$, $k = \overline{1, 2nq}$, $q \geqslant 1$.

За допомогою трикутної матриці чисел $\lambda_i^{(n-1)}$ $(i = \overline{0, n}, \lambda_n^{(n-1)} = 1, \lambda_n^{(n-1)} = 0)$ кожній функції $f(x) \in C_{2\pi}$ поставимо у відповідність послідовність тригонометричних поліномів (при $q = 1$ такі поліноми ми розглядали в [2]):

$$T_{n-1}(f;\ x;\ \lambda) = \frac{2}{nq} \sum_{k=1}^{2nq} f(x_k) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{(n-1)} \cos i\,(x - x_k) \right\}.$$

Якщо $\lambda_i^{(n-1)} = \{1$ при $i = \overline{1, n-p}$; $(n-i-1)/(p+1)$ при $i = \overline{n-p-1, n-1}\}$, то відповідні поліноми $T_{n-1}(f;\ x;\ \lambda)$ перетворюються у поліноми типу Валле-Пуссена

$$V_{n-1}^p(f;\ x) = \frac{1}{nq\,(p+1)} \sum_{k=1}^{2nq} f(x_k) \sin \frac{2n-p-1}{2}(x - x_k) \sin \frac{p+1}{2}(x - x_k) \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}(x - x_k).$$

Якщо $\lambda_i^{(n-1)} = 1 - \frac{i}{n+1}$, то поліноми $T_{n-1}(f;\ x;\ \lambda)$, які у цьому випадку є середніми типу Фейєра, мають вигляд

$$\sigma_{n-1}^n(f;\ x) = \frac{1}{nq\,(n+1)} \sum_{k=1}^{2nq} f(x_k) \sin \frac{n+1}{2}(x - x_k) \sin \frac{n-1}{2}(x - x_k) \operatorname{cosec}^2 \frac{1}{2}(x - x_k).$$

Відзначимо, що поліноми $V_{n-1}^p(f;\ x)$ і $\sigma_{n-1}^n(f;\ x)$ при $q = 1$ вивчались відповідно в роботах [3], [4].

У цій роботі вивчається поведінка величини

$$\varepsilon_{T_{n-1}}(H_\omega;\ x;\ \lambda) = \sup_{f \in H_\omega} |f(x) - T_{n-1}(f;\ x;\ \lambda|.$$

Оцінку величини $\varepsilon_{T_{n-1}}(H_\omega;\ x;\ \lambda)$ при $q = 1$ і деяких обмеженнях на $\lambda_i^{(n-}$ на класі H_ω ми одержали раніше в роботі [2]. Позначимо

$$\Delta\lambda_i^{(n-1)} = \lambda_i^{(n-1)} - \lambda_{i+1}^{(n-1)},\ i = \overline{1, n-1},$$

$$\Delta^2\lambda_i^{(n-1)} = \lambda_i^{(n-1)} - 2\,\lambda_{i+1}^{(n-1)} + \lambda_{i+2}^{(n-1)},\ i = \overline{0, n-2}, \tag{1}$$

$$\tau(\omega;\ n;\ \lambda) = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(1+i)\ (n-i-1)}{n+1} |\Delta^2\lambda_i^{(n-1)}|\ \omega\left(\frac{1}{i+2}\right) + \omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Т е о р е м а 1. *Якщо послідовність* $\{\lambda_i^{(n-1)}\}$ *задовольняє умови*: $\Delta\lambda_i^{(n-1)} \geqslant 0$, *або* $\Delta\lambda_i^{(n-1)} \leqslant 0$ *для всіх* $i=\overline{1, \nu}$, (2), *а також* $\lambda_i^{(n-1)} \geqslant 0$, *або* $\lambda_i^{(n-)} \leqslant 0$ *для всіх* $i=\overline{\nu+3, n-1}$, (3) *то для будь-якого модуля неперервності* $\omega(t)$ *справедлива рівність*

$$\varepsilon_{T_{n-1}}(H_\omega;\ x;\ \lambda) = \frac{2}{\pi}\Theta_n(\omega;\ q;\ \lambda)\left\{A_n(\nu;\ \omega;\ \lambda) + \frac{1}{q}B_n(\omega;\ q;\ x) + \right.$$

$$\left. + C_n(\omega;\ q;\ x) + D_n(\omega;\ q;\ x)\right\} + 0\{\tau(\omega;\ n;\ \lambda)\},$$

де

$$A_n(\nu;\ \omega;\ \lambda) = \left|\sum_{i=0}^{\nu}\omega\left(\frac{1}{i+1}\right)\Delta\lambda^{(n-1)}\right|,$$

$$B_n(\omega;\ q;\ x) = \left|\sum_{i=\nu+3}^{n-1}\frac{\lambda_i^{(n-1)}}{n-k}\cos nx\right|\sum_{r=1}^{\mu}\omega\left(\frac{2\pi r}{nq}\right)\sin\frac{\pi r}{q}, \qquad (4)$$

$$C_n(\omega;\ q;\ x) = |\sin nx|\sum_{r=1}^{\mu}\omega\left(\frac{\pi q-2r}{nq}\right)\cos\frac{\pi r}{q},$$

$$D_n(\omega;\ q;\ x) = \frac{|\sin nx|}{2}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) + \frac{1+(-1)^q}{4}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)|\cos nx|,$$

$\mu = \left[\frac{q-1}{2}\right]$; $1 \leqslant q \leqslant n$; $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$; $\tau(\omega;\ n;\ \lambda)$ *визначається за формулою* (1), $\frac{1}{4} \leqslant \Theta_n(\omega,\ q;\ \lambda) \leqslant 1$, *причому* $\frac{1}{2} \leqslant \Theta_n(\omega;\ 1, \lambda) \leqslant 1$.

Якщо $q > n$ і матриця $\{\lambda_i^{(n-1)}\}$ задовольняє умови (2) і (3), то для будь-якого модуля неперервності

$$\varepsilon_{T_{n-1}}(H_\omega;\ x;\ \lambda) = \frac{2}{\pi}\Theta_n^*(\omega;\ q;\ \lambda)\left\{A_n(\nu;\ \omega;\ \lambda) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{q}B_n(\omega;\ q;\ x)\right\} + 0\{\tau(\omega;\ n;\lambda)\},$$

де

$$\frac{2}{5} < \Theta_n^*(\omega;\ q;\ \lambda) < 1,$$

а $A_n(\nu;\ \omega;\ \lambda)$ і $B_n(\omega;\ q;\ x)$ визначаються формулами (4).

Т е о р е м а 2. *Якщо* $\delta\int\limits_0^1\frac{\omega(t)}{t^2}dt = 0\{\omega(t)\}$, *то для будь-якої послідовності* $\{\lambda_i^{(n-1)}\}$, *яка задовольняє нерівність* (3) *при* $1 \leqslant q \leqslant n$, *маємо*

$$\varepsilon_{T_{n-1}}(H_\omega;\ x;\ \lambda)=\frac{2}{\pi}\Theta_n^{**}(\omega;\ q;\ \lambda)\left\{\frac{1}{q}B_n(\omega;\ q;\ x)+\right.$$

$$\left.+C_n(\omega;\ q;\ x)+D_n(\omega;\ q;\ x)\right\}+0\{\tau(\omega;\ n;\ \lambda)\},$$

де $\frac{2}{5}\leqslant\Theta_n^{**}(\omega;q;\lambda)\leqslant 1$, *причому* $\Theta_n^{**}(\omega;\ 1;\ \lambda)=1$, *а при* $q>n$

$$\varepsilon_{T_{n-1}}(H_\omega;\ x;\ \lambda)=\frac{2}{\pi q}\Theta_n^{***}(\omega;\ q;\ \lambda)\,B_n(\omega;\ q;\ x)+0\{\tau(\omega;\ n;\ \lambda)\},$$

де $\frac{2}{3}\leqslant\Theta_n^{***}(\omega;\ q;\ \lambda)\leqslant 1$, *величини* $B_n(\omega;\ q;\ x)$, $C_n(\omega;\ q;\ x)$, $D_n(\omega;\ q;\ x)$ *мають ті ж значення, що і в теоремі* 1.

У випадку опуклого модуля неперервності остання порядкова рівність перетворюється в асимптотичну рівність, тобто $\Theta_n^{***}(\omega,q;\lambda)=1$.

З а у в а ж е н н я. Якщо $\lambda_i^{(n-1)}=1$, то при опуклому модулі неперервності $\omega(t)$ і $q=1$ з рівності (5) одержимо результат роботи [5]

$$\varepsilon_{T_{n-1}}(f;\ x;\ H_\omega)=\frac{1}{\pi}\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)|\sin nx|\ln n+0\left(\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

При доведенні теорем 1, 2 ми спираємося на деякі результати робіт [2] і [4]. Результати, аналогічні до результатів теорем 1, 2 для поліномів найліпшого квадратичного наближення, одержані в роботі [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. Воробьева М. А. Приближение непрерывных периодических функций линейными средними полиномов наилучшего квадратического приближения. — «Известия вузов. Математика», 1971, № 8.
2. Губанов Г. П., Ковальчук Б. В. Про лінійні процеси наближення класів функцій тригонометричними поліномами, найкращими в заданій системі точок. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1969, вип. 4.
3. Губанов Г. П. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшица, некоторыми тригонометрическими полиномами. — «Прикладная механика», 1970, вып. 6.
4. Ковальчук Б. В., Губанов Г. П. Оцінка залишку при наближенні періодичних функцій зрізаними середніми від поліномів, найкращих в заданій системі точок — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1965, вип. 1.
5. Оловянишников В. М. Оценка остатка при приближении непрерывных периодических функций полиномами, наилучшими в заданной системе точек. — ДАН СССР, 1950, № 70.

УДК 518:512.36

Г. Г. ЦЕГЕЛИК

ВИДІЛЕННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ПАРАМЕТРІВ «МАКСИМАЛЬНИХ» ОБЛАСТЕЙ, ЯКІ НЕ МІСТЯТЬ НУЛІВ РЯДІВ ТИПУ ТЕЙЛОРА-ДІРІХЛЕ

У цій роботі за допомогою параметрів, які введені в [2, 3] для локалізації нулів рядів Лорана і Діріхле, встановлюються достатні умови існування «максимальних» областей, які не містять нулів рядів типу Тейлора-Діріхле.

Розглянемо абсолютно збіжний в деякій області D ряд [1]

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z}, \tag{1}$$

де m_n — цілі числа; λ_n — дійсні і

$$0 = m_0 < m_1 < \ldots, \ \lim_{n \to \infty} m_n = \infty; \ 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots, \ \lim_{n \to \infty} \lambda_n = \infty.$$

Нехай $|A_n| = a_n$ і $\{\alpha_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — довільний набір додатних чисел (параметрів), який задовольняє умову

$$\sum_{n \neq k} \alpha_n = \alpha_k, \tag{2}$$

де k — деякий фіксований індекс $(0 \leqslant k < \infty, A_k \neq 0)$.

Приймемо

$$r_1 = \max_{n<k} \left(\frac{a_n \alpha_k}{a_k \alpha_n} \right)^{\frac{\tau}{m_k - m_n}}, \quad R_1 = \inf_{n>k} \left(\frac{a_k \alpha_n}{a_n \alpha_k} \right)^{\frac{\tau}{m_n - m_k}},$$

$$r_2 = \max_{n<k} \left(\frac{a_n \alpha_k}{a_k \alpha_n} \right)^{\frac{1-\tau}{\lambda_k - \lambda_n}}, \quad R_2 = \inf_{n>k} \left(\frac{a_k \alpha_n}{a_n \alpha_k} \right)^{\frac{1-\tau}{\lambda_n - \lambda_k}}, \tag{3}$$

де $0 < \tau < 1$.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Якщо $0 < k < \infty$ та існує такий набір параметрів $\{\alpha_n\}$, який задовольняє умову (2), що $R_1 > r_1$, $R_2 > r_2$ і перетин кільця $r_1 \leqslant |z| \leqslant R_1$ із смугою $-\ln R_2 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant -\ln r_2$ не пустий, то ряд (1) не перетворюється в нуль в області*

$$\{r_1 \leqslant |z| \leqslant R_1, \ -\ln R_2 \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant -\ln r_2\}. \tag{4}$$

Доведення. Із формул (3) можна одержати такі співвідношения:

$$a_n r_1^{-(m_k-m_n)} e^{-(\lambda_k-\lambda_n)\ln r_2} \leqslant \frac{a_k}{\alpha_k}\alpha_n,\ (n<k),$$

$$a_n R_1^{m_n-m_k} e^{(\lambda_n-\lambda_k)\ln R_2} \leqslant \frac{a_k}{\alpha_k}\alpha_n,\ (n>k).$$

Для будь-яких ρ і x, які задовольняють умови $r_1 \leqslant \rho \leqslant R_1$ $(R_1 > r_1)$, $-\ln R_2 \leqslant x \leqslant -\ln r_2 (R_2 > r_2)$, одержимо

$$\sum_{n\neq k} a_n \rho^{m_n-m_k} e^{-(\lambda_n-\lambda_k)x} < \frac{a_k}{\alpha_k}\sum_{n\neq k}\alpha_n.$$

Використовуючи умову (2), останню нерівність перепишемо так

$$\sum_{n\neq k} a_n \rho^{m_n-m_k} e^{-(\lambda_n-\lambda_k)x} < a_k. \qquad (5)$$

Покажемо, що ряд (1) не перетворюється в нуль в області (4). Дійсно, припустимо, що $f(z_0)=0$, де $|z_0|=\rho$, $\mathrm{Re}(z_0)=x$ і $r_1 \leqslant \rho \leqslant R_1$, $-\ln R_2 \leqslant x \leqslant -\ln r_2$. Тоді

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n z_0^{m_n} e^{-\lambda_n z_0} = 0$$

або

$$-A_k z_0^{m_k} e^{-\lambda_k z_0} = \sum_{n\neq k} A_n z_0^{m_n} e^{-\lambda_n z_0}.$$

З останнього співвідношення одержуємо

$$a_k \leqslant \sum_{n\neq k} a_n \rho^{m_n-m_k} e^{-(\lambda_n-\lambda_k)x},$$

що суперечить (5).

Отже, зроблене припущення невірне, теорема доведена.

Аналогічно має місце інша теорема.

Теорема 2. Якщо $k=0$ *та існує такий набір параметрів* $\{\alpha_n\}$, *який задовольняє умову (2), що перетин круга* $|z|<R_1$ *із півплощиною* $\mathrm{Re}(z) > -\ln R_2$ *не пустий, то ряд (1) не перетворюється в нуль в області*

$$\{|z|<R_1,\ \mathrm{Re}(z) > -\ln R_2\}.$$

Приклад 1. Розглянемо ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2r)^n} z^n e^{-nz},\ \text{де}\ r \geqslant 1.$$

Нехай $k=0$ і $\alpha_0=1, \alpha_n = \frac{1}{2^n}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Тоді за теоремою 2 одержимо, що $f(z)$ не перетворюється в нуль в області

$$\{|z|<r^\tau,\ \mathrm{Re}(z)>(\tau-1)\ln r\}.$$

Якщо розглянути частинну суму ряду (1)

$$f_s(z)=\sum_{n=0}^{s} A_n z^{m_n} e^{-\lambda_n z},$$

то теореми 1,2 залишаються справедливими і в цьому випадку. Набір параметрів $\{\alpha_n\}$ досить брати для $n=0, 1, \ldots, s$. Для нулів $f_s(z)$ можна завжди ще вказати ліву границю, тобто має місце інша теорема.

Теорема 3. *Якщо $k=s$, то для будь-якого набору параметрів $\{\alpha_n\}$ $(n=0, 1, \ldots, s)$, який задовольняє умову (2), $f_s(z)$ не перетворюється в нуль в області*

$$\{|z|>r_1,\ \mathrm{Re}(z)<-\ln r_2\}.$$

Приклад 2. Нехай

$$f_2(z)=1+(4\sqrt{3}+4i)ze^{-0,5z}-iz^2e^{-z},$$

де $a_0=1$, $a_1=8$, $a_2=1$, $m_0=\lambda_0=0$, $m_1=1$, $m_2=2$, $\lambda_1=0,5$, $\lambda_2=1$.

Приймемо $k=1$, $\alpha_0=\frac{1}{2}$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=\frac{1}{2}$, $\tau=\frac{1}{2}$, тоді за теоремою 1 одержуємо, що $f_2(z)$ не перетворюється в нуль в області

$$\left\{\frac{1}{2}\leqslant|z|\leqslant 2,\ -\ln 4\leqslant \mathrm{Re}(z)\leqslant\ln 4\right\}.$$

Приклад 3. Нехай

$$f_2(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}z^{m_1}e^{-\lambda_1 z}+z^{m_2}e^{-\lambda_2 z},$$

де m_i, $\lambda_i (i=1,2)$ — будь-які дійсні числа, причому $0<m_1<m_2$, $0<\lambda_1<\lambda_2$.

Приймемо $k=2$, $\alpha_0=\alpha_1=\frac{1}{2}$, $\alpha_2=1$, тоді за теоремою 3 одержуємо, що $f_2(z)$ не перетворюється в нуль в області

$$\{|z|>1,\ \mathrm{Re}\,(z)<0\}.$$

Зауваження. Очевидно, що всі результати залишаються справедливими і у випадку, коли m_n і λ_n є будь-які дійсні числа, для яких виконується умова

$$m_0<m_1<\ldots\to\infty,\quad \lambda_0<\lambda_1<\ldots\to\infty.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Лунц Г. Л. О рядах типа Тейлора-Дирихле. — «Ивестия АН АрмССР», серия физико-математическая, 1961, **14**, № 2.
2. Цегелик Г. Г. Параметрическая локализация по модулям нулей полиномов и рядов Лорана. — «Известия вузов. Математика», 1967, № 12.
3. Цегелик Г. Г. Виділення смуг, в яких поліноми і ряди Діріхле но перетворюються в нуль. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1972, вип. 7.

УДК 519.21

І. Д. КВІТ

СИНГУЛЯРНІ СТРАТЕГІЇ

1. Сингулярні розподіли. Нехай випадкова змінна ξ набуває значення тільки на відрізку $0 \leqslant x \leqslant 1$, не має ні одного значення у відкритому інтервалі $c < x < 1-c$, $0 < c < \frac{1}{2}$, попадання її на два суміжні відрізки $0 \leqslant x \leqslant c$ та $1-c \leqslant x \leqslant 1$ — однаково ймовірне. Описана процедура трансфінітно повторюється на кожному з одержуваних крайніх відрізків. Визначена таким чином випадкова змінна ξ називається сингулярною, її явний вираз і графік функції розподілу $F(x;\ c)$ наведені в [1].

Сингулярна функція розподілу $F(x;\ c)$ неперервна та має властивості

$$F(x;\ c) + F(1-x;\ c) = 1,\ 0 < c < \frac{1}{2},\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1}$$

і

$$F(cx;\ c) = \frac{1}{2} F(x;\ c),\ 0 < c < \frac{1}{2},\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{2}$$

З (1) і (2) випливає таке співвідношення: якщо функція $f(x)$ неперервна $0 \leqslant x \leqslant 1$, то

$$\int_0^1 [2f(x) - f(cx) - f(1-cx)]\, dF(x;\ c) = 0,\ 0 < c < \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Справді, оскільки $dF(x;\ c) = 0$ на інтервалі $(c,\ 1-c)$, то

$$\int_0^1 f(x)\, dF(x;\ c) = \int_0^c f(x)\, dF(x;\ c) + \int_{1-c}^1 f(x)\, dF(x;\ c).$$

Але

$$\int_0^c f(x)\,dF(x;c) = \int_0^1 f(ct)\,dF(ct;\ c) =$$

$$= \int_0^1 f(ct)\,d\left[\frac{1}{2}F(t;\ c)\right] = \frac{1}{2}\int_0^1 f(cx)\,dF(x;\ c)$$

і

$$\int_{1-c}^1 f(x)\,dF(x;\ c) = \int_1^0 f(1-ct)\,dF(1-ct;\ c) =$$

$$= \int_1^0 f(1-ct)\,d\left[-F(ct;\ c)\right] = \frac{1}{2}\int_0^1 f(1-cx)\,dF(x;\ c).$$

Отже,

$$\int_0^1 f(x)\,dF(x;\ c) = \frac{1}{2}\int_0^1 [f(cx)+f(1-cx)]\,dF(x;\ c).$$

Звідси випливає тотожність (3).

Відзначимо, що при $c=0$ замість сингулярної функції розподілу дістаємо функцію розподілу дискретної випадкової змінної, яка набуває двох значень 0 і 1 з однаковими ймовірностями. Хоч у цьому разі співвідношення (2) не виконується, але тотожність (3) зберігається. Дійсно, при $c=0$ і $F(x;\ 0)$ зі стрибками висотою $\frac{1}{2}$ в точках 0 і 1 випливає, що

$$\int_0^1 [2f(x)-f(0)-f(1)]\,dF(x;0) =$$

$$= \frac{1}{2}[2f(0)-f(0)-f(1)] + \frac{1}{2}[2f(1)-f(0)-f(1)] = 0.$$

При $c=\frac{1}{2}$ замість сингулярної функції розподілу дістаємо функцію x, рівномірного на відрізку $[0,\ 1]$ розподілу. Очевидно, що для рівномірного розподілу виконується співвідношення (1) і (2). Отже, також виконується тотожність (3) з заміною c на $\frac{1}{2}$ та $dF\left(x;\ \frac{1}{2}\right)$ на dx.

Таким чином, при $0\leqslant c\leqslant \frac{1}{2}$ одержуємо однопараметричну сім'ю функцій розподілу $F(x;\ c)$, яка складається з дискретної функції розподілу при $c=0$, зі сингулярних функцій розподілу при $0<c<\frac{1}{2}$ та з абсолютно неперервної функції розподілу при $c=\frac{1}{2}$. Кожна функція розподілу цієї сім'ї задовольняє тотожність (3). Якщо в тотожності (3) прийняти $f(x)=x^n$, $(n=1, 2, \ldots)$, то дістанемо рекурентну формулу для початкових моментів $m_n(c)$ сім'ї випадкових змінних з функцією розподілу $F(x; c)$.

Справді, оскільки

$$2x^n-(cx)^n-(1-cx)^n=\{2-[1+(-1)^n]c^n\}x^n-$$
$$-\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^k c^k x^k$$

і

$$m_k(c)=\int_0^1 x^k dF(x; c),\ (k=1,\ 2,\ \ldots),\ m_0(c)=1,$$

то з тотожності (3) випливає формула

$$m_n(c)=\frac{1}{2-[1+(-1)^n]c^n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^k c^k m_k(c),\ 0\leq c\leq\frac{1}{2},$$
$$(n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{4}$$

Звідси бачимо, що всі $m_n(0)=\frac{1}{2}$, а $m_n\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{n+1}$.

Відомо, що функція розподілу зі зміною на одиничному відрізку цілком характеризується своїми початковими моментами (порівн. [2]). Отже, наша сім'я функцій розподілу $F(x; c)$ однозначно визначається початковими моментами (4).

2. Оптимальні сингулярні стратегії. Розглянемо стратегічну гру двох осіб A та B. Нехай чиста стратегія гравця A полягає в потаємному виборі числа x з одиничного відрізка [0, 1], а чиста стратегія гравця B полягає в потаємному виборі числа y з одиничного відрізку [0, 1]. Нехай у результаті проведених виборів чистих стратегій за відповідною згодою гравець B виплачує гравцеві A число монетних одиниць

$$\mathfrak{A}(x,\ y;\ a,\ b)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}[2x^k-(ax)^k-(1-ax)^k][2y^k-$$
$$-(by)^k-(1-by)^k],\ 0\leq x,\ y\leq 1;\ 0\leq a,\ b\leq\frac{1}{2}. \tag{5}$$

Платіжна функція (5) як сума геометричних прогресій неперервна раціональна функція на замкненому одиничному квадраті $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ при $0 \leqslant a, b \leqslant \frac{1}{2}$.

На підставі тотожності (3) випливає, що при довільному y, $0 \leqslant y \leqslant 1$, платіжна функція (5) задовольняє співвідношення

$$\int_0^1 \mathfrak{A}(x, y; a, b)\, dF(x; a) = 0$$

і при довільному x, $0 \leqslant x \leqslant 1$ — співвідношення

$$\int_0^1 \mathfrak{A}(x, y; a, b)\, dF(y; b) = 0.$$

Отже, ціна гри з платіжною функцією (5) дорівнює нулю, і $F(x; a)$ та $F(y; b)$ є оптимальні стратегії гравців відповідно A та B. Відзначимо, що при $a=b=0$ стратегії гравців A та B — дискретні, при $0 < a, b < \frac{1}{2}$ — сингулярні, а при $a=b=\frac{1}{2}$ — абсолютно неперервні.

Покажемо, що $F(x; a)$ та $F(y; b)$ — єдині оптимальні стратегії гравців A та B відповідно в грі з платіжною функцією (5).

Дійсно, припустимо, що гравці A та B мають ще якісь оптимальні стратегії, скажімо, $G(x)$ та $H(y)$ відповідно. Приймемо

$$\mu_k(G) = \int_0^1 [2x^k - (ax)^k - (1-ax)^k]\, dG(x),$$

$$\mu_k(H) = \int_0^1 [2y^k - (by)^k - (1-by)^k]\, dH(y), \quad (k=1,2,\ldots)$$

Оскільки $G(x)$ — оптимальна стратегія гравця A, то для всіх $y \in [0, 1]$ повинна виконуватися нерівність

$$\int_0^1 \mathfrak{A}(x, y; a, b)\, dG(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mu_k(G) [2y^k - (by)^k - (1-by)^k] \geqslant 0.$$

Проінтегрувавши останню нерівність за $H(y)$, дістаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mu_k(G)\, \mu_k(H) \geqslant 0.$$

Аналогічно (оскільки $H(y)$ — оптимальна стратегія гравця B) для всіх $x \in [0, 1]$ повинна виконуватися нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mu_k(G) \mu_k(H) \leqslant 0.$$

З останніх двох нерівностей випливає рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mu_k(G) \mu_k(H) = 0. \tag{6}$$

Бачимо, що при $a = b$ можна прийняти $G \equiv H$ і отже,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mu_k^2(G) = 0; \ \mu_k(G) = 0, \ (k = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Оскільки завжди

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mu_k(G) \mu_k(H) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mu_k^2(G) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \mu_k^2(H),$$

то на підставі (7) випливає, що в сумі (6) кожний множник $\mu_k(G)$ і $\mu_k(H)$ дорівнює нулю, тобто, що

$$\int_0^1 [2x^k - (ax)^k - (1-ax)^k] \, dG(x) = 0,$$

$$\int_0^1 [2y^k - (by)^k - (1-by)^k] \, dH(y) = 0, \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Звідси та з тотожності (3) бачимо, що початкові моменти розподілів $G(x)$ і $H(y)$ задовольняють рекурентне співвідношення (4) відповідно при $c = a$ та $c = b$. Отже, за однозначністю визначення функції розподілу зі зміною на одиничному відрізку її початковими моментами G і H збігаються з функцією розподілу $F(x; c)$ відповідно при $c = a$ та $c = b$. Таким чином, $F(x; a)$ та $F(y; b)$ — єдині оптимальні стратегії гравців A та B у грі з платіжною функцією (5).

Зауважимо, що залежно від значень параметрів a та b з відрізка $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ у платіжній функції (5), маємо дев'ять типів пар оптимальних стратегій: (дискретна, дискретна), (дискретна, сингулярна), ..., (абсолютно неперервна, абсолютно неперервна). При $a=b=0$ платіжна функція (5) набуває вигляду

$$\mathfrak{A}(x,\ y)=\frac{4xy}{2-xy}-\frac{2x}{2-x}-\frac{2y}{2-y}+1.$$

Оскільки тепер єдині оптимальні стратегії гравців задані функціями розподілу, що мають у точках 0 і 1 стрибки висотою $\frac{1}{2}$, то гра задається платіжною матрицею

$$\begin{array}{c|cc} x \backslash y & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}. \qquad (8)$$

Незалежно від попереднього легко перевірити, що оптимальні змішані стратегії гравців у грі з матрицею (8) задаються вектором $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ і що ціна гри дорівнює нулю. Випадок оптимальних стратегій типу (сингулярна, сингулярна) при $a=b=\frac{1}{3}$ розглянуто в [3].

При $a=b=1$ платіжна функція (5) набуває вигляду

$$\mathfrak{A}(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}[x^k-(1-x)^k]\,[y^k-(1-y)^k] \qquad (9)$$

і має сідлову точку $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Оскільки для всякої функції розподілу $F(x)$ зі зміною на відрізку [0, 1], яка задовольняє умову

$$F(x)+F(1-x)=1, \quad 0\leqslant x\leqslant 1 \qquad (10)$$

і довільної неперервної на відрізку [0, 1] функції $f(x)$ виконується співвідношення

$$\int_0^1 [f(x)-f(1-x]\,dF(x)=0,$$

то, очевидно, така функція розподілу буде оптимальною стратегією кожного гравця у грі з платіжною функцією (9). Зокрема, це можуть бути сингулярні функції розподілу з властивістю (1), що є частинним випадком (10), а також невластивий розподіл з одиничним стрибком у точці $x=\frac{1}{2}$. Таким чином, у грі з платіжною функцією (9) кожний гравець має безліч оптимальних стратегій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Квіт І. Д. Характеристичні функції. Вид-во Львівського ун-ту, 1972.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., «Мир», 1967.
3. Gross O. A rational game on the square. Contributions to the theory of games, III, Princeton (1957), 307—311.

УДК 537.533.33

В. Г. КОСТЕНКО, Л. О. РОМАНІВ

ПРО МЕТОД РОЗРАХУНКУ ЕЛЕКТРОСТАТИЧНИХ ПОЛІВ З ПОРУШЕНОЮ ОСЬОВОЮ СИМЕТРІЄЮ

При виготовленні електронно-оптичних систем (ЕОС) внаслідок неточностей майже завжди порушується їх осьова симетрія. Тому виникає необхідність дослідження впливу відхилень від симетрії на роботу даних систем. При цьому в першу чергу потрібно визначити зміни в електростатичному полі.

У цій роботі описується наближена методика визначення поля ЕОС з незначно порушеною осьовою симетрією внаслідок зміщення осей окремих її електродів.

Нехай осесиметрична ЕОС складається з n електродів, обмежених поверхнями обертання S_i $(i=1, \ldots, n)$, твірні L_i яких гладкі замкнені криві. І нехай осі окремих електродів незначно зміщені. Зміщення осі i-го електроду характеризуємо параметром $\alpha_i(|\alpha_i| \ll 1)$, де α_i — віддаль від осі зміщеного електроду до осі симетричної системи, яку приймемо за вісь OZ циліндричної системи координат $(rZ\Theta)$.

Поверхні зміщених електродів позначимо через S_i^*. Розрахунок поля U^*, зумовленого даною збуреною системою, зводиться, як відомо, до розв'язку граничної задачі

$$\Delta U^* = 0 \text{ зовні } S_i^*, \ (1) \quad U^*/S_i^* = C_i. \ (2) \tag{2}$$

На основі методу збурень [3] зобразимо потенціал U^* у вигляді

$$U^*(M) = U(M) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j U_j(M) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^2 U_{jj}(M) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{t=j}^{n} \alpha_j \alpha_t U_{jt} + O(\alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n}), \ k_1 + \ldots + k_n = 3, \tag{3}$$

де $U(M)$ — осесиметричний потенціал, який є розв'язком задачі

$$\Delta U=0 \text{ зовні } S_i, \quad (4) \qquad U/S_i=C_i \quad (5)$$

$U_j(M)$, $U_{jt}(M)$ — назвемо відповідно збуреннями 1-го і 2-го порядку. Ці функції задовольняють рівняння Лапласа зовні поверхонь S_i

$$\Delta U_j=0, \quad (6) \quad \Delta U_{jt}=0. \qquad (7)$$

Для виводу граничних умов на поверхнях S_i встановимо взаємооднозначну відповідність між точками S_i і S_i^*. Вважатимемо, що кожна точка M_i поверхні S_i переходить внаслідок збурення в точку M_i^*, яка лежить в півплощині $\Theta=\Theta_i$ на віддалі α_i від M_i, де Θ_i — півплощина, в якій лежить вісь збуреного i-го електроду.

Вважаючи поверхні електродів еквіпотенціальними і розкладаючи потенціал $U^*(M^*)$ в околі точки M, за формулою Тейлора з врахуванням (2), (3), (5) дістаємо граничні умови для збурень U_j на поверхнях S_i

$$U_j(M_i)=\begin{cases} -\dfrac{\partial U}{\partial r}\cos(\Theta-\Theta_i), & j=i, \\ 0, & j\neq i, \ 1\leqslant j\leqslant n, \end{cases} \qquad 1\leqslant i\leqslant n. \qquad (8)$$

Зобразимо $U_j(M)$ $(j=1, \ldots, n)$ у вигляді

$$U_j=\varphi_j\cos(\Theta-\Theta_j), \qquad (9)$$

де функції φ_j задовольняють рівняння

$$\Delta\varphi_j-\frac{1}{r^2}\varphi_j=0 \qquad (10)$$

і граничні умови

$$\varphi_j(M_i)=\begin{cases} -\dfrac{\partial U}{\partial r}, & j=i, \\ 0, & j\neq i, \ 1\leqslant j\leqslant n, \end{cases} \qquad i=1, \ldots, n. \qquad (11)$$

Аналогічно одержуємо для U_{jt}

$$U_{jt}=\varphi_{jt}^{(0)}\cos(\Theta_j-\Theta_t)+\varphi_{jt}^{(2)}\cos\left(\Theta-\frac{\Theta_j+\Theta_t}{2}\right), \qquad (12)$$

$$1\leqslant j\leqslant n, \ j\leqslant t\leqslant n,$$

де функції $\varphi_{jt}^{(0)}$ і $\varphi_{jt}^{(2)}$ задовольняють відповідно рівняння

$$\Delta\varphi_{jt}^{(0)}=0, \ (13) \qquad \Delta\varphi_{jt}^{(2)}-\frac{4}{r^2}\varphi_{jt}^{(2)}=0 \quad (14)$$

і граничні умови

$$\varphi_{jt}^{(0)}(Mi)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2r}\dfrac{\partial U}{\partial r}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2}-\dfrac{1}{r}\varphi_j-\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial r},\ j=t=i,\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varphi_t}{\partial r}-\dfrac{1}{2r}\varphi_t,\ j=i,\ j<t\leqslant n,\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial r}-\dfrac{1}{2r}\varphi_j,\ t=i,\ 1\leqslant j<t,\\ 0,\ j\neq i,\ t\neq i,\ 1\leqslant j\leqslant n,\ j\leqslant t\leqslant n,\end{cases} \tag{15}$$

$$\varphi_{jt}^{(2)}(M_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{2r}\dfrac{\partial U}{\partial r}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\varphi_j-\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial r},\ j=t=i,\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varphi_t}{\partial r}+\dfrac{1}{2r}\varphi_t,\ j=i,\ j<t\leqslant n,\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial r}+\dfrac{1}{2r}\varphi_j,\ t=i,\ 1\leqslant j<t,\\ 0,\ j\neq i,\ t\neq i,\ 1\leqslant j\leqslant n,\ j\leqslant t\leqslant n,\\ \qquad i=1,\ \ldots,\ n.\end{cases} \tag{16}$$

Таким чином, визначення збуреного потенціалу U^* зводиться до розв'язання послідовності осесиметричних граничних задач (4), (5), (10), (11), (13), (15); (14), (16), причому має місце формула

$$U^*(r,\ z,\ \Theta)=U(r,\ z)+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_j\cos(\Theta-\Theta_j)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j^2[\varphi_{jj}^{(0)}+\varphi_{jj}^{(2)}\cos 2(\Theta-\Theta_j)]+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{t=j+1}^{n}\alpha_j\alpha_t\left[\varphi_{jt}^{(0)}\cos(\Theta_j-\Theta_t)+\varphi_{jt}^{(2)}\cos 2\left(\Theta-\frac{\Theta_j+\Theta_t}{2}\right)\right]+$$

$$+0(\alpha_1^{k_1}\ldots\alpha_n^{k_n}),\ k_1+\ldots+k_n=3. \tag{17}$$

Розв'язання цих задач зводиться за допомогою теорії потенціалу до інтегральних рівнянь.

Осесиметричний потенціал U зображається потенціалом простого шару з густиною, розподіленою на серединній поверхні $S'=U_iS_i'$ [1], для визначення якої отримується інтегральне рівняння Фредгольма 1-го роду

$$\int_{L'} g(\tau)\frac{K(k)\,de}{\sqrt{[r+R(\tau)]^2+[z-\xi(\tau)]^2}}\Bigg|_L=U\Bigg|_L, \tag{18}$$

де

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};\quad k^2=\frac{4rR(\tau)}{[r+R(\tau)]^2+[z-\xi(\tau)]^2};$$

L' — твірна поверхні S', задана рівнянням в параметричній формі

$$R=R(\tau),\quad \xi=\xi(\tau).$$

Рівняння (18) розв'язується методом коллокації з зображенням густини в спеціальному вигляді [2].

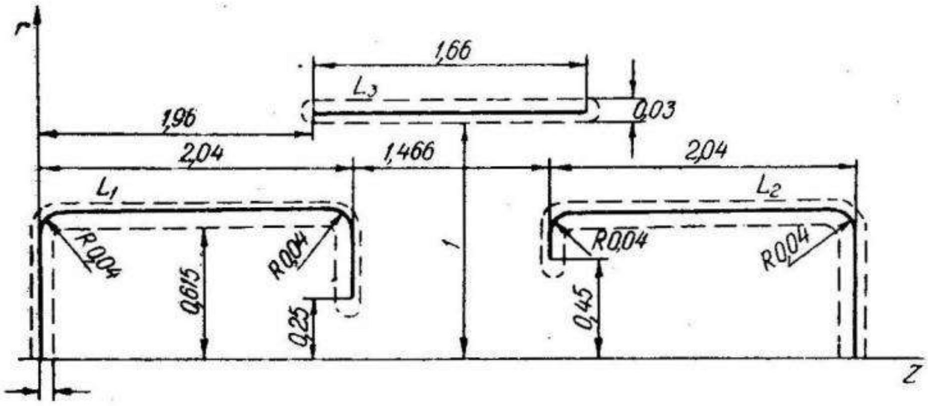


Рис. 1.

Задачі (10), (11); (14), (16) зводяться до відповідних задач для гармонійних функцій

$$\psi_j=\varphi_j\cos\Theta,\quad \psi_{jt}^{(2)}=\varphi_{jt}^{(2)}\cos 2\Theta.$$

Розв'язок останніх за допомогою потенціалів простого і подвійного шарів зводиться до інтегральних рівнянь Фредгольма 1-го роду [2].

Точність розв'язку одержаних задач визначається точністю задоволення відповідних граничних умов і, як показала практика розрахунків різних ЕОС, похибка не перевищує в середньому 0,1%.

За цією методикою розраховано електростатичне поле ЕОС, половина меридіонального перетину якої в незбуреному вигляді і розміри у відносних одиницях (за одиницю прийнято 7 *мм*) показані на рисунку.

Зміщення осей окремих електродів характеризується відповідно параметрами $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$, $\alpha_3=0$, $\Theta_1=\Theta_2=0$.

Граничні значення потенціалу приймали

$$U(r,z)\big|_{L_1}=U(r,z)\big|_{L_2}=1,\ U(r,z)\big|_{L_3}=0.$$

У таблиці наведені значення при $r=0$ осесиметричного потенціалу U і збуреного U^* для різних значень параметрів збурення α.

Розподіл на осі OZ осесиметричного потенціалу U і збуреного потенціалу U^* при різних значеннях параметрів збурення α

z	$U(0, z)$	$U^*(0, z, 0)$			
		$\alpha=0{,}01$	$\alpha=0{,}02$	$\alpha=0{,}03$	$\alpha=0{,}04$
1	0,99961	0,99961	0,99962	0,99962	0,99964
1,2	0,99921	0,99921	0,99922	0,99923	0,99925
1,4	0,99825	0,99825	0,99827	0,99829	0,99833
1,6	0,99564	0,99565	0,99568	0,99574	0,99582
1,8	0,98667	0,98670	0,98681	0,98699	0,98724
2,0	0,94158	0,94174	0,94221	0,94299	0,94409
2,2	0,78058	0,78083	0,78157	0,78280	0,78452
2,4	0,58462	0,58493	0,58586	0,58742	0,58959
2,6	0,45648	0,45681	0,45782	0,45949	0,46183
2,8	0,41178	0,41212	0,41314	0,41486	0,41726
3,0	0,44814	0,44850	0,44959	0,45140	0,45395
3,2	0,55896	0,55934	0,56048	0,56239	0,56504
3,4	0,71738	0,71773	0,71877	0,72051	0,72294
3,6	0,85907	0,85931	0,86002	0,86122	0,86290
3.8	0,93864	0,93876	0,93912	0,93972	0,94056
4,0	0,97338	0,97343	0,97360	0,97387	0,97425
4,2	0,98814	0,98817	0,98824	0,98837	0,98855
4,4	0,99460	0,99461	0,99465	0,99471	0,99480
4,6	0,99751	0,99752	0,99754	0,99757	0,99762
4,8	0,99885	0,99885	0,99887	0,99889	0,99892
5,0	0,99947	0,99947	0,99948	0,99950	0,99951

ЛІТЕРАТУРА

1. Прусов И. А. [и др.]. Расчет электрического поля системы электродов малой толщины методом нелинейных параметров. — В сб.: Вычислительные системы. Новосибирск. 1967.

2. Романив Л. Е.. Костенко В. Г. О возможности определения потенциала электростатического поля с незначительно нарушенной осевой симметрией. — «Теоретическая электротехника», 1972, вып. 14.

3. Sturrock P. A. Phil. Trans., A 243, 868, 1951.

УДК 531.8

І. В. ОГІРКО

УТОЧНЕНИЙ РОЗРАХУНОК ГНУЧКИХ ПЛАСТИН УЗАГАЛЬНЕНИМ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Чисельним ітераційним методом розв'язана задача * про пружну осесиметричну деформацію круглих гнучких пластин з підкріпленим краєм. Складена алгольна програма, яка дає змогу всебічно дослідити їх напружено-деформований стан під довільним осесиметричним навантаженням.

1. Осесиметричний згин круглої пластинки з концентричним тонким пружним ребром.

---

* Робота виконана під керівництвом проф. Н. П. Флейшмана.

Кругла пружна гнучка пластинка товщини h_0 віднесена до полярної системи координат (r, Θ). Край $r=R$ пластинки підкріплено тонким пружним кільцем, вісь якого лежить в серединній площині пластинки, а одна з його головних осей інерції поперечного перетину перпендикулярна до неї. На пластинку діє довільне осесиметричне навантаження інтенсивності $q(r)$.

Як відомо [2, 4], напружений стан пластинки характеризується прогином $W(r)$ і функцією напружень $\Phi(r)$, які після введення безрозмірних величин

$$\Theta = \frac{R}{h_0}\frac{dW}{dr}, \quad \varphi = \frac{R}{Eh_0}\frac{d\Phi}{dr}, \quad x = \frac{r}{R}$$

повинні задовольняти рівняння рівноваги

$$\frac{1}{12(1-\nu^2)}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\Theta}{dx}+\frac{\Theta}{x}\right) = \frac{\varphi\cdot\Theta}{x} + \psi^*(x) \tag{1}$$

і рівняння сумісності

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dx}+\frac{\varphi}{x}\right) = -\frac{\Theta^2}{2x}, \tag{2}$$

де $\psi^*(x)$ — відома функція навантаження; ν — коефіцієнт Пуассона; E — модуль Юнга.

Функції $\Theta(x)$ і $\varphi(x)$ повинні задовольняти граничні умови [4]:

при $x=0$

$$\Theta=0, \quad \varphi=0, \tag{3}$$

при $x=1$

$$\frac{d\Theta}{dx} + (\delta_1+\nu)\,\Theta = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} + \frac{1-\nu\delta_3}{\delta_3}\,\varphi = 0, \tag{4}$$

де δ_1 — відносна жорсткість підкріплюваного кільця на згин; δ_3 — зведена відносна жорсткість кільця на розтяг.

2. Застосування узагальненого методу Ньютона. Для інтегрування системи рівнянь (1), (2) використовуємо ітераційний метод релаксації (узагальнений метод Ньютона) [3]. Для цього відрізок $[0, 1]$ розбивається на n рівних частин довжини $h=\frac{1}{n}$ і похідні замінюються відповідними скінченно різницевими відношеннями [1].

Тоді рівняння (1), (2) наближено замінюються системами нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$R_i \equiv \frac{1}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{\Theta_{i+1}-2\Theta_i+\Theta_{i-1}}{h^2} + \frac{\Theta_{i+1}-\Theta_{i-1}}{2hx_i} - \frac{\Theta_i}{x_i^2}\right) - \\ - \frac{\varphi_i\Theta_i}{x_i} - \psi^* = 0, \tag{5}$$

$$r_i \equiv \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{h^2} + \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2hx_i} - \frac{\varphi_i}{x_i^2} + \frac{\Theta_i^2}{2x_i} = 0, \qquad (6)$$

де $\Theta_i = \Theta(x_i)$, $\varphi_i = \varphi(x_i)$.

Через R_i та r_i позначимо невязки (похибки) в точках x_i. З граничних умов (3), (4) одержуємо

$$\Theta_0 = 0,\ \varphi_0 = 0,\ \Theta_n = \frac{\Theta_{n-1}}{1 + (\delta_1 + \nu)h},\ \ \varphi_n = \frac{\delta_3 \varphi_{n-1}}{\delta_3 + (1 - \nu\delta_3)}.$$

Завдання полягає в тому, щоб систематично зменшувати нев'язки в точках x_i до певної границі. Для цього введемо оператори релаксації

$$dR_i = -\left[\frac{1}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{2}{h^2} + \frac{1}{x_i^2}\right) + \frac{\varphi_i}{x_i}\right] d\Theta_i, \qquad (7)$$

$$dr_i = -\left(\frac{2}{h^2} + \frac{1}{x_i^2}\right) d\varphi_i. \qquad (8)$$

Ці вирази одержуються диференціюванням R_i та r_i — відповідно за Θ_i та φ_i. Їх можна інтерпретувати як зміни нев'язок dR_i та dr_i, внаслідок зміни значень функцій в точках x_i відповідно на величину $d\Theta_i$ і $d\varphi_i$. Схема обчислень виглядає так: підставляємо початкові значення Θ_i^1, φ_i^0, функцій Θ та φ у рівняння системи (5), обчислюємо нев'язки R_i і прирівнюємо оператори релаксації до відповідних значень нев'язок з оберненим знаком, тобто $dR_i^0 = -R_i^0$. Величина, на яку треба змінити значення Θ_i, дорівнює

$$d\Theta_i^\circ = \frac{R_i^\circ}{\dfrac{1}{12(1-\nu^2)}\left(\dfrac{2}{h^2} + \dfrac{1}{x_i^2}\right) - \dfrac{\varphi_i^\circ}{x_i}}.$$

Отже, нове наближення функції Θ запишемо $\Theta_i^1 = \Theta_i^0 + d\Theta_i^0$. Значення Θ_i^1, φ_i^0 підставляємо потім у рівняння системи (6) і обчислюємо нев'язки r_i. Процес продовжується за циклом, поки зміна функцій для всіх рівнянь стане достатньо малою.

3. Результати обчислень. Складену алгольну програму можна використати на ЕОМ для будь-якої функції навантажень ψ^*.

Величини δ_1, δ_3 виражаються через один параметр δ, який характеризує відношення модуль пружності кільця і пластинки. Задача доведена до числа для випадку рівномірного навантаження інтенсивності $q^* = \frac{q}{E}\left(\frac{R}{h_0}\right)^4$ і $\delta_1 = 2{,}7\delta$; $\delta_3 = 0{,}3\delta$.

Визначено мембранні (σ_r, σ_θ) та згинні ($\sigma_r^з$, $\sigma_\theta^з$) напруження в пластинці за відомими формулами

$$\sigma_r = \frac{Eh_0^2}{R^2} \cdot \frac{\varphi}{x}, \quad \sigma_\Theta = \frac{Eh_0^2}{R^2} \cdot \frac{d\varphi}{dx},$$

$$\sigma_r^з = -\frac{Eh_0^2}{2R^2(1-\nu^2)}\left(\frac{d\varphi}{dx} + \nu\frac{\Theta}{x}\right),$$

$$\sigma_\Theta^з = -\frac{Eh_0^2}{2R^2(1-\nu^2)}\left(\frac{\Theta}{x} + \nu\frac{d\Theta}{dx}\right).$$

Для визначення впливу підкріплюваного кільця на максимальний прогин пластинки в таблиці поміщені залежності параметра q^* від величини $W(0)$ при різних значеннях δ.

Значення $\frac{W(0)}{h_0}$

q^*	δ				
	0	1	2	5	∞
4	1,485	0,984	0,838	0,699	0,566
8	2,114	1,496	1,302	1,107	0,904
12	2,536	1,839	1,616	1,385	1,134
20	3,138	2,321	2,055	1,777	1,455
40	4,110	3,083	2,745	2,381	1,954
60	4,782	3,600	3,211	2,789	2,288
80	5,313	4,005	3,576	3,107	2,547

Залежності мембранних і згинних напружень в центрі і на контурі пластинки від величини прогину в центрі зображені графічно на рис. 1—4 для п'яти значень δ.

На закінчення зауважимо, що методом збурень в другому наближенні аналогічна задача вже розглядалась в роботах,

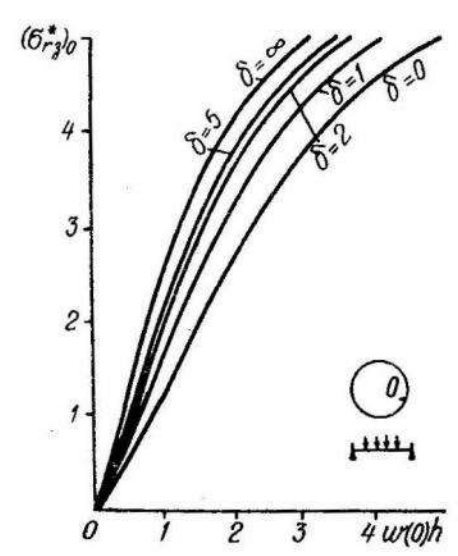


Рис. 1.

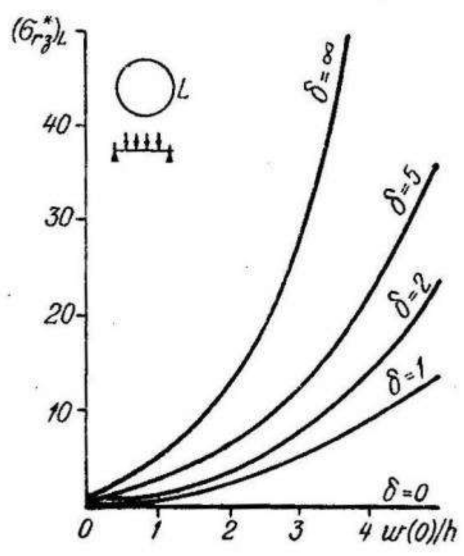


Рис. 2.

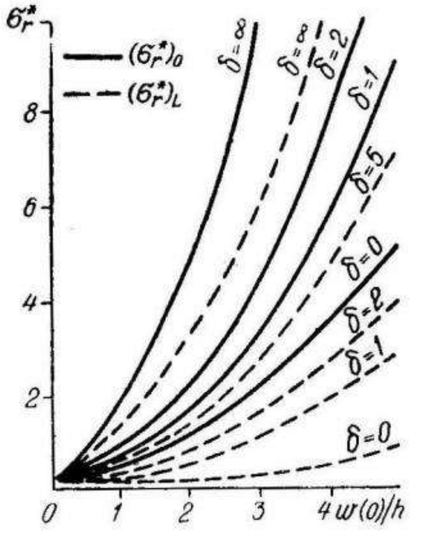


Рис. 3.

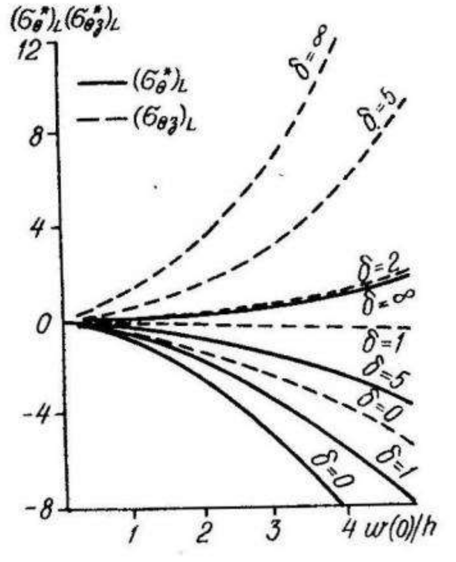


Рис. 4.

але там на відміну від наших результатів (рис. 1) для згинних напружень $\sigma_r{}^3$ в центрі круглої пластинки при $\frac{W(0)}{h_0} > 2{,}4$ одержані дані, які протирічать експерименту, а саме нульові і навіть від'ємні значення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычисления, т. 1, М., «Наука», 1966.
2. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. М., ГИТТЛ, 1956.
3. Перроне, Као. Применение общего итерационного метода нелинейной релаксации для решения нелинейных задач механики. — «Прикладная механика» 1971, № 2.
4. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. К., «Наукова думка», 1964.

УДК 539.3

Н. П. ФЛЕЙШМАН, Б. М. ШПІЛЬКЕРМАН

РОЗРАХУНОК ДЕЯКИХ БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЕЛЕКТРОВАКУУМНИХ ПРИЛАДІВ

Під час проектування електровакуумних приладів потрібно визначати напружений стан їх корпусу, який звичайно є складним з'єднанням оболонок та пластин. Деякі елементи таких приладів мають вигляд круглих або кільцевих скляних пластинок, циклічно послаблених отворами, в які впаяно металеві штирі. Ці пластинки взаємодіють з відповідними оболонками і перебувають зокрема в узагальненому плоскому напруженому стані під дією циклічного контурного навантаження.

Нижче ми розглядаємо плоску задачу теорії пружності для кільцевої пластинки з N циклічно розміщеними абсолютно жорсткими шайбами ($\alpha=2\pi/N$ — кут циклічності). Припустимо, що на контурі L_{N+1} радіуса R та на контурі L_0 радіуса r задано навантаження або компоненти зміщення у вигляді циклічних функцій полярного кута (рис. 1). На контурах шайб L_j ($j=1, 2, \ldots, N$) одиничного радіуса задається жорстке поступальне переміщення шайб, центр кожної з яких, що має афікс $z_j=e^{i(j-1)\alpha}l$, пересувається вздовж відповідного радіуса на невідому відстань $u_0=\text{const}$.

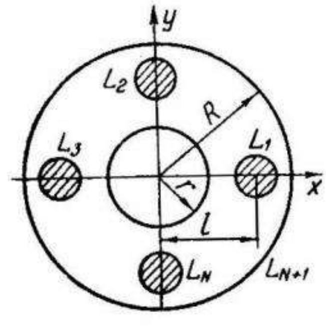


Рис. 1.

Віднесемо пластинку до прямокутної декартової системи координат xoy (рис. 1)

Як відомо, задача про напружений стан пластинки зводиться до визначення комплексних потенціалів $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ з граничних умов [3]:

$$
\begin{gathered}
F_{N+1}\equiv\varkappa_1\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}-F(t)-\alpha_1=0 \text{ на } L_{N+1}; \\
F_0\equiv\varkappa_2\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}-f(t)-\alpha_2=0 \text{ на } L_0, \\
F_j\equiv\varkappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}-e^{i(j-1)\alpha}\, u_0=0 \text{ на } L_j, \\
(j=1, 2, \ldots, N),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

де t — афікс точки відповідного контура, $\varkappa=(3-\nu)/(1+\nu)$; ν — коефіцієнт Пуассона; $F(t)$ і $f(t)$ — відомі функції зовнішнього навантаження або заданих переміщень [3]. Постійні коефіцієнти $\varkappa_1$ і $\varkappa_2$ приймають значення $+1$ або $-\varkappa$. У першому випадку на відповідному контурі одержимо умови першої основної задачі (задано навантаження) і числа α_1, α_2 підлягають визначенню, у другому — умови другої основної задачі (задано переміщення) і $\alpha_1=\alpha_2=0$.

За умовами циклічної симетрії в точках z і $z_s^*=e^{i(s-1)\alpha}z$ ($s=2, \ldots, N$) напруження повинні бути однаковими, тобто функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ мають задовольняти такі співвідношення:

$$
\begin{gathered}
\varphi(z)=e^{-i(s-1)\alpha}\varphi[e^{i(s-1)\alpha}z]; \\
\varphi(z)=e^{i(s-1)\alpha}\psi[e^{i(s-1)\alpha}z]. \\
(s=2, \ldots, N).
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Отже, функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ слід зобразити у вигляді:

$$
\varphi(z)=\sum_{k=k_1N+1}^{\infty} A_k z^k+\sum_{k=k_2N-1}^{\infty} D_k z^{-k}+
$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i(j-1)(k+1)\alpha}[z-e^{i(j-1)\alpha}l]^{-k},$$

$$\psi(z)=\sum_{k=k_2N-1}^{\infty} B_k z^k+\sum_{k=k_1N+1} E_k z^{-k}+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{i(j-1)(k-1)\alpha}[z-e^{i(j-1)\alpha}l]^{-k}. \qquad (3)$$

Тут $k_1=0, 1, 2, \ldots$; $k_2=1, 2, \ldots$

Шукані коефіцієнти A_k, D_k, B_k, E_k, a_k і b_k визначаємо з граничних умов (1) на контурах L_0, L_{N+1} та L_1. Внаслідок циклічної симетрії граничні умови на контурах L_j при $j=2, \ldots, N$ задовольнятимуться автоматично.

Відзначимо, що на контурах шайб L_j $(j=1, \ldots, N)$ повинні виконуватись також умови рівності нулю головного вектора і головного моменту діючих сил [3].

На внутрішньому контурі L_0 матимемо $z=t=r\eta$. Розвинемо функції $[t-e^{i(j-1)\alpha}l]^{-k}$ $(j=1, \ldots, N)$ в ряд по степенях t/z_j $(|t|=r<l=|z_j|)$. Після елементарних перетворень функцій $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ на контурі L_0 набирають вигляду:

$$\varphi(\eta)=\sum_{k=k_1N+1}^{\infty} r^k A_k\eta^k+\sum_{k=k_2N-1}^{\infty} r^{-k} D_k\eta^{-k}+$$

$$+N\sum_{k=k_1N+1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu} C_{k+\nu-1}^{k} r^k \varepsilon_1^{k+\nu} a_\nu\eta^k,$$

$$\psi(\eta)=\sum_{k=k_2N-1}^{\infty} r^k B_k\eta^k+\sum_{k=k_1N+1}^{\infty} r^{-k} E_k\eta^{-k}+$$

$$+N\sum_{k=k_2N-1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu} C_{k+\nu-1}^{k} r^k \varepsilon_1^{k+\nu} b_\nu\eta^k. \qquad (4)$$

Тут і надалі $\varepsilon_1=1/l$, $\delta_\nu^k=\begin{cases}0 \text{ при } \nu>к;\\ 1 \text{ при } \nu\leqslant к.\end{cases}$

На зовнішньому контурі L_{N+1}, де $z=t=R\eta$, розвинемо вирази $[t-e^{i(j-1)\alpha}l]^{-k}$ $(j=1, \ldots, N)$ в ряд по степенях z_j/t $(|t|=R>l=|z_j|)$. На цьому контурі функції (3) запишуться у вигляді:

$$\varphi(\eta) = \sum_{k=k_1N+1}^{\infty} R^k A_k \eta^k + \sum_{k=k_2N-1}^{\infty} R^{-k} D_k \eta^{-k} +$$

$$+ N \sum_{k=k_2N-1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu^k C_{k-1}^{\nu-1} R^{-k} \varepsilon_1^{\nu-k} a_\nu \eta^{-k},$$

$$\psi(\eta) = \sum_{k=k_2N-1}^{\infty} R^k B_k \eta^k + \sum_{k=k_1N+1}^{\infty} R^{-k} E_k \eta^{-k} +$$

$$+ N \sum_{k=k_1N+1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \delta_\nu^k C_{k-1}^{\nu-1} R^{-k} \varepsilon_1^{\nu-k} b_\nu \eta^{-k}. \tag{5}$$

Цілком аналогічно одержимо вирази для функцій $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ на контурі першої шайби L_1, де $z-l=\sigma$

$$\varphi(\sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=k_1N+1}^{\infty} \delta_\nu^k C_k^\nu \varepsilon_1^{\nu-k} A_k \sigma^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \sigma^{-\nu} +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \sum_{k=k_2N-1}^{\infty} C_{k+\nu-1}^\nu \varepsilon_1^{k+\nu} D_k \sigma^\nu +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^\nu C_{k+\nu-1}^\nu T_{k,\nu} a_k \sigma^\nu,$$

$$\psi(\sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=k_2N-1}^{\infty} \delta_\nu^k C_k^\nu \varepsilon_1^{\nu-k} B_k \sigma^\nu + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu \sigma^{-\nu} +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=k_1N+1}^{\infty} (-1)^\nu C_{k+\nu-1}^\nu \varepsilon_1^{k+\nu} E_k \sigma^\nu +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^\nu C_{k+\nu-1}^\nu R_{k,\nu} t_k \sigma^\nu. \tag{6}$$

Легко переконатись в тому, що вирази

$$\begin{matrix} T_{k,\nu} \\ R_{k,\nu} \end{matrix} = \sum_{j=2}^{N}{}' e^{i(j-1)(k\pm1)\alpha} [1 - e^{i(j-1)\alpha}]^{-(k+\nu)} \varepsilon_1^{k+\nu} \tag{7}$$

є дійсними при будь-яких значеннях $k=1, 2, \ldots;$ $\nu=0, 1, \ldots$

Використовуючи метод Бубнова-Гальоркіна [2], підставимо функції (4), (5), (6) в граничні умови (1) і вимагатимемо, щоб функції F_0, F_1 та F_{N+1} були ортогональні до повної системи функцій σ^m і η^m на відповідних контурах. Показники степеня m функцій σ^m і η^m доцільно вибирати такими, щоб відповідні члени з показниками степеня $\mp(m+1)$ були в виразах (4), (5), (6) для функцій $\varphi(\eta)$ і $\varphi(\sigma)$, а саме: а) на контурі ядра $m=0, 1, 2, \ldots$, б) на зовнішньому та внутрішньому контурах $m=-(k_1N+2)$, $m=k_2N-2$.

Для обчислення коефіцієнтів A_k, D_k, B_k, E_k, a_k, b_k одержуємо безмежну алгебраїчну систему рівнянь. Квазірегулярність [1] цієї системи доводиться доданням і відніманням відповідних рівнянь системи [2]. Як показує аналіз системи при її розв'язанні можна використовувати метод редукції [1], якщо відомі функції $F(t)$ і $f(t)$ — неперервні на відповідних контурах, а їх похідні задовольняють умови Діріхле. При цьому залежно від величини радіуса r (рис. 1), слід розрізняти два випадки: $r>1$ і $r\leqslant 1$. Це викликано тим, що одне і те ж рівняння алгебраїчної системи залежно від величини радіуса r виявляється квазірегулярним для різних коефіцієнтів. Останню обставину слід враховувати, використовуючи метод редукції.

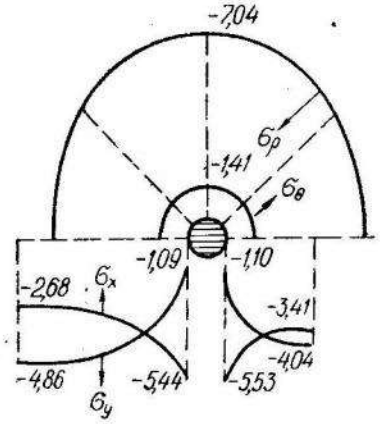


Рис. 2.

Для прикладу розглянемо випадок пластинки з чотирма жорсткими шайбами ($N=4$) під впливом рівномірно розподілених нормальних напружень $P=\text{const}$, $p=\text{const}$ на відповідних контурах L_5 і L_0.

При цьому маємо $F(t)=Pt$, $f(t)=pt$, $\varkappa_1=\varkappa_2=1$.

Для параметрів задачі

$$\nu=0{,}2; \quad p=-2{,}6777602; \quad P=-3{,}380559;$$

$$l=33{,}5; \quad r=23{,}6; \quad R=38{,}9$$

коефіцієнти розв'язку такі:

$$\alpha_1=\alpha_2=0;$$

$$a_1=-0{,}2331892; \quad a_2=0{,}007238671; \quad a_3=-0{,}1807383\cdot 10^{-3};$$

$$b_1=-2{,}50554; \quad b_2=-7{,}810355; \quad b_3=0{,}2518429;$$

$$b_4=-0{,}3686114\cdot 10^{-2}; \quad b_5=-0{,}5422152\cdot 10^{-3}; \quad A_1=-1{,}889269;$$

$$D_3=136{,}7782; \quad A_5=0{,}1649513\cdot 10^{-8}; \quad E_1=612{,}2501;$$

$$B_3=-0{,}122182\cdot 10^{-4}; \quad E_5=104333{,}1.$$

За відомими функціями $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ (3) напруження в пластинці визначаються за допомогою формул Колосова-Мусхелішвілі [3].

На рис. 2 зображені епюри напружень σ_x, σ_y вздовж дійсної осі і σ_ρ, σ_Θ вздовж контура жорстокого ядра L_1. Результати одержано в третьому наближенні.

Аналіз результатів свідчить, що відома умова $\sigma_\Theta = \nu\sigma_\rho$ на контурі спаю пластинки з абсолютно жорстким включенням виконується на L_1 з точністю до 2%. Граничні умови на контурах L_0, L_5 задовольняються з точністю до 1%. Для практичних потреб така точність розв'язку задачі цілком задовільна.

ЛІТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М., Гостехиздат, 1949.
2. Космодамианский А. С. Многосвязные пластинки. Донецк, 1969.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.

УДК 518:517.948

Ю. М. ЩЕРБИНА

ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ОДНОГО ІТЕРАЦІЙНОГО МЕТОДУ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

В [1] запропоновано ітераційний метод для розв'язування нелінійних операторних рівнянь

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

де P — неперервний оператор, що діє з одного банахового простору в інший.

Для практичного застосування цього методу необхідно мати досить «добре» початкове наближення, яке важко визначити. Ми пропонуємо деяку модифікацію процесу з [1], яка не має цього недоліку

$$x_{n+1} = x_n - [P\,(x_n,\ \theta_n)]^{-1} \frac{1}{K_n} P\,(x_n),$$

$$\theta_n = \begin{cases} \tilde{x}_0, \text{ при } n = 0 \\ x_n - [P\,(x_{n-1},\ \theta_{n-1})]^{-1} \dfrac{1}{K_n} P\,(x_n), \text{ при } n \geqslant 1, \end{cases} \tag{2}$$

де K_n — дійсні числа; $P(x, \theta)$ — перша поділена різниця [3] оператора $P(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

При $K_n = \text{const} = 1$ алгоритм (2) збігається з запропонованим в [1] і має порядок збіжності $\rho = 1 + \sqrt{2}$.

У цій статті ми використовуємо методику роботи [2], де аналогічну модифікацію методу Ньютона розглянуто для систем нелінійних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь.

В особливому випадку алгоритм (2) дає змогу наблизитись до розв'язку x^* рівняння (1) із наперед заданою точністю.

Надалі $P(x, y, z)$ означає другу поділену різницю [3] оператора $P(x)$; x_0 — початкове наближення до розв'язку;

$$A_0 = \frac{\alpha+1}{\|P(x_0)\|} \| P(x_1, x_0, \tilde{x}_0) \| \| \Gamma_0 P(x_0) \|^2,$$

$$A_n = \frac{1}{\|P(x_n)\|} \| P(x_{n+1}, \theta_n, x_n) \Gamma_n P(x_n) \Gamma_{n-1} [P(x_n, \theta_n) - \\ - P(x_{n-1}, \theta_{n-1})] \Gamma_n P(x_n) \|,$$

де $\Gamma_n = [P(x_n, \theta_n)]^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$; $0 < \alpha = \text{const}$.

Теорема. *Нехай в області* $\Omega = \{x : \|P(x)\| \leqslant \|P(x_0)\|\}$ *оператори* $\Gamma(x, \theta) = [P(x, \theta)]^{-1}$ *і* $P(x, y, z)$ існують *і рівномірно обмежені, а вектор* $\tilde{x}_0$ *вибраний так, що*

$$\|x_0 - \tilde{x}_0\| \leqslant \alpha \|x_1 - x_0\|.$$

Тоді при достатньо великих K_n, *причому* $K_n \geqslant \beta A_n$ $(1 < \beta = \text{const})$, $K_n \geqslant 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *ітераційний процес (2) збігається і граничний елемент*

$$x^* = \lim_{n \to \infty} x_n$$

є одним із розв'язків рівняння (1).

Доведення. Використовуючи умови теореми і аналог інтерполяційної формули Ньютона для операторів [3], одержуємо

$$\|P(x_1)\| - \frac{K_0 - 1}{K_0} \|P(x_0)\| \leqslant \|P(x_1) - P(x_0) - \\ - P(x_0, \tilde{x}_0)(x_1 - x_0)\| = \|P(x_1, x_0, \tilde{x}_0)(x_1 - \tilde{x}_0)(x_1 - x_0)\| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{K_0^2} A_0 \|P(x_0)\|. \tag{3}$$

Аналогічно при $n \geqslant 1$

$$\|P(x_{n+1})\| - \frac{K_n - 1}{K_n} \|P(x_n)\| \leqslant \frac{1}{K_n^2} A_n \|P(x_n)\|. \tag{4}$$

Тому що оператор $P(x)$ неперервний в Ω, а $\Gamma(x, \theta)$ обмежений, то із (2) випливає, що можна підібрати на кожному кроці настільки великі $K_n \geqslant 1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, що x_{n+1}, θ_n будуть належати області Ω. Тоді, використовуючи умови теореми, легко показати, що

$$0 < A_n \leqslant h = \max\{4M^2B^4\|P(x_0)\|^2, \ (\alpha+1)MB^2\|P(x_0)\|\},$$

де $\|\Gamma(x, \theta)\| \leqslant B$, $\|P(x, y, z)\| \leqslant M$ в Ω, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Із обмеженості послідовності $\{A_n\}$ в Ω випливає, що ми зможемо вибрати $K_n \geqslant \beta A_n$ $(\beta > 1)$, $K_n \geqslant 1$ і з (3) та (4) маємо

$$\frac{\|P(x_{n+1})\|}{\|P(x_n)\|} \leqslant \frac{K_n - 1}{K_n} + \frac{A_n}{K_n^2} = q_n < 1 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Отже, послідовність $\{\|P(x_n)\|\}$ є монотонно спадною

$$\|P(x_0)\| > \|P(x_1)\| > \ldots > \|P(x_n)\| > \ldots . \tag{5}$$

Далі, як і в [2], можна показати, що

$$\lim_{n \to \infty} \|P(x_n)\| = 0. \tag{6}$$

Отже, $P(x^*) = 0$, тобто x^* — розв'язок (1).

Дійсно, послідовність $\{q_n\}$ має максимальний елемент $\bar{q} < 1$ [2]. Вибираючи $K_n \geqslant \beta A_n$ при $A_n > \bar{q}$, або $K_n = 1$, коли при деяких n буде $A_n \leqslant \bar{q}$, одержуємо $q_n \leqslant \bar{q} < 1$. Отже, $\|P(x_n)\| \leqslant \leqslant \bar{q}^n \|P(x_0)\|$, $n = 0,\ 1,\ 2, \ldots$, звідки і випливає (6).

В особливому випадку [2] визначимо вкладену в Ω «малу» область ω, що містить x^* і задовольняє нерівність

$$\|P(x)\| - \|P(x^*)\| \leqslant \varepsilon, \quad x \in \omega,$$

де ε — мала додатна величина. Тоді для всіх $x \in \Omega \setminus \omega$ можна вказати величину $0 < h < +\infty$ таку, що для всіх n $A_n \leqslant h$, а отже, і підібрати відповідні K_n, так що $\lim_{n \to \infty} \|P(x_n)\| \leqslant \varepsilon$. При практичній реалізації процесу (2) на ЕОМ коефіцієнти $K_n \geqslant 1$ підбираються із умови (5).

ЛІТЕРАТУРА

1. Бартіш М. Я., Щербина Ю. М. Про один різницевий метод розв'язування нелінійних операторних рівнянь. — ДАН УРСР, серія А, 1972, № 7.
2. Матвеев В. А. Метод приближенного решения систем нелинейных уравнений. — «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1964, т. 4, № 6.
3. Сергеев А. С. О методе хорд. — «Сибирский математический журнал», 1961, т. 2, № 2.

УДК 539.3

Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ, В. Г. ГАБРУСЄВ

ОСЕСИМЕТРИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ІЗОТРОПНОГО ШАРУ

Багато задач математичної фізики, зокрема задач теорії пружності та термопружності при змішаних граничних умовах, зводяться до парних інтегральних рівнянь, аналітичний розв'язок яких не завжди буває ефективним або найбільш доцільним. Тому актуальним питанням є побудова простих аналітико-числових способів розв'язування таких задач, зокрема дуальних інтегральних рівнянь або їх систем.

У цій роботі запропоновано наближену методику знаходження числового розв'язку парного інтегрального рівняння

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \varphi(\eta)\frac{R_1(\eta)}{Q_1(\eta)}J_0(\rho\eta)\,d\eta = f_1(\rho), \quad 0\leq\rho<1, \\ &\int_0^\infty \varphi(\eta)\frac{R_2(\eta)}{Q_2(\eta)}J_0(\rho\eta)\,d\eta = f_2(\rho), \quad 1\leq\rho<\infty, \end{aligned} \qquad (1)$$

(де $\varphi(\eta)$ — шукана функція; $J_0(\rho\eta)$ — функція Бесселя 1-го роду; всі інші функції задані), до якого зводиться дослідження осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск нагрітого штампа на трансверсально ізотропний шар.

Користуючись властивостями функції Хевісайда та ввівши невідому $X(\rho)$, друге рівняння (1) можна зобразити у вигляді

$$\int_0^\infty \varphi(\eta)\frac{R_2(\eta)}{Q_2(\eta)}J_0(\rho\eta)\,d\eta = f_2(\rho)\,u(\rho-1)+X(\rho)\,u(1-\rho),\ 0\leq\rho<\infty, \qquad (2)$$

де $u(x)$ — функція Хевісайда.

Застосовуючи до співвідношення (2) формулу обернення інтегрального перетворення Ханкеля [2], одержуємо

$$\varphi(\eta)=\eta\frac{Q_2(\eta)}{R_2(\eta)}\left[\int_1^\infty \rho f_2(\rho)J_0(\rho\eta)\,d\rho+\int_0^1 \rho X(\rho)J_0(\rho\eta)\,d\rho\right]. \qquad (3)$$

Вважаючи, що $X(\rho)$ задовольняє умови Діріхле на інтервалі $0 \leqslant \rho < 1$, шукатимемо її у вигляді

$$X(\rho) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n J_0(\rho\lambda_n), \tag{4}$$

де $a_0 = f_2(1)$, $J_0(\lambda_n) = 0$; a_n — невідомі коефіцієнти.

Взявши до уваги співвідношення (4), після обчислення інтегралів, що входять до рівності (3), знайдемо функцію $\varphi(\eta)$, підставивши яку в перше рівняння (1), одержуємо умову для визначення невідомих коефіцієнтів a_n $(n=1, 2, \ldots, N)$.

Розбиваючи інтервал $0 \leqslant \rho < 1$ рівномірно N точками і вимагаючи виконання отриманої умови в цих точках, маємо систему N алгебраїчних рівнянь для визначення N невідомих a_n. Вибираємо N таким, щоб величина похибки при виконанні граничних умов не перевищувала заданої.

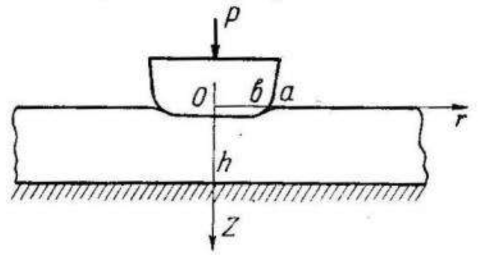


Рис. 1.

Наведемо результати розв'язання осесиметричної контактної задачі термопружності про тиск жорсткого гладкого нагрітого штампа на трансверсально ізотропний шар скінченної товщини h, що лежить на гладкій неподатливій основі (рис 1).

Граничні умови задачі мають вигляд:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial z} = k_1 (T - T_0^{(1)}), \quad z=0, \quad 0 \leq r < a, \\ &\frac{\partial T}{\partial z} = k_2 (T - T_0^{(2)}), \quad z=0, \quad a \leqslant r < \infty, \\ &\frac{\partial T}{\partial z} = -k_3 T, \qquad z=h, \quad 0 \leq r < \infty, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &w(r, z) = w(r), \quad z=0, \quad 0 \leqslant r < a, \\ &\sigma_{zz}(r, z) = 0, \qquad z=0, \quad a \leqslant r < \infty, \\ &\sigma_{rz}(r, z) = 0, \qquad z=0, \quad 0 \leqslant r < \infty, \\ &\sigma_{rz}(r, z) = 0, \qquad z=h, \quad 0 \leqslant r < \infty, \\ &w(r, z) = 0, \qquad z=h, \quad 0 \leqslant r < \infty, \end{aligned} \tag{6}$$

де k_3 — набуває значення 0 або ∞; k_1 — величина обернена термоопору; a — заздалегідь невідомий радіус площадки контакту; $w(r)$ — функція, що визначається геометрією штампа.

У задачі необхідно визначити величину площадки контакту і характер розподілу на ній тиску. При розв'язанні поставленої задачі використовуємо залежності термопружності для трансверсального ізотропного тіла, що наводяться в роботі [1].

Матеріал трансверсального ізотропного шару характеризується такими значеннями параметрів: $\mu_1 = 1{,}388$; $\mu_3 = 0{,}705$; $\mu_5 = 1{,}0$. Рівняння основи штампа визначається функцією

$$z = \frac{(r-b)^2}{R} u(r-b).$$

Вважаємо, що $T_0^{(2)} = 0$, $k_3 = 0$, $\gamma = \frac{h}{a} = 1$, $T_0^{(1)} = T_0$.

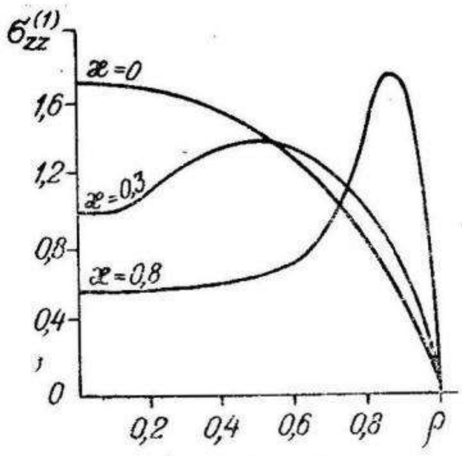


Рис. 2.

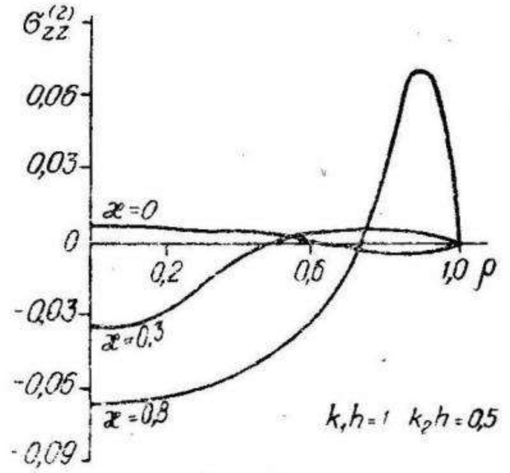


Рис. 3.

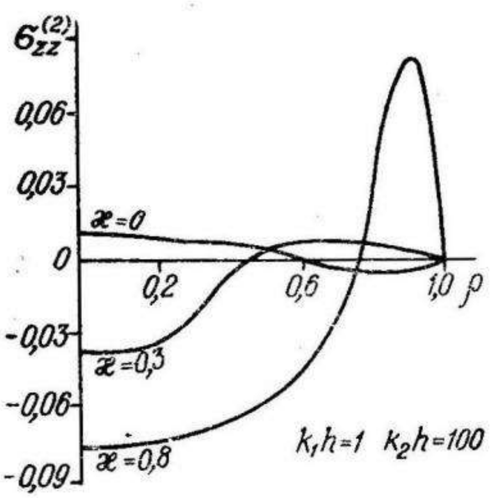


Рис. 4.

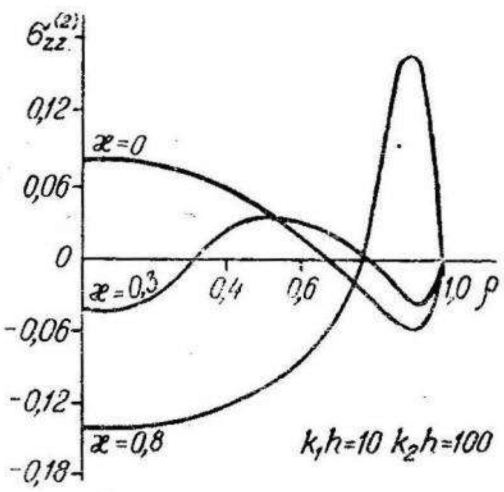


Рис. 5.

На рис. 2 зображено розподіл силової складової контактних напружень $\sigma_{zz}^{(1)} = \sigma_{zz}^{(p)} \Big/ \frac{P}{\pi a^2}$, а на рис. 3—5 — розподіл температурної складової $\sigma_{zz}^{(2)} = \sigma_{zz}^{(T)}/\rho T_0$, тут використані позначення $\rho = \frac{r}{a}$, $\varkappa = b/a$.

Радіус площадки визначається з умови рівноваги штампа.

ЛІТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М., Изд-во АН СССР, 1962.
2. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., ИЛ, 1955.

УДК 539.385

О. П. ПІДДУБНЯК, Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ

СУМІСНЕ КРУЧЕННЯ КРУГЛОГО ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА ТА ПІВПРОСТОРУ ПРИ НЕПОВНОМУ КОНТАКТІ

Осесиметрична задача про сумісне кручення суцільного циліндра і півпростору розв'язана в роботах [3, 5]. Випадок частинно прикріпленого суцільного циліндра з півпростором, що відповідає наявності зовнішньої щілини в зоні спаю двох пружних тіл, вивчався в роботі [7].

У цій статті ми наводимо наближений розв'язок задачі про кручення пружної системи «порожнистий циліндр—півпростір», послабленої в зоні спаю внутрішньою та зовнішньою щілинами.

1. Нехай пружний півпростір $z \leqslant 0$ скручується пружним циліндром радіусів R_1, $R_2 (R_1 > R_2)$ довжини h. Циліндр навантажений на бічних поверхнях, а на верхньому торці $z = h$, $R_1 \geqslant r \geqslant R_2$ задано або переміщення (задача I), або напруження (задача II). Вважається, що циліндр спаяний з півпростором по кільцю $z=0$, $a \leqslant r \leqslant b\,(R_1 > b > a > R_2)$, а поверхні півпростору та нижнього торця циліндра поза областю спаю вільні від навантаження. Півпростір і циліндр заповнені різними ізотропними матеріалами.

Задача полягає у розв'язанні диференціального рівняння кручення [2]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \qquad (1.1)$$

де

$$u = u_1(r, z),\ z < 0,\ u = u_2(r, z),\ z > 0 \qquad (1.2)$$

при таких граничних умовах:

$$u_1 \to 0,\ \sqrt{r^2 + z^2} \to \infty, \qquad (1.3)$$

$$\tau_{\theta z}^{(i)} = 0,\ i = 1,\ 2;\ r < a,\ r > b,\ z = 0, \qquad (1.4)$$

$$u_1 = u_2,\ \tau_{\theta z}^{(1)} = \tau_{\theta z}^{(2)},\ a < r < b,\ z = 0, \qquad (1.5)$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)}(R_i,\ z) = G_2 f_i(z/R_1),\ 0 < z < h,\ i = 1,\ 2, \qquad (1.6)$$

$$u_2 = bU(r/R_1),\ R_1 \geqslant r \geqslant R_2,\ z = h,\ \text{(задача I)}, \qquad (1.7)$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)}=G_2 T(r/R_1),\ R_1\geqslant r\geqslant R_2,\ z=h,\ \text{(задача II)}. \qquad (1.8)$$

Тут u_i — тангенціальні зміщення; $\tau_{\theta z}^{(i)}$, $\tau_{r\theta}^{(i)}$ — дотичні напруження

$$\tau_{\theta z}^{(i)}=G_i\frac{\partial u_i}{\partial z},\ \tau_{r\theta}^{(i)}=G_i r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_i}{r}\right)\ (G_i \text{ — модуль зсуву}). \qquad (1.9)$$

2. Використавши метод частинних розв'язків [2, 4], загальний розв'язок рівняння (1.1) одержимо у вигляді

$$u_1=b\int_0^\infty \eta^{-1}e^{\eta\zeta}J_1(\eta x)\varphi(\eta)\,d\eta,\ \ \zeta<0, \qquad (2.1)$$

$$u_2=b\left\{A_0\rho\zeta+B_0\rho+\sum_{k=1}^{\infty}[A_k I_1(\lambda_k\rho)+B_k K_1(\lambda_k\rho)]\sin\lambda_k(H-\zeta)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}(C_k\operatorname{ch}\mu_k\zeta+D_k\operatorname{sh}\mu_k\zeta)W_1(\lambda_k\rho)\right\},\ 0<\zeta<H, \qquad (2.2)$$

де λ_k — додатні корені функції $W_2(\lambda_k\varepsilon_0)$,

$$W_n(\lambda_k\rho)=J_n(\lambda_k\rho)/J_2(\lambda_k)-N_n(\lambda_k\rho)/N_2(\lambda_k), \qquad (2.3)$$

$J_n(x)$, $N_n(x)$, $I_n(x)$, $K_n(x)$ — циліндричні функції,

$$\zeta=z/b,\ \rho=r/R_1,\ x=r/b,\ H=h/b,\ \chi_k=k\pi/H,$$
$$\varepsilon_0=R_2/R_1,\ \varepsilon_1=b/R_1,\ \varepsilon=a/b,\ k=\overline{1,\ \infty}. \qquad (2.4)$$

Розклавши функції $f_i(\zeta)$ $(i=1,\ 2)$ в ряди Фур'є, а функції $U(\rho)$ і $T(\rho)$ в ряди Діні і, задовольнивши граничні умови (1.6)—(1.8), знайдемо сталі інтегрування A_0, B_0, A_k, B_k, C_k, D_k $(k=\overline{1,\ \infty})$, а отже, і формули для напружень і переміщень у циліндрі. Задовольнивши решту граничних умов (1.4), (1.5), одержимо інтегральне рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_\varepsilon^1 \xi\tau(\xi)\,d\xi\int_0^\infty J_1(\eta\xi)J_1(\eta x)\,d\eta=F(x),\ \varepsilon<x<1, \qquad (2.5)$$

$$F(x)=F_0x+\sum_{k=1}^{\infty}F_kW_1(\mu_k x),\ \mu_k=\lambda_k\varepsilon_1 \qquad (2.6)$$

відносно безрозмірного контактного напруження $\tau(x)$, пов'язаного з функцією $\varphi(\eta)$ за формулою

$$\tau(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^\infty \varphi(\eta)J_1(\eta x)\,d\eta, & \varepsilon<x<1,\\ 0, & 0<x<\varepsilon,\ 1<x<\infty.\end{cases} \qquad (2.7)$$

У розкладі (2.6) $F_m = \Omega_m - N_m$ $(m=\overline{0, \infty})$, де сталі Ω_m певним чином виражаються через $f_1(\zeta)$, $f_2(\zeta)$ і, крім того, для задачі I через $U(\rho)$, а для задачі II через $T(\rho)$. Сталі N_m залежать від контактного напруження $\tau(x)$

$$N_0 = \frac{4H\varepsilon_1^3}{\delta(1-\varepsilon_0^4)} \int_{\varepsilon}^{1} x^2 \tau(x)\, dx, \quad N_k = \varkappa_k \int_{\varepsilon}^{1} x\tau(x) W_1(\mu_k x)\, dx, \tag{2.8}$$

причому

$$\varkappa_k = \varepsilon_1^2 L_2(\mu_k H)/(\mu_k \delta \omega_k), \quad L_2(\mu_k H) = \begin{cases} \text{th } \mu_k H \text{ для задачі I,} \\ \text{cth } \mu_k H \text{ для задачі II,} \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\omega_k = \frac{1}{2}\left[W_1^2(\lambda_k) - \varepsilon_0^2 W_1^2(\lambda_k \varepsilon_0)\right], \quad k = \overline{1, \infty}; \quad \delta = G_2/G_1.$$

Після визначення напруження $\tau(x)$ і сталих N_m $(m=\overline{0, \infty})$ задача буде повністю розв'язана.

3. Інтегральне рівняння (2.5) розв'язували наближеними методами при малих параметрах ε (коли й ε_0 мале) і при ε, близьких до одиниці [1]. Встановлено, що при $0{,}5 \leqslant \varepsilon \leqslant 0{,}8$ методи перекриваються. Підставивши вирази для напруження $\tau(x)$ в формули (2.8), одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь безмежного порядку відносно $N_m (m=\overline{0, \infty})$, квазіцілкомрегулярність якої доводиться. Згідно з теоремою обернення інтегрального перетворення Ханкеля [4] із (2.7) одержуємо

$$\varphi(\eta) = \eta \int_{\varepsilon}^{1} x\tau(x) J_1(\eta x)\, dx, \quad 0 < \eta < \infty. \tag{3.1}$$

Тоді за формулами (1.9), (2.1), (2.2) можна знайти напруження та переміщення у півпросторі та циліндрі.

При розрахунку на міцність пружних тіл, чи системи пружних тіл, послаблених щілинами (тріщинами), важливу роль відіграє коефіцієнт інтенсивності напружень на краю щілини. Зокрема, у цій задачі коефіцієнти інтенсивності контактних напружень $\tau(x)$ визначаються за формулами [6]

$$K_{\text{III}}^{(i)} = \lim_{S_i \to 0} \{\sqrt{2\pi S_i}\, \tau(x)\}, \quad i = 1, 2; \quad S_1 = 1 - x, \quad S_2 = x - \varepsilon. \tag{3.2}$$

Обчислення показали, що для $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 0{,}8$ (з точністю до $0[\varepsilon^p (\mu_k \varepsilon)^{-q}]$, $P+q<5$)

$$K_{\text{III}}^{(1)} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \Bigg\{ F_0 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k F_k \Bigg[w_0(\mu_k) +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{3} \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}(2n)!!}{(2n+1)(2n-2m)!!} \times \varepsilon^{2n+2-m} w_{m+1}(\mu_k \varepsilon)/(\mu_k \varepsilon)^m \Bigg\}, \tag{3.3}$$

$$K_{III}^{(2)}=\frac{4\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\left[F_0\varepsilon_1(0{,}8479+0{,}2667\,\varepsilon^2)+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_kF_kw_1(\mu_k\varepsilon)\right], \quad (3.4)$$

а для $0{,}5\leqslant\varepsilon<1\left(\text{з точністю до } O(\lambda^{-3}),\ \lambda=2/\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

$$K_{III}^{(i)}=\frac{\sqrt{\pi\lambda}}{\varepsilon}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{2}(-1)^{n(i+1)}F_m\eta_{nm},\ i=1,\ 2. \quad (3.5)$$

У наведених формулах

$$w_\nu(\mu_kx)=\sqrt{\frac{2}{\pi\mu_kx}}W_{\nu+\frac{1}{2}}(\mu_kx),\ \eta_{00}=\varepsilon^{3/4}/(\ln 2\lambda+0{,}0793)\varepsilon_1,$$

$$\eta_{10}=1{,}5\,\varepsilon^{3/4}\varepsilon_1\lambda^{-1},\ \eta_{20}=0{,}9375\,\varepsilon^{3/4}\varepsilon_1\lambda^{-2},\ \eta_{0k}=\frac{S_0-\frac{1}{2}\lambda^{-1}S_1}{\ln 2\lambda+0{,}0793},$$

$$\eta_{1k}=\frac{1}{2}S_1\lambda^{-1}-\frac{1}{4}S_2\lambda^{-2},\ \eta_{2k}=\left(\frac{1}{4}S_2-0{,}375\,S_0\right)\lambda^{-2}, \quad (3.6)$$

$$S_0=W_1(\mu_k),\ S_1=2\mu_kW_0(\mu_k)-W_1(\mu_k),$$
$$S_2=-4\mu_kW_0(\mu_k)+(4\mu_k^2-1)W_1(\mu_k),\ k=\overline{1,\ \infty}.$$

4. Як приклад розглянемо задачу I, коли $f_1(\zeta)=f_2(\zeta)=0$, $U(\rho)=\alpha\rho$ (α — кут повороту верхнього торця циліндра як жорсткого цілого під впливом моменту кручення M). Тоді $F_0=\alpha-N_0$, $F_k=0$ $(k=\overline{1,\infty})$. Проведені на ЕОМ обчислення показа-

Таблиця 1

Значення жорсткості на кручення C при $0\leqslant\varepsilon\leqslant0{,}7$

П	ε	δ = 1	δ = 2	δ = 4
0,5	0	1,92	1,40	0,913
1		1,19	0,967	0,707
4		0,353	0,339	0,300
0,5	0,3	1,92	1,32	0,911
1		1,19	0,926	0,706
4		0,364	0,334	0,300
0,5	0,5	1,88	1,38	0,909
1		1,17	0,963	0,931
4		0,362	0,339	0,300
0,5	0,7	1,87	1,36	0,890
1		1,17	0,951	0,693
4		0,362	0,337	0,298

Таблиця 2

Значення жорсткості на кручення C при $0{,}5\leqslant\varepsilon\leqslant0{,}95$

П	ε	δ = 1	δ = 2	δ = 4
0,5	0,5	1,18	1,37	1,05
1		0,855	0,956	0,790
4		0,324	0,338	0,315
0,5	0,7	1,38	1,30	0,955
1		0,959	0,923	0,732
4		0,338	0,334	0,305
0,5	0,9	1,42	1,18	0,810
1		0,981	0,858	0,644
4		0,341	0,325	0,288
0,5	0,95	1,40	1,10	0,737
1		0,969	0,818	0,597
4		0,340	0,319	0,279

ли, що при даних граничних умовах безрозмірна жорсткість пружної системи на кручення

$$C = M/(\alpha R_1^3 G_2) = \pi D_0 (1 - \varepsilon_0^4)/(2H), \; D_0 = N_0/\alpha \qquad (4.1)$$

зростає зі зменшенням параметрів ε_0, H, δ, але мало змінюється при зміні параметрів ε_1 і ε. Зокрема, табл. 1, 2 для C при $\varepsilon_0 = 0$,

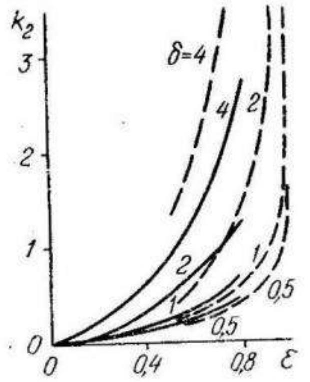


Рис. 1.

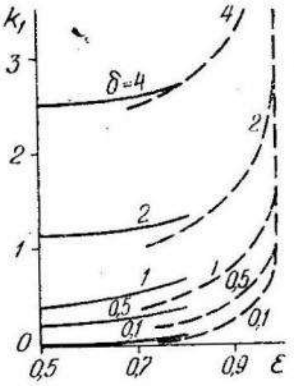


Рис. 2.

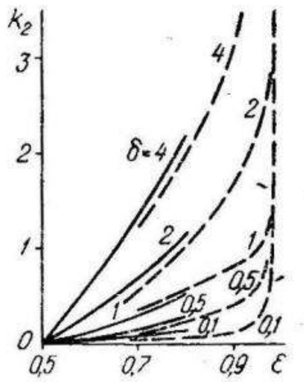


Рис. 3.

$\varepsilon_1 = 1$ (випадок внутрішньої щілини), одержані методами малого та великого параметрів ε, свідчать, що результати перекриваються при $0{,}5 \leqslant \varepsilon \leqslant 0{,}8$. Безрозмірні коефіцієнти інтенсивності контактних напружень $k_i = \pi R_1^3 G_2 K_{\mathrm{III}}^{(i)}/(2M)$ $(i = 1, 2)$ майже не залежать від H $(H > 0{,}5)$, але істотньо залежать від всіх решти параметрів. На рис. 1 показані графіки залежності k_2 від параметрів ε і δ при $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_0 = 0$, $H = 1$, одержані методами малих ε (суцільні криві) і великих ε (пунктирні криві). Аналогічні графіки зображені на рис. 2 і 3 для k_1 і k_2 при $\varepsilon_0 = 0{,}5$, $\varepsilon_1 = 0{,}99$ і $H = 4$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Осесимметричная задача о действии кольцевого штампа на упругое полупространство. — «Инженерный журнал. Механика твердого тела», 1967, № 4.
2. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
3. Грилицкий Д. В., Кизыма Я. М. Совместное кручение стержня и полупространства. — «Прикладная механика», 1967, т. 3, вып. 2.
4. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., ИЛ, 1955.
5. Фримэн, Кир. Кручение цилиндрического стержня, прикрепленного к упругому полупространству. — «Прикладная механика», серия Е, 1967, т. 34, № 3.
6. Irwin G. R. Fracture. Handbuch der Physik, Bd. 6, Springer-Verlag, Berlin, 1958.
7. Keer L. M., Freeman N. J. Torsion of a finite elastic cylindrical rod partially bonded to an elastic half—space. — «Quart. Appl. Math.», 1969, vol. 26, № 4.

УДК 539.311

Г. Т. СУЛИМ

РЕГУЛЯРНІСТЬ ДЕЯКИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ*

У роботі [2] задачу про пружну рівновагу кусково-однорідної площини з тонкостінним пружним включенням скінченної довжини на лінії розділу матеріалів зведено до системи трьох інтегро-диференціальних рівнянь. Для випадку симетричного навантаження однорідної площини з включенням одержана безмежна система лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення коефіцієнтів розкладу шуканої функції у ряд за поліномами Чебишова, яка розв'язується методом редукції. Ця ж задача у менш загальній постановці розв'язана аналогічним методом у [4].

У цій статті обгрунтовується застосування методу редукції шляхом дослідження регулярності систем лінійних алгебраїчних рівнянь задачі [2, 4], одержаних для довільного силового навантаження.

Запишемо системи рівнянь відносно A_j^i

$$\frac{\pi}{2} A^0_{2p+1+k} + \sum_{l=0}^{\infty} a^k_{pl} A^0_{2l+1+k} = \Phi_{2p+k}, \qquad (1.к)$$

$$(k=0,1;\ p=0,1,\ \ldots),$$

$$\frac{\pi}{2} A^1_{2p+1+k} + \lambda \sum_{l=0}^{\infty} B_{2l+k,\,2p+k} A^1_{2l+1+k} \Phi^1_{2p+k}, \qquad (2.к)$$

де

$$a^k_{pl} = r_1 B_{2l+k,\,2p+k} + r_2 \sum_{n=0}^{\infty} b^k_{lnp},\ b^k_{lnp} = B_{2l+k,\,2n+k} B_{2n+k,\,2p+k}$$

і співвідношення

$$A^2_{2p+1+k} = \frac{2}{\pi n_1}\left[\Phi^2_{2p+k} - \frac{\pi}{2} A^0_{2p+1+k} - n' \sum_{l=0}^{\infty} B_{2l+k,\,2p+k} A^0_{2l+1+k}\right]$$

$$(k=0,1;\ p=0,1,\ \ldots). \qquad (3.к)$$

1. Неважко показати, що при довільному силовому навантаженні однорідної площини з включенням для визначення коефіцієнтів розкладу (21) з [2] маємо системи рівнянь (1.к), (2.к), а також співвідношення (3.к) ($k=0,\ 1$), де позначено

$$B_{l-1,\,p} = \frac{1}{l^2 - p^2} - \frac{1}{l^2 - (p+2)^2},\ \lambda = -a_3'$$

* Робота виконана під керівництвом проф. Д. В. Грилицького.

$$\Phi_j^0 = g_j^0 - n'\delta_j A_0^0,\ \Phi_j^1 = g_j^1 + a_3'\delta_j A_0^1,\ \Phi_j^2 = g_j^2 + (b_3' A_0^0 + b_4' A_0^2)\,\delta_j, \tag{4}$$

$$g_j^i = \int_{-1}^{1} G_c(x)\,U_j(x)\sqrt{1-x^2}\,dx\,,\quad \delta_j = \begin{cases} 0 & j \text{ — парне,} \\ B_{-1,\,j} & j \text{ — непарне,} \end{cases}$$

$$G_i(x) = F_0(x) + \frac{n'}{2a} A^0,\ G_1(x) = F_1(x) - \frac{a_3'}{2a} A_1,$$

$$G_2(x) = F_2(x) - \frac{1}{2a}(b_3' A^0 + b_4' A^2);$$

A_0^i визначається з умов (14) [2],

$$A_0^i = \frac{1}{\pi} A^i,\quad A^i = \int_{-a}^{a} f_i(x)\,dx. \tag{5}$$

Решта позначень такі ж як і в [2]. Зауважимо тільки, що для всіх можливих значень параметрів задачі

$$r_1,\ r_2,\ \lambda > 0. \tag{6}$$

Системи рівнянь (1.*к*), (2.*к*) розділяються на дві незалежні (1.0), (2.0) для симетричного навантаження і (1.1), (2.1) для несиметричного.

2. Дослідимо систему рівнянь (1.*к*). Для цього розглянемо вирази

$$S_p^k = \sum_{l=0}^{\infty} |B_{2l+k,\,2p+k}|\,,\quad M_p^k = \sum_{l=0}^{\infty}\left|\sum_{n=0}^{\infty} b_{lnp}^k\right|. \tag{7}$$

Можна показати [1], що

$$S_p^0 = \begin{cases} \dfrac{8}{3} - \dfrac{\pi^2}{8}\,(p=0), \\ \dfrac{8\,(2p+1)}{(4p+1)\,(4p+3)}\,(p = 1,\ 2,\ \ldots), \end{cases} \tag{8}$$

$$S_p^1 = \frac{16\,(p+1)}{(4p+3)\,(4p+5)} - \frac{4\,(p+1)}{(2p+1)^2\,(2p+3)^2}\,(p=0,\ 1,\ \ldots), \tag{9}$$

$$S_p^k \leqslant S_0^k\,,\ M_p^k \leqslant S_0^k S_p^k \leqslant (S_0^k)^2\quad (k=0,\ 1;\ p=0,\ 1,\ \ldots). \tag{10}$$

Відзначимо, що співвідношення (9) наведено також у роботі [3].

Рівняння (1.*к*) перепишемо в іншому вигляді

$$b_p^k A_{2p+1+k}^0 + \sum_{l=0}^{\infty}{}' a_{pl}^k A_{2l+1+k}^0 = \Phi_{2p+k}\ (k=0,\ 1;\ p=0,\ 1,\ \ldots), \tag{11}$$

де

$$b_p^k = \frac{\pi}{2} + r_1 a_p^k + r_2 \sum_{n=0}^{\infty} b_{pnp}^k, \quad a_p^k = B_{2p+k,2p+k}; \tag{12}$$

штрих означає, що в сумі відсутній член $l=p$. Оскільки a_p^k, b_{pnp}^k, r_1, $r_2>0$, то умова регулярності системи (12) набере вигляду

$$D_p^k = \frac{\sum_{l=0}^{\infty}{}' |a_{pl}^k|}{b_p^k} < 2\frac{r_1(S_p^k - a_p^k) + r_2 M_p^k}{\pi + 2r_1 a_p^k} < 1 \quad (k=0,\ 1;\ p=0,\ 1,\ \ldots). \tag{13}$$

Звідки використавши (8)—(10) маємо умови

$$r_1 > \frac{4}{\pi^2}[2r_2(S_0^0)^2 - \pi] \quad (p=0);$$

$$r_2 < \frac{\pi}{2S_0^0 S_p^0} (p=1,\ 2,\ldots) \text{ для } k=0, \tag{14}$$

$$r_2 S_0^1 S_p^1 < \frac{\pi}{2} + r_1 \frac{4(p+1)}{(2p+1)^2(2p+3)^2} \quad (p=0,\ 1,\ \ldots) \text{ для } k=1. \tag{15}$$

Для невід'ємних r_1 умови (14) та (15) виконуються, коли

$$r_2 < \frac{\pi}{2(S_0^k)^2} \quad (k=0,\ 1). \tag{16}$$

Отже, за умови (16) система (1.к) буде регулярною для довільних $r_1 \geqslant 0$.

Коли r_1, r_2 обмежені, то $\lim_{p\to\infty} D_p^k = 0$ $(k=0,1)$ і система (1.к) є принаймні квазірегулярною.

Окремо розглянемо випадок, коли $r_1 = \infty$. Це можливе, якщо включення: а) нерозтягливе; б) абсолютно податливе. Тоді система рівнянь (1.к) вироджується у

$$\sum_{l=0}^{\infty} B_{2l+k,\,2p+k} A_{2l+1+k}^0 = \delta \sum_{l=0}^{\infty} B_{2l+k,\,2p+k} \Phi_{2l+k}^0 \quad (p=0,\ 1,\ \ldots) \tag{17}$$

і має розв'язок

$$A_{2l+1+k}^0 = \delta \Phi_{2l+k}^0 \quad (k=0,\ 1;\ l=0,\ 1,\ \ldots);$$

$$\delta = \begin{cases} \frac{2}{\pi} & \text{для випадку а;} \\ 0 & \text{для випадку в.} \end{cases} \tag{18}$$

3. Розглянемо рівняння (2.к). Враховуючи, що $\lambda \geqslant 0$, умова регулярності для нього матиме вигляд

$$2\lambda (S_p^k - a_p^k)(\pi + 2\lambda a_p^k)^{-1} < 1 \quad (k = 0,\ 1;\ p = 0,\ 1,\ \ldots), \tag{19}$$

звідки одержимо

$$\begin{cases} \lambda > -\dfrac{4}{\pi}\ (p = 0) \\ -\infty < \lambda < \infty\ \ (p = 1,\ 2,\ \ldots) \end{cases} \quad \text{для } k = 0;$$

$$\lambda \frac{4p+1}{(2p+1)^2\,(2p+3)^2} > -\frac{\pi}{2}\ \ (p = 0,\ 1,\ \ldots) \text{ для } k = 1. \tag{20}$$

Нерівності (20) виконуються для довільного $0 \leqslant \lambda < \infty$. Це твердження суттєво узагальнює результати робіт [3, 5], де задача для півплощини з пружною накладкою зводиться до системи рівнянь, аналогічної системі (2.к). Одержані в [3, 5] області регулярності не виходять за межі $\lambda < 1{,}1$ для $k = 0$ і $\lambda < 2{,}5$ для $k = 1$.

Підсумовуючи сказане вище, можна стверджувати, що для розв'язання безмежних систем лінійних алгебраїчних рівнянь (1.к), (2.к) можна застосовувати метод редукції при довільних силових, геометричних та механічних параметрах задачі [2]. Це твердження також правильне для задач [3, 4, 5], більше того, системи рівнянь, одержані в цих роботах, будуть завжди регулярними.

ЛІТЕРАТУРА

1. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
2. Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т. Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением. «Математические методы и физико-механические поля», 1975, вып. 1.
3. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. — «Прикладная математика и механика», 1970, т. 34, вып. 3.
4. Сулим Г. Т. Концентрація напружень на тонкостінному включенні в кусково-однорідній площині. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1974, вип. 9.
5. Эрдоган, Гупта. Задача о полуплоскости с упругой накладкой. — «Прикладная механика», «Мир», сер. E, 1971, № 4.

УДК 539.3

Т. Л. МАРТИНОВИЧ, М. К. ЗВАРИЧ, М. К. ЧОБА

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З ВПРЕСОВАНИМ КРИВОЛІНІЙНИМ СТЕРЖНЕМ

Нехай в точках z_i та z_j ізотропної пластинки з криволінійним отвором прикладено відповідно зосереджені сили $P_i(X_i, Y_i)$ і моменти M_j $(i=1, 2, \ldots, r;\ j=1, 2, \ldots, s)$. В отвір впресовано або натягнуто на диск замкнутий криволінійний стержень (кільце) сталого поперечного перерізу, контур якого до деформації відрізняється від контура отвору або диска на величину порядку допустимих пружних переміщень. Тертям між пластинкою і кільцем нехтуємо.

Із умови задачі випливає, що після того, як кільце впресовано в отвір пластинки або натягнуто на диск, на лінії контакту L виконуються рівності

$$u_n - u_{1n} = \mp \varepsilon^*;\quad N^{(i)} = N_1^{(i)};\quad T^{(i)} = T_1^{\,i} = 0, \tag{1}$$

де u_n — нормальна складова переміщення контурних точок пластинки; $N^{(i)}$, $T^{(i)}$ — нормальна і дотична складові контактного напруження; ε^* — величина порядку пружних переміщень. Ті ж величини, позначені індексом — «1» належать до стержня.

Виражаючи контурні рівності (1) через аналітичні функції $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ змінної $z=x+iy$, одержуємо [3]:

$$\begin{gathered}\operatorname{Re} d\left\{i\bar{\dot t}\left[\varkappa\overline{\varphi_1}(t) - t\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)}\right]\right\} = 2\mu d\left[u_{1n} \mp \varepsilon^*\right];\\ d\left[\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)}\right] = N^{(i)}dt,\ t\in L.\end{gathered} \tag{2}$$

Тут t — афікс точки контура L; $\dot t = \dfrac{dt}{ds}$.

Залежність між переміщеннями точок крайнього волокна стержня L, відносним подовженням e_0 нульової лінії L_0 і кутом повороту поперечного перерізу стержня θ_b виражається, згідно з [1], формулою

$$\begin{gathered}u_{1n} = \operatorname{Re}\left\{i\bar{\dot t}\int\limits_{t_0}^{t}\left[\frac{r_0}{r_1}e_0 + (r_1 - r_0)\frac{d\theta_b}{ds_1} + i\theta_b\right]dt + \dot t_0 c\,\bar{\dot t}\right\},\\ c = u_{1n}^{\circ} + iu_{1\tau}^{\circ},\end{gathered} \tag{3}$$

де r_0 — радіус кривизни, нейтральної для чистого згину, лінії L_0, яка зміщена від осі стержня до центру його кривизни на величину η_c. З рівнянь рівноваги елемента стержня з врахуванням третьої із рівності (1) і закону Гука [1]

$$V_\tau = ge_0;\quad L_b = g\eta_c r_1 \dot t\,\frac{d\theta_b}{dt} \tag{4}$$

одержуємо

$$N^{(i)} = \mp \frac{1}{2hr_1} \operatorname{Re}\left\{V_\tau + r_1 t \frac{d}{dt}\left(r_1 t \frac{dV_\tau}{dt}\right)\right\} + \frac{h^*}{h}\frac{r_2}{r_1} N;$$

$$\frac{dL_b}{as_1} = -r_0 \frac{dV_\tau}{ds_1}. \qquad (5)$$

Верхній знак береться при $r_1 < r_0$, нижній — при $r_1 > r_0$. У (4) і (5) використані позначення роботи [2].

Помножимо рівності (2) і спряжені їм на довільну функцію $F_1(z)$ голоморфну в області D і проінтегруємо вздовж контура L. Тоді одержуємо граничні умови задачі в формі контурних інтегралів, що містять довільну функцію $F_1(z)$:

$$\int_L \bar{t}\,[\varkappa\varphi_1(t) - t\,\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)}]\,F_1'(t)\,dt -$$

$$-\int_L t\,[\varkappa\overline{\varphi_1(t)} - \bar{t}\,\varphi_1'(t) - \psi_1(t)]\,F_1'(t)\,dt =$$

$$= 4\mu i \int_L (u_{1n} \mp \varepsilon^*)\,F_1'(t)\,dt;$$

$$\int_L [\varphi_1(t) + t\,\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)}]\,F_1'(t)\,dt = -\int_L N^{(i)} F_1(t)\,dt + \Delta_2;$$

$$\int_L [\varphi_1(t) + t\,\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)}]\,\overline{F_1'(t)}\,dt = -\int_L N^{(i)}\,\overline{F_1(t)}\,dt + \Delta_3. \qquad (6)$$

Тут

$$\Delta_2 = \{[\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)}]F_1(t)\}_L;$$

$$\Delta_3 = \{[\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)}]\overline{F_1(t)}\}_L \text{ —} \qquad (7)$$

прирости виразів, взятих в дужки, при обході замкнутого контура L.

Надалі вважатимемо, що кільце не навантажене.

Припустимо, що розглядувана область конформно відображається на зовнішність (внутрішність) одиничного кола γ за допомогою функції $z = \omega(\zeta)$. Тоді граничні умови (6) мають вигляд:

$$\int_\gamma \left[\varkappa\varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\,\overline{\varphi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)}\right] \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\sigma\,|\omega'(\sigma)|}\,F'(\sigma)\,d\sigma +$$

$$+\int_{\gamma}\left[\varkappa\overline{\varphi(\sigma)}-\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\varphi'(\sigma)-\psi(\sigma)\right]\frac{\sigma\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}F'(\sigma)\,d\sigma=$$

$$=4\mu\int_{\gamma}(u_{1n}\mp\varepsilon^*)F'(\sigma)\,d\sigma;$$

$$\int_{\gamma}\left[\varphi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\sigma)}+\overline{\psi(\sigma)}\right]F'(\sigma)\,d\sigma= \tag{8}$$

$$=-\int_{\gamma}N^{(i)}F(\sigma)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma+\Delta_2;$$

$$\int_{\gamma}\left[\varphi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\sigma)}+\overline{\psi(\sigma)}\right]\overline{F'(\sigma)}\,d\bar{\sigma}=$$

$$=-\int_{\gamma}N^{(i)}\overline{F(\sigma)}\,\omega'(\sigma)\,d\sigma+\Delta_3.$$

У випадку кругового отвору $\omega(\zeta)=r_1\zeta$. Функції $\varphi(\zeta)=\varphi_1[\omega(\zeta)]$, $\psi(\zeta)=\psi_1[\omega(\zeta)]$, $F(\zeta)=F_1[\omega(\zeta)]$ допускають поза одиничним колом розклади вигляду [3, 4]

$$\varphi(\zeta)=\sum_{m=1}^{3}c_m\zeta^m-\sum_{i=1}^{r}P_i\ln(\zeta-\zeta_i)+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\zeta^{-k};$$

$$\psi(\zeta)=\sum_{m=1}^{3}d_m\zeta^m+\varkappa\sum_{i=1}^{r}\bar{P}_i\ln(\zeta-\zeta_i)+\sum_{i=1}^{r}\frac{P_i\bar{\zeta}_i}{\zeta-\zeta_i}+ \tag{9}$$

$$+\sum_{j=1}^{s}\frac{M_j^*}{\zeta-\zeta_j}+\sum_{k=0}^{\infty}b_k\zeta^{-k};$$

$$F(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\zeta^{-n}.$$

Коефіцієнти c_m і d_m залежать від виду навантаження пластинки на нескінченності; $P_i=\dfrac{X_i+iY_i}{4\pi h(1+\varkappa)}$; $M_j^*=\dfrac{iM_j}{2\pi r_1}$.

Величини e_0 і θ_b, що описують деформацію кільця, подаємо на γ в формі комплексних рядів Фур'є

$$e_0=\alpha_0+2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sigma^k;\quad \theta_b=\beta_0+2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sigma^k. \tag{10}$$

Нормальний тиск (5) на лінії контакту L з врахуванням (4) і (10) обчислюється за формулою

$$N^{(i)} = \frac{g}{2\,hr_1}\left[\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(1-k^2)\left(\alpha_k\sigma^k + \bar{\alpha}_k\sigma^{-k}\right)\right], \tag{11}$$

Якщо $N^{(i)} \leqslant 0$, то пластинка контактуватиметься з кільцем вздовж всього контура L. За допомогою цієї умови визначається величина $\varepsilon^*_{\min}$.

Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку з круговим отвором радіуса r_1, в який впресовано стержень сталого перерізу шириною «b». Зовнішній радіус кільця в недеформованому стані дорівнює $r_1+\varepsilon^*$ $(\varepsilon^*>0)$. Вважаємо, що початок координат лежить в центрі отвору, вісь Ox напрямлена вздовж повздовжньої осі симетрії пластинки.

Вносимо розклади (9), (10) в крайові умови (8) з врахуванням (3) і (11) і виконуємо інтегрування вздовж контура γ, враховуючи при цьому, що всі E_n, крім E_j, дорівнюють нулю. Тоді одержуємо таку систему алгебраїчних рівнянь:

$$\bar{b}_1 - \frac{g}{2\,h}\alpha_0 = -c_1 - \bar{c}_1 - \sum_{i=1}^{r} P_i\zeta_i^{-1};\; b_2 = -\bar{c}_2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\bar{P}_i\bar{\zeta}_i^{-2};$$

$$b_1 + \bar{b}_1 + 4\,\mu r_0\alpha_0 = -4\,\mu\varepsilon^* - (1-\varkappa)\left(c_1 + \bar{c}_1 + \sum_{i=1}^{r} P_i\zeta_i^{-1} - \sum_{i=1}^{r}\bar{P}_i\bar{\zeta}_i^{-1}\right);$$

(12)

$$\bar{b}_n - (\varkappa + n - 2)\,\bar{a}_{n-2} - \frac{4\,\mu r_0(1+(r_0/\eta_c)}{n\,(n-2)}\,\alpha_{n-1} = A_n^{(1)};$$

$$\bar{b}_n - (n-2)\,\bar{a}_{n-2} + \frac{(n-2)\,g}{2\,h}\,\alpha_{n-1} = A_n^{(2)};$$

$$\bar{a}_{n-2} - \frac{ng}{2\,h}\alpha_{n-1} = A_n^{(3)},$$

де

$$A_n^{(1)} = (\varkappa-3)\,c_3\delta_{-1,\,2-n} - d_3\delta_{-1,\,4-n} - d_2\delta_{-1,\,3-n} - d_1\delta_{-1,\,2-n} +$$

$$+\frac{\varkappa}{n}\sum_{i=1}^{r} P_i\zeta_i^{-n} + \frac{\varkappa}{n-2}\sum_{i=1}^{r}\bar{P}_i\bar{\zeta}_i^{2-n} - \sum_{i=1}^{r} P_i\zeta_i^{-n} + \sum_{i=1}^{r} P_i\bar{\zeta}_i\zeta_i^{1-n} +$$

$$+\sum_{j=1}^{s} M_j^*\zeta_j^{1-n};$$

(13)

$$A_n^{(2)} = -c_3\delta_{-1,2-n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} P_i\zeta_i^{-n};$$

$$A_n^{(3)} = -3c_3\delta_{-1,n-4} - d_3\delta_{-1,n-6} - d_2\delta_{-1,n-5} - d_1\delta_{-1,n-4} -$$

$$-\sum_{i=1}^{r} P_i\zeta_i^{-n} + \frac{\varkappa}{n-2}\sum_{i=1}^{r}\overline{P}_i\overline{\zeta}_i^{2-n} + \sum_{i=1}^{r} P_i\overline{\zeta}_i\zeta_i^{1-n} + \sum_{j=1}^{s} M_j^*\zeta_j^{1-n};$$

$$\delta_{-1,j} = \begin{cases} 1, & j=-1 \\ 0, & j \neq -1 \end{cases}, \quad n = 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Розглянемо деякі часткові випадки навантаження пластинки.

1. Пластинка згинається в своїй площині моментами M_1. Тоді, враховуючи $c_1=d_1=c_3=d_3=0$; $P_i=M_j^*=0$

$$c_2 = \frac{iM_1r_1^2}{8I};\ d_2 = -\frac{iM_1r_1^2}{8I},$$

одержуємо

$$\alpha_0 = -\frac{4h\mu\varepsilon^*}{D};\ b_1 = -\frac{2\mu g\varepsilon^*}{D};\ b_2 = \frac{iM_1r_1^2}{8I};$$

$$\alpha_3 = -\frac{ih}{4F}(1+\varkappa)\frac{M_1r_1^2}{I};\ a_2 = \frac{i}{8F}\left[2g - h\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right)\right]\frac{M_1r_1^2}{I};$$

$$b_4 = \frac{i}{4F}\left[(1-\varkappa)g - h\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right)\right]\frac{M_1r_1^2}{I};\ \beta_3 = \frac{ir_0}{3\eta_c}\alpha_3, \tag{14}$$

де $F = h\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right) + 2(1+2\varkappa)g$; $D = 4h\mu r_0 + g$.

Мінімальну величину посадки $\varepsilon^*_{\min}$, при якій кільце не відстає від пластинки по всьому контуру L, знаходимо з умови $N^{(i)}=0$ при $\theta = \frac{\pi}{2}$; маємо

$$\varepsilon^*_{\min} = (1+\varkappa)\frac{D}{\mu F}\frac{M_1r_1^2}{I}. \tag{15}$$

2. Згин у своїй площині поперечною силою Q. У цьому випадку

$$c_1 = 0;\ c_2 = -\frac{iAr_1^2}{8};\ c_3 = -\frac{iBr_1^3}{24};\ d_3 = \frac{iBr_1^3}{12};\ d_2 = \frac{iAr_1^2}{8};$$

$$d_1 = -iE_1r_1;\ A = \frac{Q(l-a)}{I};\ B = -\frac{Q}{I};\ E_1 = \frac{Qh_0^2}{2I};\ P_i = M_j = 0. \tag{16}$$

В (16) використані позначення роботи [4].

Шукані коефіцієнти

$$\alpha_0 = -\frac{4\mu h\varepsilon^*}{D};\ b_1 = -\frac{2\mu g\varepsilon^*}{D};\ b_2 = -\frac{1}{8} iAr_1^2;$$

$$\alpha_2 = -\frac{i}{2E}(1+\varkappa)h(r_1^2 - 6h_0^2)Br_1;\ \alpha_3 = \frac{i}{4F}(1+\varkappa)hAr_1^2;$$

$$a_1 = -\frac{i}{8E}\left\{8h\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right)(r_1^2 - 4h_0^2) - 3g\left[(1-\varkappa)r_1^2 - 8h_0^2\right]\right\}Br_1;$$

$$b_3 = -\frac{i}{6E}\left\{8h\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right)(r_1^2 - 3h_0^2) + \right.$$

$$\left. + 3g\left[2\varkappa r_1^2 + 3(1-\varkappa)h_0^2\right]\right\}Br_1;$$

$$a_2 = -\frac{i}{8F}\left[2g - h\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right)\right]Ar_1^2;$$

$$a_3 = -\frac{i}{6K}\left[15g - 4h\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right)\right]Br_1^3; \tag{17}$$

$$b_4 = -\frac{i}{4F}\left[(1-\varkappa)g - h\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right)\right]Ar_1^2;$$

$$\alpha_4 = \frac{5i}{2K}(1+\varkappa)hBr_1^3;$$

$$b_5 = -\frac{i}{4K}\left[15(1-\varkappa)g - 8h\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right)\right]Br_1^3.$$

Тут введено позначення

$$E = 8h\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right) + 3(1+3\varkappa)g;$$

$$K = 8h\mu r_0\left(1+\frac{r_0}{\eta_c}\right) + 15(3+5\varkappa)g.$$

3. Розтяг пластинки на нескінченості. Тоді $c_2 = c_3 = d_3 = d_2 = 0$; $P_i = M_j = 0$,
а

$$c_1 = \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{4} r_1;\ d_1 = -\frac{\sigma_x^\infty - \sigma_y^\infty}{2} r_1.$$

Одержуємо результати [1].

4. Розтяг пластинки зосередженими силами. Обмежимося випадком двох рівних і прямопротилежних сил. Не порушуючи загальності, вважаємо, що сили прикладені в точках $z_1 = \rho$ і $z_2 = -\rho$. Враховуючи, що навантаження на нескінченності відсутні і $M_j = 0$, коефіцієнти функцій $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ і e_0 обчислюються з системи (12).

У випадку розтягу пластинки силами P, мінімальна величина посадки $\varepsilon^*_{\min}$ дорівнює

$$\varepsilon^*_{\min} = \frac{P\rho^{-1}}{4\pi h\mu} + \frac{D}{2h\mu} \sum_{k=2,4,\ldots}^{\infty} (1-k^2)\,\alpha_k. \tag{18}$$

Нормальні напруження в перерізі кільця обчислюються за формулою

$$\sigma = E^*\left[\frac{r_0}{r}e_0 + (r_1 - r_0)\frac{r_1}{r}i\,\frac{d\Theta_b}{dt}\right], \tag{19}$$

де r — радіус кривизни довільного волокна стержня.

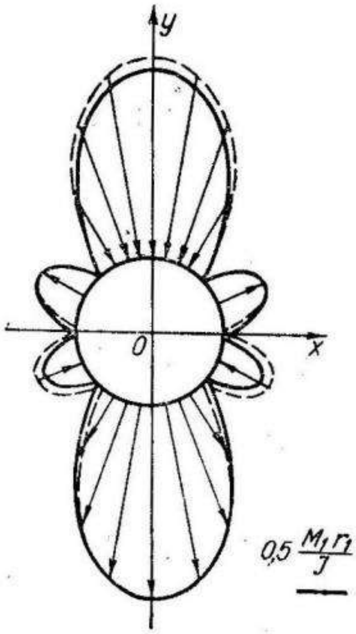


Рис. 1.

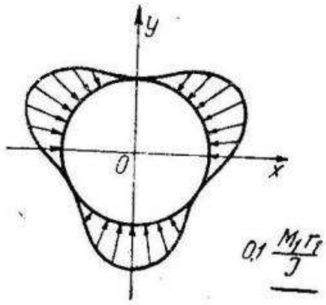


Рис. 2.

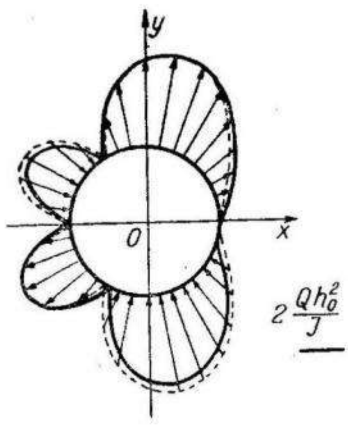


Рис. 3.

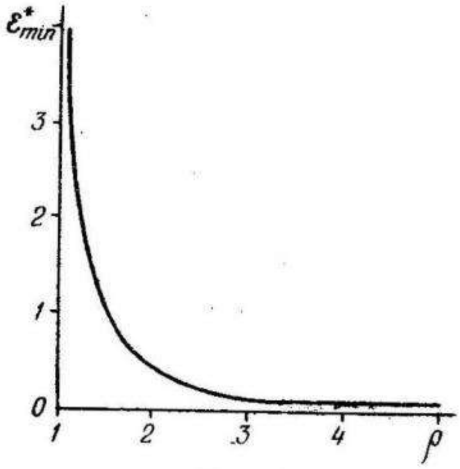


Рис. 4.

Для числового прикладу візьмемо мідну пластинку і стальне кільце прямокутного перерізу при таких значеннях пружних сталих матеріалу і геометричних параметрів: $\mu = 4{,}42 \times$ $\times 10^5$ *кг/см²*; $E^* = 2{,}1 \cdot 10^6$ *кг/см²*; $\varkappa = 2{,}08$; $\gamma = \frac{h^*}{h} = 1{,}0$; $\delta = \frac{b}{r_1} =$ $= 0{,}2$; $\frac{b}{a} = 4$; $\frac{b}{h_0} = 10$; $\frac{r_1}{h_0} = 0{,}25$.

На рис. 1, 2 побудовано графіки розподілу напруження σ_θ в пластинці і контактного тиску $N^{(i)}$ у випадку згину пластинки моментами M_1. На рис. 3 побудовані графіки напружень σ_θ, коли пластинка згинається поперечною силою Q. Розрахунки проведені для випадку, коли $\varepsilon^* = \varepsilon^*_{\min}$. Пунктирною лінією зображені графіки розподілу напружень σ^*_θ при відсутності кільця [4].

Залежність $\varepsilon^*_{\min}$, в долях $10^{-10}/9{,}81\ Pr_1$ *н/м*, від точки прикладання зосереджених сил подана на рис. 4.

ЛІТЕРАТУРА

1. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дисс., Львов, 1970.
2. Мартынович Т. Л., Зварич М. К. Впрессовка замкнутого стержня в криволинейное отверстие изотропной пластинки. — «Прикладная механика», 1974, т. 10, вып. 9.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
4. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. М., Гостехиздат, 1951.

УДК 539. 377

В. З. ДІДИК, Б. М. КОРДУБА

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ В ЗАЩЕМЛЕНІЙ ПЛАСТИНЦІ З ПОСТІЙНИМ КОЕФІЦІЄНТОМ ТЕПЛОВІДДАЧІ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ ТЕПЛООБМІНІ

Нехай півнескінченна пластинка, край якої $x=0$ защемлений, нагрівається джерелом тепла, яке має потужність $\frac{q}{2\delta}$ та рухається з постійною швидкістю в додатному напрямі осі y на віддалі d від її краю. Через поверхні пластинки здійснюється теплообмін із зовнішнім середовищем нульової температури.

Нестаціонарне температурне поле, яке виникає в пластинці, визначимо з рівняння теплопровідності [2]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \varkappa^2 T = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{q}{2\lambda\delta}\,\delta(x-d,\ y-v\tau), \qquad (1)$$

де $\delta(x-d,\ y-v\tau)$ — дельта-функція Дірака; $\varkappa^2=\frac{\alpha}{\lambda\delta}$, λ і a — відповідно коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності.

Крайові умови мають вигляд

$$T\Big|_{\substack{x\to\infty\\|y|\to\infty}}=0,\ \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{|y|\to\infty}=0,\ T\Big|_{x=0}=0,\ T(x,\ y,\ 0)=0. \tag{2}$$

Користуючись перетворенням Фур'є-Лапласа, знаходимо загальний розв'язок задачі теплопровідності для розглядуваної пластинки

$$T=\frac{q}{8\pi\lambda\delta}\left[K_0(\rho_-,\ \omega_-)-K_0(\rho_+,\ \omega_+)\right]\ e^{-\omega_1(y-v\tau)}, \tag{3}$$

де

$$K_0(\rho,\ \omega)=\int\limits_0^{\omega}\omega^{-1}e^{-\frac{\rho}{2}\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)}d\omega,\ \omega\pm=\frac{\nu_\alpha v\tau}{\sqrt{(x\pm d)^2+(y-v\tau)^2}},$$

$$\rho_\pm=\omega_1\nu_\alpha\sqrt{(x\pm d)^2+(y-v\tau)^2},\ \omega_1=\frac{v}{2a},\ \nu_\alpha=1+\left(\frac{\varkappa}{\omega_1}\right)^2 -$$

критерій відносного впливу тепловіддачі на рухоме температурне поле.

Для визначення температурних напружень, викликаних температурним полем (3), скористаємось формулами з [1]:

$$\sigma_{xx}=\frac{2G}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\chi-2G\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2};$$

$$\sigma_{yy}=\frac{2G}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(2+\nu)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\chi-2G\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}; \tag{4}$$

$$\sigma_{xy}=\frac{2G}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\chi+2G\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y},$$

де χ — бігармонічна функція; Φ — термопружний потенціал переміщень; G — модуль зсуву; ν — коефіцієнт Пуассона; α_t — температурний коефіцієнт лінійного розширення.

Граничні умови запишуться у вигляді

$$U=0,\ V=0 \text{ при } x=0,\ \lim_{\substack{x\to\infty\\|y|\to\infty}}\sigma_{ij}=0. \tag{5}$$

Після застосування перетворень Фур'є-Лапласа, розв'язання відповідної крайової задачі, шукані вирази температурних напружень матимуть вигляд:

$$\sigma_x=\frac{a}{2(3-\nu)}\int\limits_0^{\tau}e^{-a\varkappa^2(\tau-\tau_0)}\Big(\operatorname{Re}\Big\{\rho\left[\beta_+^2+(1+\nu)\beta_+^3x\right]+$$

$$+\frac{(1+\nu)x}{2a(\tau-\tau_0)}\beta_+L_3^+ + \frac{1}{\sqrt{2a(\tau-\tau_0)}}[\beta_- + (1+\nu)\beta_+^2 x]L_2^+ +$$

$$+[\beta_-^2 + (1+\nu)\beta_+^3 x]L_1^+ - 2(1+\nu)xz_+^{-3} - 2z_+^{-2} +$$

$$+\frac{3-\nu}{2}(\omega_- z_-^{-2} - \omega_+ z_+^{-2} + \beta_-^2)\Big\} + \mathrm{Im}\left\{\frac{(1+\nu)x}{2a(\tau-\tau_0)}\beta_+L_3^- +\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2a(\tau-\tau_0)}}[\beta_- + (1+\nu)\beta_+^2 x]L_2^- + [\beta_-^2 + (1+\nu)\beta_+^3 x]L_1^- +$$

$$\left.+\frac{(3-\nu)(y-v\tau_0)}{4a(\tau-\tau_0)}\left(\frac{\omega_-}{z_-} - \frac{\omega_+}{z_+}\right)\right\}\Bigg)d\tau_0;$$

$$\sigma_y = \frac{a(1+\nu)}{2(3-\nu)}\int_0^\tau e^{-a\varkappa^2(\tau-\tau_0)}\left\{\mathrm{Re}\left[\rho\beta_+^2 + \frac{1}{\sqrt{2a(\tau-\tau_0)}}\beta_-L_2^+ +\right.\right.$$

$$\left.+\beta_-^2L_1^+ - 2z_+^{-2}\right] + \mathrm{Im}\left[\frac{1}{\sqrt{2a(\tau-\tau_0)}}\beta_-L_2^- + \beta_-^2L_1^-\right] -$$

$$\left.-\frac{(1+\nu)(3-\nu)}{4a(\tau-\tau_0)}(\omega_- - \omega_+)\right\}d\tau_0 - \sigma_x;$$

$$\tau_{xy} = \frac{a}{4(3-\nu)}\int_0^\tau e^{-a\varkappa^2(\tau-\tau_0)}\left(\mathrm{Re}\left\{\frac{(1+\nu)x}{a(\tau-\tau_0)}\beta_+L_3^- +\right.\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2a(\tau-\tau_0)}}[(1-\nu)\beta_- + 2(1+\nu)\beta_+^2 x]L_2^- + [(1-\nu)\beta_-^2 +$$

$$\left.+2(1+\nu)\beta_+^3 x]L_1^- + \frac{(3-\nu)(y-v\tau_0)}{2a(\tau-\tau_0)}\left(\frac{\omega_-}{z_-} - \frac{\omega_+}{z_+}\right)\right\} -$$

$$-\mathrm{Im}\left\{\rho[(1-\nu)\beta_+^2 + 2(1+\nu)\beta_+^3 x] + \frac{(1+\nu)x}{a(\tau-\tau_0)}\beta_+L_3^+ +\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2a(\tau-\tau_0)}}[(1-\nu)\beta_- + 2(1+\nu)\beta_+^2 x]L_2^+ +$$

$$+[(1-\nu)\beta_-^2 + 2(1+\nu)\beta_+^3 x]L_1^+ - \frac{4(1+\nu)x}{z_+^3} - \frac{2(1-\nu)}{z_+^2} +$$

$$\left.\left.+(3-\nu)\left(\frac{\omega_-}{z_-^2} - \frac{\omega_+}{z_+^2} + \beta_-^2\right)\right\}\right)d\tau_0,$$

де

$$\sigma_i = \frac{\sigma_{ii}}{2N}\ (i = x,\ y);\ \tau_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2N};\ N = \alpha_t E Q_0;$$

$$E = 2(1+\nu) G; \quad Q_0 = \frac{q}{2\pi\lambda\delta}; \quad z_0 = x + i(y - v\tau_0);$$

$$z_{\pm} = (x \pm d) + i(y - v\tau_0); \quad \beta_{\pm}^{k} = z_{+}^{-k} \pm z_{-}^{-k};$$

$$\rho = \operatorname{erfc}\left[\frac{d}{2\sqrt{a(\tau-\tau_0)}}\right]; \quad \omega_{\pm} = \exp\left[-\frac{(x \pm d)^2 + (y - v\tau_0)^2}{4a(\tau-\tau_0)}\right];$$

$$L_{\nu}^{+} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{D_{-\nu}\left[\frac{z_0}{\sqrt{2a(\tau-\tau_0)}}\right]\exp\left[\frac{ix(y-v\tau_0)}{4a(\tau-\tau_0)}\right] + \right.$$

$$\left. + D_{-\nu}\left[\frac{\bar{z}_0}{\sqrt{2a(\tau-\tau_0)}}\right]\exp\left[-\frac{ix(y-v\tau_0)}{4a(\tau-\tau_0)}\right]\right\} \times$$

$$\times \exp\left[\frac{x^2 - (y-v\tau_0)^2 - 2d^2}{8a(\tau-\tau_0)}\right];$$

$$L_{\nu}^{-} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\left\{D_{-\nu}\left[\frac{z_0}{\sqrt{2a(\tau-\tau_0)}}\right]\exp\left[\frac{ix(y-v\tau_0)}{4a(\tau-\tau_0)}\right] - \right.$$

$$\left. - D_{-\nu}\left[\frac{\bar{z}_0}{\sqrt{2a(\tau-\tau_0)}}\right]\exp\left[-\frac{ix(y-v\tau_0)}{4a(\tau-\tau_0)}\right]\right\} \times$$

$$\times \exp\left[\frac{x^2 - (y-v\tau_0)^2 - 2d^2}{8a(\tau-\tau_0)}\right],$$

$D_{-\nu}(\zeta)$ — функція параболічного циліндра.

ЛІТЕРАТУРА

1. Новацкий Н. В. Вопросы термоупругости, М., Изд-во АН СССР, 1962.
2. Подстригач Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К., «Наукова думка», 1972.

УДК 539.3

Н. П. ФЛЕЙШМАН, А. Г. ЗІНЕВИЧ

ПЛАСТИНКИ З РЕБРАМИ ЗМІННОЇ ЖОРСТКОСТІ

Вплив підкріплюючих тонких пружних елементів на напружений стан пластин досліджували багато вчених [1, 4, 6, 7], але до цього часу майже відсутні ефективні інженерні методи розрахунку пластин з ребрами змінної жорсткості, застосування яких дає змогу оптимізувати конструкцію за різними критеріями (вага, міцність, жорсткість).

Ми пропонуємо відносно нескладний алгоритм розв'язання плоскої задачі теорії пружності для однозв'язних скінченних або нескінченних ізотропних пластин, край яких підкріплено ребром змінного перетину. При цьому застосовуємо метод конформного відображення разом з методами колокації та послідовних наближень. Основними шуканими функціями є функції U, V — градієнти переміщень на лінії спаю пластинки з ребром, яка ототожнюється з віссю ребра. Вважаємо відомим розв'язок другої основної задачі для пластинки без ребра. Без принципових ускладнень цей розв'язок можна узагальнити на випадок багатозв'язних й анізотропних пластин [8] на пластинки з несиметричними ребрами та на випадок, коли умови спряження пластинки з ребром записуються на фактичній лінії спаю.

1. Нехай функція $z=\omega(\xi)$ відображає зовнішність (внутрішність) одиничного кола γ комплексної площини ξ на область пластинки зовні (всередині) замкненого контура L. Тоді на γ матимемо (при $\sigma=e^{i\theta}$).

$$t=\omega(\sigma)=R[\omega_1(\theta)+i\omega_2(\theta)], \tag{1}$$

де R — характерний розмір кривої L.

За відомим розв'язком із [5] другої основної задачі плоскої теорії пружності при заданих на L зміщеннях $g(\theta)=g_1(\theta)+ig_2(\theta)$ визначаємо функцію Колосова-Мусхелішвілі та її граничне значення на γ

$$\varphi(\sigma)=\varphi_1(\Theta)+i\varphi_2(\Theta)=\pm\left[\frac{\mu}{\varkappa}G(\Theta)+Q(\Theta)\right], \tag{2}$$

$$G(\Theta)=-g(\Theta)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[g(\tau)-ig(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\tau-\Theta}{2}\right]d\tau, \tag{3}$$

де μ — модуль зсуву; $\varkappa$ — постійна Мусхелішвілі, $Q(\theta)$ — відома функція, яка залежить від $\omega(\theta)$ і від навантаження на безмежності. Вона містить декілька невідомих коефіцієнтів, які визначаються [5] через $g(\theta)$.

З двох знаків у формулах верхній (нижній) береться у випадку пластинки, яка займає внутрішність (зовнішність) ребра жорсткості.

Якщо ввести комплексну комбінацію

$$\pm[F_1(\theta)+iF_2(\theta)]=[(1+\varkappa)\varphi(\theta)-2\mu g(\theta)]|\omega'(\sigma)|/i\sigma\omega'(\sigma) \tag{4}$$

та функції градієнтів переміщень U, V за формулою

$$U+iV=\frac{2\mu R}{i\sigma\omega'(\sigma)}\frac{dg(\Theta)}{d\Theta}, \tag{5}$$

то граничні умови спаю пластинки з ребром на L [2, 9, 10] можна звести до вигляду

$$U(\Theta)=\frac{1}{\delta_1}\left[F_2(\Theta)+\frac{1}{\rho(\Theta)}\int_0^{\Theta}|\omega'(\sigma)|F_1(\Theta)\,d\Theta+q_1(\Theta)\right], \tag{6}$$

$$V(\Theta) = V(0) + \int_0^{\theta} A_1 [D_1 U(\Theta) - F_2(\Theta) - q_2(\Theta)] \, d\Theta,$$

де

$$D_1(\theta) = \delta_1 + \delta_2 R^2/\rho^2(\theta); \quad A_1 = |\omega'(\sigma)| \rho(\theta)/R^2\delta_2;$$

$$q_2(\Theta) = f_1(t); \; q_1(\Theta) = f_1(t) - \frac{1}{\rho(\Theta)} \left[\int_0^s f_2(t) ds + C_3 \right];$$

$$f_1(t) + if_2(t) = \frac{d\bar{d}}{ds} \left[iC_2 - \frac{1}{h} \int_0^s (p_x + ip_y) \, ds \right]; \qquad (7)$$

$$\rho(\theta) = \pm |\omega'(\sigma)| / \{1 + \mathrm{Re}[\sigma\omega''(\sigma)/\omega'(\sigma)]\};$$

$2\mu hR\delta_1(\theta)$, $2\mu hR^3\delta_2(\theta)$ — змінні жорсткості ребра на розтяг і згин; h — товщина пластинки; $(p_x + ip_y)$ — вектор заданих зовнішніх зусиль, які діють на ребро.

2. За методом колокації вимагатимемо задовільнення умов (6) тільки в певній кількості точок $\theta = \theta_j$ на γ ($j = 0, 1, \ldots N$). Користуючись методом послідовних наближень, задаємось певними початковими значеннями шуканих функцій $U_0(\theta_j)$, $V_0(\theta_j)$ (наприклад, значенням функцій (5) для пластинки без ребра або з ребром сталого перетину) і розв'язуємо послідовно рівняння

$$U_{n+1}(\Theta_j) = \delta_1^{-1}(\Theta_j) [F_2^{(n)}(\Theta_j) + q_1(\Theta_j) + \\ + \rho^{-1}(\Theta_j) \int_0^{\Theta j} |\omega'(\sigma)| F_1^{(n)}(\Theta) \, d\Theta, \qquad (8)$$

$$V_{n+1}(\Theta_j) = \int_0^{\Theta j} A_1 [D_1 U_{n+1}(\Theta) - F_2^{(n)}(\Theta) - q_2(\Theta)] \, d\Theta + V_n(0)$$

$j = 0, 1, 2, \ldots, N$; $n = 0, 1, 2, \ldots$).

При реалізації цього алгоритму на ЕОМ спочатку при $n = 0$ за заданою функцією $\omega(\sigma)$ (1), початковими значеннями $U_0(\theta_j)$, $V_0(\theta_j)$ шляхом чисельного інтегрування і формулою (5) визначаємо переміщення $g^{(0)}(\theta_j)$. При цьому необхідно задовольняти умову однозначності. Потім ЕОМ обчислює значення $G^{(0)}(\theta_j)$ (3) та $Q^{(0)}(\theta_j)$. Сингилярні інтеграли обчислюються за формулами роботи [3]. За формулами (2), (4) послідовно визначаємо величини $\varphi_1^{(0)}(\theta_j)$, $\varphi_2^{(0)}(\theta_j)$, $F_1^{(0)}(\theta_j)$, $F_2^{(0)}(\theta_j)$ і чисельним інтегруванням обчислюємо праві частини рівнянь (6), тобто значення $U_1(\theta_j)$, $V_1(\theta_j)$. Далі цикл послідовних наближень повторюємо при $n = 1, 2, \ldots$ поки не досягаємо необхідної точності.

Функції $U(\theta_j)$, $V(\theta_j)$ повністю визначають напружено-деформований стан пластинки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Зіневич А. Г. Пластинка з криволінійним отвором, край якого підкріплено ребром змінного перерізу. — «Вісник Львівського університету, серія механіко-математична», 1973, вип. 8.
2. Зонепашвили И. А., Флейшман Н. П. Пластинки с частично подкрепленным краем. Реферативная информация о законченных научно-исследовательских работах в вузах УССР. — «Строительная механика и расчет сооружений», 1975, вып. 6.
3. Корнейчук А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. — В сб.: Численные методы решения диф. и интегр. уравнений и квадратурные формулы. М., Изд-во АН СССР, 1964.
4. Мартынович Т. Л. Теория и расчет пластинок с подкрепленным краем. Автореф. докт. дисс. Львов, 1970.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
6. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки с криволинейными ребрами жесткости. — В сб.: Механика твердого тела. М., «Наука», 1966.
7. Савин Г. Н., Флейшман Н. П. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. К., «Наукова думка», 1964.
8. Флейшман Н. П. Пластинки с криволинейными тонкими ребрами переменной жесткости. — В сб.: Тезисы докладов III Республиканской конференции математиков Белоруссии. Минск, 1971.
9. Флейшман Н. П., Старовойтенко Ж. В. Обобщенная граничная задача для пластинки с подкрепленным краем. «Прикладная механика», 1967, т. III, вып. 12,
10. Флейшман Н. П., Старовойтенко Ж. В. Новый способ расчета пластин с подкрепленным краем. — «Сопротивление материалов и теория сооружений», 1974, вып. 23.

ЛИСТ ДО РЕДАКЦІЇ

У моїй замітці «Єдиність розв'язку оберненої задачі потенціалу простого шару», надрукованій у «Віснику Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1972, вип. 7, стор. 98—99, допущена помилка в формулюванні теорем 1 і 2.

У теоремі 1 густину μ слід припускати інтегрованою за Ріманом і $|\mu(\theta)|=1$, а в теоремі 2 густини $\mu_j(x)$ $(j=1,\ 2)$ — інтегрованими функціями, які задовольняють умову

$$\mu_1(x)\geqslant m_0,\ \mu_2(x)\leqslant m_0,$$

де $m_0>0$ — деяка стала.

С. П. ЛАВРЕНЮК

ЗМІСТ

МАТЕМАТИКА

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

МЕХАНІКА

УДК 517.512

Некоторые свойства полных почти ортогональных по Белману систем функций. Гукевич В. О. Деякі властивості повних систем функцій, що майже ортогональні за Белманом. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 3—6 (укр.).

Рассмотрена полная система почти ортогональных по Белману функций и показано, что при некотором дополнительном условии на эту систему ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2(x)$ расходится почти всюду. Полученный результат является обобщением известного соотношения для полных ортонормированных систем функций. Библиогр. 1.

УДК 517.917

Среднее значение и понятие ряда Фурье для S^p-почти периодических матриц. Лісевич Л. М., Ковальчук Б. В. Середнє значення і поняття ряду Фур'є для S^p-майже періодичних матриць. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 6—11 (укр.).

Дается понятие среднего значения S-почти периодических матриц и рассматриваются его свойства. Вводится понятие ряда Фурье S^p-почти периодических матриц, выводится неравенство Бесселя для S^2-почти периодических матриц и доказывается теорема, что равномерно сходящийся по S^p-норме тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы. Библиогр. 3.

УДК 517.946

Неравенство Харнака для обобщенных решений вырождающихся квазилинейных эллиптических уравнений. Колодій І. М. Нерівність Харнака для узагальнених розв'язків квазілінійних еліптичних рівнянь з виродженням. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 11—15 (укр.).

Доказано неравенство Харнака для обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений вида $\operatorname{dir}—A(x, u, u_x) = B(x, u, u_x)$. Библиогр. 7.

УДК 517.946

О третьей внешней обобщенной задаче. Бойко Г. П. Про третю зовнішню узагальнену задачу. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 15—19 (укр.).

В области, внешней по отношению к замкнутой поверхности класса C^∞, рассматривается третья обобщенная задача для уравнения Шредингера. Доказывается теорема о представлении единственного решения этой задачи. Библиогр. 8.

УДК 517.946

Единственность и устойчивость некоторых обратных задач теории потенциала. Лавренюк С. П. Єдиність і стійкість деяких обернених задач теорії потенціалу. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 20—23 (укр.).

Рассматривается линейный эллиптический дифференциальный оператор L порядка $2n (n \geqslant 1)$ на плоскости. Для уравнения $Lu=0$ вводятся плоский потенциал и потенциал простого слоя. Получены теоремы единственности и устойчивости решения обратных задач для этих потенциалов в случае, если $L^* = L_1 \cdot L_2$, где L_2 — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка. Библиогр. 3.

УДК 513.88

Разложение по собственным функциям оператора, родственного дифференциальному. Сторож О. Г. Розклад за власними функціями оператора, спорідненого з диференціальним. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 23—27 (укр.).

Рассматривается определенный класс конечномерных возмущений обыкновенного дифференциального оператора. Построено резольвенту и разложение по собственным функциям этого оператора. Библиогр. 3.

УДК 513.7

Механизмы для воспроизведения специальных отображений эллипсов. Дениско С. В. Механізми для відтворення спеціальних відображень еліпсів. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа». с. 28—31 (укр.).

Рассматриваются механизмы, которые воспроизводят отображение эллипса на эллипс так, что отношение соответствующих дуг — величина постоянная. Исследуется также возможность построения механизма, воспроизводящего отображение эллипса на эллипс с помощью пучка прямых. Илл. 1. Библиогр. 2.

УДК 517.913

Асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Костенко К. С. Асимптотична поведінка розв'язків лінійних звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 31—37 (укр.).

Найдено асимптотическое представление одной фундаментальной системы решений линейного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка при $x \to \infty$. Библиогр. 4.

УДК 517.946

Решение обобщенной задачи Дирихле для многосвязной области. Волошина М. С., Гупало Г.-В. С. — Розв'язок узагальненої задачі Діріхле для багатозв'язної області. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 38—39 (укр.).

Рассмотрена задача Дирихле для n-мерного уравнения Лапласа в многосвязной области, когда на границе задана обобщенная функция. Доказана теорема о представлении решения рассматриваемой задачи. Библиогр. 3.

УДК 517.512

Приближение непрерывных периодических функций линейными средними полиномов, наилучшими в заданной системе точек. Губанов Г П., Ковальчук Б. В. Наближення неперервних періодичних функцій лінійними середніми поліномів, найліпшими в заданій системі точок. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 39—42 (укр.).

Изучаются линейные процессы приближения непрерывных 2π — периодических функций класса H_ω полиномами, построенными при помощи треугольной матрицы чисел $\{\lambda_i^{(n-1)}\}$ $(i=0, 1, \ldots, n;\ \lambda_0^{(n-1)}=1;\ \lambda_n^{(n-1)}=0)$ на основе тригонометрических полиномов, наилучших в заданной системе равноотдаленных точек. Библиогр. 5.

УДК 518:512.36

Выделение с помощью параметров «максимальных» областей, не содержащих нулей рядов типа Тейлора—Дирихле. Цегелик Г. Г. Виділення за допомогою параметрів «максимальних» областей, які не містять нулів рядів типу Тейлора-Діріхле. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 43—46 (укр.).

Рассматривается абсолютно сходящийся в некоторой области D ряд типа Тейлора-Дирихле. С помощью параметров устанавливаются достаточные условия существования «максимальных» областей, не содержащих нулей этого ряда. Библиогр. 3.

УДК 519.21

Сингулярные стратегии. Квіт. І. Д. Сингулярні стратегії. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 46—52. укр).

Указано пример игры двух лиц с двухпараметрической рациональной платежной функцией, непрерывной на замкнутом единичном квадрате, имеющей единственные оптимальные стратегии, которые будут дискретными, сингулярными или абсолютно непрерывными в зависимости от выбора параметров платежной функции. Библиогр. 3.

УДК 537.533.33

О методике расчета электростатических полей с нарушенной осевой симметрией. Костенко В. Г., Романів Л. О. Про метод розрахунку електростатичних полів з порушеною осьовою симетрією. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975. вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 52—56 (укр.).

Предлагается приближенная схема определения потенциала электростатического поля, мало отличающегося от осесимметричного (случай смещения осей) и созданного системой электродов сложной конфигурации. С помощью метода возмущений задача сводится к последовательности осесимметричных краевых задач, которые в свою очередь на основании теории потенциала приводятся к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода.

УДК 531.8

Уточненный расчет гибких пластин обобщенным методом Ньютона. Огірко І. В. Уточнений розрахунок гнучких пластин узагальненим методом Ньютона. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10, Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 56—60 (укр.).

Рассматривается осесимметричный изгиб круглой гибкой пластинки с подкрепленным краем. Для приближенного численного интегрирования соответствующей системы нелинейных дифференциальных уравнений применяется итерационный метод нелинейной релаксации, называемый обобщенным методом Ньютона. Составлена алгольная программа, которая позволяет исследовать напряженно-деформированное состояние пластин под произвольной осесимметричной нагрузкой. Полученные результаты уточняют аналогичные данные, полученные ранее методом возмущения. Илл. 4, Табл. 1, Библиогр. 4.

УДК 539.3

Расчет некоторых многосвязных элементов электровакуумных приборов. Ф л е й ш м а н Н. П., Ш п і л ь к е р м а н Б. М. Розрахунок деяких багатозв'язних елементів електровакуумних приладів. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 60—65 (укр.).

Применительно к расчету некоторых плоских элементов оболочек электровакуумных приборов методом Бубнова-Галеркина решена плоская задача теории упругости для круглой кольцевой пластинки с циклически расположенными абсолютно жесткими круглыми включениями. Для частного случая четырех включений в третьем приближении определены нормальные напряжения по характерным сечениям. Илл. 2. Библиогр. 3.

УДК 518:517.948

Практическое использование одного итерационного метода для решения нелинейных операторных уравнений. Щ е р б и н а Ю. М. Практичне застосування одного ітераційного методу для розв'язування нелінійних операторних рівнянь. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 65—67 (укр.).

Для решения нелинейных операторных уравнений рассматриваютя итерационный процесс ньютоновского типа, применимый в случае любого начального приближения. Даны практические рекомендации по применению метода в особом случае. Библиогр. 3.

УДК 539.3

Осесимметричная контактная задача термоупругости для трансверсально изотропного слоя. Г р и л і ц ь к и й Д. В., Г а б р у с є в В. Г. Осесиметрична контактна задача термопружності для трансверсально ізотропного шару. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 68—71 (укр.).

Предлагается приближенная методика решения осесимметричной контактной задачи термоупругости о давлении нагретого жесткого гладкого штампа на трансверсально изотропный слой, находящийся на гладком неподатливом основании. Поскольку задача сведена к парному интегральному уравнению, то сущность предложенной методики иллюстрируется при построении решения этого уравнения. Приведены графики распределения силовой и температурной частей контактных напряжений под штампом. Илл. 5. Библиогр. 2.

УДК 539.385

Совместное кручение круглого полого цилиндра и полупространства при неполном контакте. П і д д у б н я к О. П., Г р и л і ц ь к и й Д. В. Сумісне кручення круглого порожнистого циліндра та півпростору при неповному контакті. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 71—75 (укр.).

Рассматривается задача об осесимметричном кручении упругого полого цилиндра, частично прикрепленного к упругому полупространству. Приведены формулы для коэффициентов интенсивности контактных напряжений при относительно малой и большой ширине кольца области спая упругих тел. Рассмотрен числовой пример. Илл. 3. Табл. 2. Библиогр. 7.

УДК 539.311

Регулярность некоторых систем линейных алгебраических уравнений. Сулим Г. Т. Регулярність деяких систем лінійних алгебраїчних рівнянь. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 76—79 (укр.).

Исследуется регулярность бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, порожденных задачей упругого равновесия плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины под действием произвольной силовой нагрузки. Полученные результаты применимы к задачам, сводящимся к системам интегродифференциальных уравнений типа Прандтля, в частности, к контактной задаче для полуплоскости с упругой накладкой. Библиогр. 5.

УДК 539.3

Напряженное состояние изотропной пластинки с впрессованным криволинейным стержнем. Мартынович Т. Л., Зварич М. К., Чоба М. К. Напружений стан ізотропної пластинки з впресованими криволінійним стержнем. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 80—87. (укр.).

Решена задача плоской теории упругости для изотопной пластинки с впрессованным кольцом при заданном однородном напряженном состоянии на бесконечности и при наличии сосредоточенных силовых факторов в пластинке. Получена система линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомых функций. Определена минимальная величина посадки, при которой контакт между телами осуществляется вдоль всего контура. Илл. 4. Библиогр. 4.

УДК 539.377

Температурные напряжения в защемленной пластинке с постоянным коэффициентом теплоотдачи при нестационарном теплообмене. Дідик В. З., Кордуба Б. М. Температурні напруження в защемленій пластинці з постійним коефіцієнтом тепловіддачі при нестаціонарному теплообміні. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, ип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 87—90. (укр.).

Получено при помощи преобразования Фурье-Лапласа общее решение квазистатической задачи термоупругости для защемленной полубесконечной пластинки, нагреваемой движущимся на некотором расстоянии от края источником тепла постоянной мощности. Библиогр. 2.

УДК 539.3

Пластинки с ребрами переменной жесткости. Флейшман Н. П., Зіневич А. Г. Пластинки з ребрами змінної жорсткості. — «Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична», 1975, вип. 10. Теоретична та прикладна математика. Видавниче об'єднання «Вища школа», с. 90—93. (укр.).

Разработан простой алгоритм численного решения на ЭВМ плоской задачи теории упругости для изотропных односвязных пластин, край которых подкреплен упругим кольцом переменного сечения. Используется конформное отображение в сочетании с методами коллокации и последовательных приближений. Библиогр. 10.

Министерство высшего и среднего специального образования УССР

Вестник

Львовского ордена Ленина государственного университета им. Ив. Франко

Серия механико-математическая

Выпуск 10

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

(на украинском языке)

Издательское объединение «Вища школа»

Издательство при Львовском государственном университете

Редактор В. В. Войтович

Технічний редактор Т. М. Веселовський

Коректор М. Т. Ломеха

Здано до набору 2. 04. 1975 р. Підписано до друку 21. 10. 1975 р. Формат паперу $60 \times 90^1/_{16}$. Папір друкарський № 3. Фіз. друк. арк. 6,25. Обл.-вид. арк. 5,47. Тираж 1000. БГ 13208. Ціна 50 коп. Зам. № 3260.

Видавництво видавничого об'єднання «Вища школа» при Львівському державному університеті. Львів, Університетська, 1.

Обласна книжкова друкарня Львівського обласного управління в справах видавництв, поліграфії та книжкової торгівлі. Львів, Стефаника, 11.

50 коп.