М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.512

В.О.ГУКЕВИЧ

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ТЕОРЕМИ ПЕЛІ

Нехай $\{\varphi_n\}$ – система майже ортогональних на $[a,b]$ в сенсі Белмана функцій, тобто

$$\int_a^b \varphi_k^2(x)dx = 1 \qquad k = 1,2,\ldots$$

і
$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 = A < \infty, \qquad /1/$$

де
$$a_{ij} = \begin{cases} \int_a^b \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt, & i \neq j, \\ 0, & i = j \end{cases}$$

Відома теорема Пелі для ортонормованих систем [2] переноситься в деяким послабленням на системи м.о.з .Б, тобто справедлива наступна теорема.

Т е о р е м а. Нехай $\{\varphi_n\}$ – система м.о. з.Б. на $[a,b]$ функцій, для яких

$$|\varphi_n(t)| \leq M$$

майже всюди.

Якщо $f(t) \in L_p(a,b)$ $\qquad 1 < p \leq 2$,

то справедлива нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k|^p k^{\alpha} \leq A_p(\alpha) \int_a^b |f(t)|^p dt, \qquad /2/$$

де

$$C_k = \int_a^b f(t)\varphi_k(t)dt \qquad k = 1,2,\ldots$$

При цьому числа $\{C_k\}$ занумеровано так, що вони утворюють неспадну за абсолютною величиною послідовність, число $\alpha < p-2$ і стала $A_p(\alpha)$ не залежать від функції $f(t)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки, як відомо, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$, де $\alpha_n \geq 0$ і $\beta_n \geq 0$, є найбільшою, коли обидві послідовності $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ або рівночасно неспадні, або рівночасно незростаючі, то можна вважати, що числа C_k утворюють монотонно спадну за абсолютною величиною послідовність.

Нехай $1<p<2$, застосуємо до суми $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p k^\alpha$ нерівність Гельдера

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p k^\alpha \leq \left\{\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^p)^q\right\}^{\frac{1}{q}} \cdot \left\{\sum_{k=1}^{\infty} (k^\alpha)^{q'}\right\}^{\frac{1}{q'}},$$

де $q = \frac{p'}{p}$ і $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

Одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p k^\alpha \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^{p'}\right)^{\frac{p}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{\alpha}{2-p}}\right)^{2-p}.$$

Коли $\alpha < p-2$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{\alpha}{2-p}}$ збіжний і тому, позначаючи $B = \left[\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{\alpha}{2-p}}\right]^{2-p}$, дістаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p k^\alpha \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{p'}\right)^{\frac{p}{p'}} \cdot B. \qquad /3/$$

Беручи до уваги /1/ і застосовуючи до виразу в правій частині нерівності /3/ теорему Фішера-Рісса для м.о.з.Б. систем [1], одержуємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p k^\alpha \leq B \cdot M^{2-p} (1+\sqrt{A})^{p-1} \int_a^b |f(t)|^p dt =$$

$$= A_p(\alpha) \int_a^b |f(t)|^p dt.$$

Таким чином, твердження теореми для $1<p<2$ доведено.

Що стосується граничного випадку $p=2$, то він тривіальний і відразу випливає з теореми Фішера-Рісса для м.о.з.Б. систем, якщо взяти до уваги, що для $p=2$, $p'=2$ і

$$\sum_{K=1}^{\infty}|C_K|^2 K^{\alpha} < \sum_{K=1}^{\infty}|C_K|^2$$

, оскільки $\alpha<0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гукевич В.И., Соколов И.Г. Обобщение одной теоремы Фишера-Рисса. - "Теория функций, функциональный анализ и их приложение", Х.1968, вып. 7.
2. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1958.

УДК 517.946

І.М.КОЛОДІЙ

ТЕОРЕМА ПРО УСУВНУ ОСОБЛИВІСТЬ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ"ЯЗКІВ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

У цій роботі розглядаються еліптичні рівняння з виродженням виду

$$\begin{gathered} div\, A(x,u,u_x) = B(x,u,u_x), \qquad /1/ \\ x=(x_1,\dots,x_n),\ u_x=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=(u_{x_1},\dots,u_{x_n}), \\ A(x,u,u_x)=(A_1(x,u,u_x),\dots,A_n(x,u,u_x)), \end{gathered}$$

в обмеженій області Ω n - мірного евклідового простору E^n. Доведено теорему про усувну особливість узагальнених розв"язків. Результат нашої роботи анонсовано в [1].