Таким чином, твердження теореми для $1<p<2$ доведено.

Що стосується граничного випадку $p=2$, то він тривіальний і відразу випливає з теореми Фішера-Рісса для м.о.з.Б. систем, якщо взяти до уваги, що для $p=2$, $p'=2$ і

$$\sum_{K=1}^{\infty}|C_K|^2 K^{\alpha} < \sum_{K=1}^{\infty}|C_K|^2$$, оскільки $\alpha<0$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гукевич В.И., Соколов И.Г. Обобщение одной теоремы Фишера-Рисса. - "Теория функций, функциональный анализ и их приложение", Х.1968, вып. 7.
2. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М., Физматгиз, 1958.

УДК 517.946

І.М.КОЛОДІЙ

ТЕОРЕМА ПРО УСУВНУ ОСОБЛИВІСТЬ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ"ЯЗКІВ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

У цій роботі розглядаються еліптичні рівняння з виродженням виду

$$\begin{gathered} \operatorname{div} A(x,u,u_x) = B(x,u,u_x), \qquad /1/ \\ x=(x_1,\dots,x_n),\ u_x=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=(u_{x_1},\dots,u_{x_n}), \\ A(x,u,u_x)=(A_1(x,u,u_x),\dots,A_n(x,u,u_x)), \end{gathered}$$

в обмеженій області Ω n - мірного евклідового простору E^n . Доведено теорему про усувну особливість узагальнених розв"язків. Результат нашої роботи анонсовано в [1] .

Нехай K_r – куб $(x: |x_i| < r,\ i=1,\dots,n)$; $\bar\lambda = \bar\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x))$, $\lambda_i(x)$ – невід"ємні функції в Ω; $\overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar\lambda,\Omega)$, $W^1_\beta(\bar\lambda,\Omega)$ – повні нормовані простори /означення див. у [2] /. Припустимо, що функції $A(x,u,\bar p)$, $B(x,u,\bar p)$, де $\bar p = (p_1,\dots,p_n)$, задовольняють умови

$$A(x,u,\bar p)\bar p \geq a_1 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)|p_i|^\beta - d(x)|u|^\beta - g(x),$$

$$|A_i(x,u,\bar p)| \leq a_2 \lambda_i(x)|p_i|^{\beta-1} + b(x)|u|^{\beta-1} + e(x), \qquad /2/$$

$$|B(x,u,\bar p)| \leq \sum_{i=1}^{n} c_i(x)|p_i|^{\beta-1} + \omega(x)|u|^{\beta-1} + f(x),$$

де a_1, a_2 – додатні константи; $\lambda_i(x)$, $d(x)$, $g(x)$, $b(x)$, $e(x)$, $c_i(x)$, $\omega(x)$, $f(x)$ – невід"ємні функції; $\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}(\Omega)$, $t_i \geq 1$; $\lambda_i(x)$, $d(x)$, $g(x)$, $b^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x)\lambda_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x)$, $e^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x)\lambda_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x)$, $c_i^{\beta}(x)\lambda_i^{1-\beta}(x)$, $\omega(x)$, $f(x)$ належать $L_s(\Omega)$, $s \geq 1$, причому числа β, t_i, s задовольняють нерівності

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i} < \frac{\beta}{n}, \quad 1 < \beta < n + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}, \quad 1 \leq t_i(\beta-1).$$

Позначимо через $\mathcal{D}_\varepsilon$ множину точок таких, що їх відстань до компактної множини $\mathcal{D}$ менша ε, $\varepsilon > 0$.

О з н а ч е н н я . Функція $u(x) \in W^1_\beta(\bar\lambda, K_{2r}\setminus\mathcal{D})$ називається узагальненим розв"язком рівняння /1/ в $K_{2r}\setminus\mathcal{D}$ за умов /2/, якщо для довільної функції $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar\lambda, K_{2r})$, що дорівнює нулю в деякому околі компактної множини $\mathcal{D}$, справедлива інтегральна тотожність

$$\int_{K_{2r}} (A\varphi_x + B\varphi)\,dx = 0.$$

Т е о р е м а . Нехай $\mathcal{D}$ – компактна множина $(\alpha^*, \bar\lambda)$- ємності нуль; $1 < \beta \leq \alpha^* \leq \Delta = n\left(1 + \max_i T_i^{-1}\right)$, де T_i – верхня межа чисел t_i таких, що $\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}(K_{2r})$. Якщо $u(x)$ – узагальнений розв"язок в сенсі нашого означення в $K_{2r}\setminus\mathcal{D}$ і для деякого $\delta > 0$

$$u(x) \in L_{\mu(1+\delta)}(K_{2r}\setminus\mathcal{D}), \quad \mu = (\beta-1)\left(1-\frac{1}{s}\right)^{-1}\left(1-\frac{\beta}{\alpha^*}\right)^{-1},$$

то $u(x)$ – узагальнений розв"язок рівняння /1/ в кубі K_r в сенсі роботи [2] .

З а у в а ж е н н я . Обмеження на числа α^* і β пов"язано з двома обставинами: 1/ при $\alpha^* > \Delta$ не існує компактної множини $(\alpha^*, \bar\lambda)$ – ємності нуль; 2/ можна навести приклад, який показує, що при β більших відповідного Δ особливість неусувна навіть у класі обмежених функцій.

П р и к л а д . Розглянемо рівняння

$$div(\rho^\varepsilon u_x |u_x|^{\beta-2}) = 0, \quad \rho = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big)^{\frac12},$$

в кубі K_{2r} . У цьому випадку $\lambda_1(x) = \ldots = \lambda_n(x) = \rho^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}(K_{2r})$ при $t_i < \frac{n}{\varepsilon}$, $T_1 = \ldots = T_n = \frac{n}{\varepsilon}$, $\Delta = n + \varepsilon$.

Функція $u(x) = \rho^{\frac{\beta-n-\varepsilon}{\beta-1}}$ при $\beta > \Delta = n+\varepsilon$ є обмеженим розв"язком нашого рівняння в $K_{2r} \setminus 0$. Покажемо, що розв"язок у точці нуль має неусувну особливість, тобто як би ми не доозначили $u(x)$ у точці нуль,

$$\int_{K_r} \varphi_x \rho^\varepsilon u_x |u_x|^{\beta-2} dx \neq 0$$

для деякої функції $\varphi(x) \in \overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar\lambda, K_r)$. Справді, для $\varphi(x) \in C^\infty(\mathcal{K}_r)$, $\varphi(0) \neq 0$, $\mathcal{K}_r = (x : |x| < r)$

$$\int_{\mathcal{K}_r} \varphi_x \rho^\varepsilon u_x |u_x|^{\beta-2} dx = \int_{\mathcal{K}_r} \varphi_x \rho^\varepsilon u_x |u_x|^{\beta-2} dx = \Big(\frac{\beta-n-\varepsilon}{\beta-1}\Big)^{\beta-1} \omega_n \varphi(0) \neq 0$$

де ω_n – поверхня одиничної сфери.

Д о в е д е н н я т е о р е м и . Нехай $\eta(x)$ і $\bar\eta(x)$ –невід"ємні функції, що задовольняють умову Ліпшіца в K_{2r} ; $\eta(x)$ – фінітна в K_{2r} , $\bar\eta(x)$ – обертається в нуль в деякому околі компактної множини $\mathcal{D}$. Приймемо $q_0 = \frac{\beta-1}{\beta}(1+\delta)$, де $\delta > 0$ як завгодно мале число; $\bar u = |u| + \mathcal{H} + 1$, де $\mathcal{H} = \mathcal{H}(2r)$ те саме, що і в роботі [2] .

Для $q \geq q_0$ і $\ell > \mathcal{H}$ визначимо функції

$$v = F(\bar u) = \begin{cases} \bar u^{\,q} & , \text{якщо } \varkappa \le \bar u \le \ell \\ q_0^{-1}[q\ell^{q-q_0}\bar u^{\,q_0} + (q_0-q)\ell^{q}] & , \text{коли } \ell \le \bar u \end{cases}$$

$$G(u) = \left[F(\bar u)(F'(\bar u))^{\beta-1} + q^{\beta-1}\varkappa^{\beta q-\beta+1}\right] \operatorname{sign} u, \quad -\infty < u < +\infty .$$

Ці функції задовольняють нерівності:

$$F(\bar u) \le \frac{q}{q_0}\ell^{q-q_0}\bar u^{\,q_0}; \ \bar u F'(\bar u) \le q F(\bar u); \ |G(u)| \le F(\bar u)(F'(\bar u))^{\beta-1};$$

$$\beta\frac{\delta}{1+\delta}(F'(\bar u))^{\beta} \le G'(u) \le \beta(F'(\bar u))^{\beta}; \ G'(u) = \begin{cases} = \frac{\beta q-\beta+1}{q}(F'(\bar u))^{\beta}, & u < \ell-\varkappa \\ \ge \frac{\beta q_0-\beta+1}{q}(F'(\bar u))^{\beta}, & u > \ell-\varkappa \end{cases}$$

Приймемо, що $\varphi(x) = (\eta(x)\bar\eta(x))^{\beta} G(u)$. Тоді майже всюди в $K_{2\varepsilon}$

$$\varphi_x A + \varphi B = (\eta\bar\eta)^{\beta} G'(u) A u_x + \beta(\eta\bar\eta)^{\beta-1} G(u) A (\eta\bar\eta)_x + (\eta\bar\eta)^{\beta} G(u) B \ge$$

$$\ge (\eta\bar\eta)^{\beta} G'(u)\Big(a_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)|u_{x_i}|^{\beta} - \bar d(x)\bar u^{\beta}\Big) - \beta(\eta\bar\eta)^{\beta-1}|G(u)|\sum_{i=1}^{n}(\eta\bar\eta)_{x_i} \times$$

$$\times\big(a_2\lambda_i(x)|u_{x_i}|^{\beta-1} + \bar b(x)\bar u^{\beta-1}\big) - (\eta\bar\eta)^{\beta}|G(u)|\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i(x)|u_{x_i}|^{\beta} + \bar\omega(x)\bar u^{\beta-1}\Big) \ge$$

$$\ge \frac{\beta\delta}{1+\delta} a_1 \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)(F'(u))^{\beta}|\bar u_{x_i}|^{\beta} - a_2\beta\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)|\bar u_{x_i}|^{\beta-1}(\eta\bar\eta)^{\beta-1}\times$$

$$\times|(\eta\bar\eta)_{x_i}||F'(\bar u)|^{\beta-1}F(\bar u) - |(\eta\bar\eta)F(\bar u)|\sum_{i=1}^{n} c_i(x)|(\eta\bar\eta)F'(\bar u)\bar u_{x_i}|^{\beta-1} -$$

$$-\beta|(\eta\bar\eta)F'(\bar u)\bar u|^{\beta}\bar d(x) - \sum_{i=1}^{n}|(\eta\bar\eta)_{x_i}F(\bar u)||(\eta\bar\eta)F'(\bar u)\bar u|^{\beta-1}\bar b(x) -$$

$$-|(\eta\bar\eta)^{\beta}F(\bar u)||(\eta\bar\eta)F'(\bar u)\bar u|^{\beta-1}\bar\omega(x) \ge \beta a_1\frac{\delta}{1+\delta}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\times$$

$$\times|(\eta\bar\eta)v_{x_i}|^{\beta} - a_2\beta\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)|(\eta\bar\eta)v_{x_i}|^{\beta-1}|(\eta\bar\eta)_{x_i}v| -$$

$$-\beta q^{\beta}\bar d(x)|(\eta\bar\eta)v|^{\beta} - \sum_{i=1}^{n} c_i(x)|(\eta\bar\eta)v_{x_i}|^{\beta-1}|(\eta\bar\eta)v| -$$

$$-q^{\beta-1}|(\eta\bar\eta)v|^{\beta}\bar\omega(x) - q^{\beta-1}\sum_{i=1}^{n}|(\eta\bar\eta)_{x_i}v||(\eta\bar\eta)v|^{\beta-1}\bar b(x).$$

/означення $\bar{b}(x), \bar{d}(x), \bar{\omega}(x)$ див. в [2]./. Звідси, як і в роботі [2], одержуємо

$$\int\limits_{K_{2r}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)|(\eta\bar{\eta})v_{x_i}|^{\beta} dx \leq C\Big[\int\limits_{K_{2r}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)|(\eta\bar{\eta})_{x_i} v|^{\beta} dx + \int\limits_{K_{2r}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)|\eta_{x_i}\bar{\eta} v|^{\beta} dx +$$

$$+q^{\beta}\int\limits_{K_{2r}}|(\eta\bar{\eta})v|^{\beta}\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i^{\beta}(x)\lambda_i^{1-\beta}(x)+\sum_{i=1}^{n}\bar{b}^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x)\lambda_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x)+\bar{d}(x)+\bar{\omega}(x)\Big)dx\Big] \qquad /3/$$

Зауважимо, що $v \leq \frac{q}{q_0} \ell^{q-q_0} \bar{u}^{q_0} \leq C(q,\ell)\bar{u}^{q_0}$. Тому при будь-яких фіксованих q і ℓ

$$\int\limits_{K_{2r}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)(\eta|\eta_{x_i}|v)^{\beta} dx \leq C(q,\ell)\int\limits_{K_{2r}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)|\bar{\eta}_{x_i}|^{\beta}\bar{u}^{\beta q_0} dx. \qquad /4/$$

Враховуючи припущення нашої теореми та нерівність Гельдера, маємо

$$\int\limits_{K_{2r}\setminus\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)|\bar{\eta}_{x_i}|^{\beta}\bar{u}^{\beta q_0} dx \leq \sum_{i=1}^{n}\Big(\int\limits_{K_{2r}}\lambda_i(x)|\bar{\eta}_{x_i}|^{\alpha^*}dx\Big)^{\beta/\alpha^*}\Big(\int\limits_{K_{2r}\setminus\mathcal{D}}\lambda_i(x)\times \qquad /5/$$

$$\times\,\bar{u}^{\frac{\alpha^*\beta q_0}{\alpha^*-\beta}}dx\Big)^{\frac{\alpha^*-\beta}{\alpha^*}} \leq \sum_{i=1}^{n}\Big(\int\limits_{K_{2r}}\lambda_i(x)|\bar{\eta}_{x_i}|^{\alpha^*}dx\Big)^{\frac{\beta}{\alpha^*}}\Big(\int\limits_{K_{2r}}\lambda_i^{s}(x)dx\Big)^{\frac{1}{s}\frac{\alpha^*-\beta}{\alpha^*}}\times$$

$$\times\Big(\int\limits_{K_{2r}\setminus\mathcal{D}}\bar{u}^{\frac{\alpha^*\beta q_0}{\alpha^*-\beta}\frac{s}{s-1}}dx\Big)^{\frac{s-1}{s}\frac{\alpha^*-\beta}{\alpha^*}} \leq C\Big(\int\limits_{K_{2r}}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)|\bar{\eta}_{x_i}|^{\alpha^*}dx\Big)^{\frac{\beta}{\alpha^*}}.$$

Замінимо в /3/–/5/ $\bar{\eta}$ на $\bar{\eta}^{(\nu)}$, де $\bar{\eta}^{(\nu)}$ – функції із леми роботи [3], і спрямуємо ν до ∞. Тоді з /3/–/5/ і леми роботи [3] випливає /при кожному фіксованому q і ℓ /нерівність

$$\int\limits_{K_{2r}\setminus\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)|\eta v_{x_i}|^{\beta} dx \leq Cq^{\beta}\Big[\int\limits_{K_{2r}\setminus\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)|\eta_{x_i} v|^{\beta} dx + \int\limits_{K_{2r}\setminus\mathcal{D}}|\eta v|^{\beta}\times$$

$$\times\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i^{\beta}(x)\lambda_i^{1-\beta}(x)+\sum_{i=1}^{n}\bar{b}^{\frac{\beta}{\beta-1}}(x)\lambda_i^{\frac{1}{1-\beta}}(x)+\bar{d}(x)+\bar{\omega}(x)\Big)dx\Big]. \qquad /6/$$

З огляду на наслідок роботи з [3] міра $\mathcal{D}$ дорівнює нулю. Із нерівності /6/ так само як у роботі [2] одержуємо

$$\Big(r^{-n}\int\limits_{K_\rho\setminus\mathcal{D}}\bar{u}^{\beta m p}\,dx\Big)^{\frac{1}{mp}}\leq\Big[C\Big(\frac{p}{s'}\Big)^{\beta}\Big(\frac{r}{\delta}\Big)^{\beta}\big(1+P_{(2r)}M(2r)\big)\Big]^{\frac{s'}{p}}\Big(r^{-n}\int\limits_{K_{\rho+\sigma}\setminus\mathcal{D}}\bar{u}^{\beta p}\,dx\Big)^{\frac{1}{p}},$$

де $r<\rho<\rho+\sigma\leq 2r$, $m=\frac{k}{s'}>1$, $k\leq n\big(n-\beta+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i}\big)^{-1}$, $p=s'q$, $s'=\frac{s}{s-1}$, $q\geq q_0$.

Приймемо $p=s'q_0m^{\nu}$, $\nu=0,1,2,\ldots$, $\rho_\nu=\rho+\sigma=(1+2^{-\nu})r$, $\rho=\rho_{\nu+1}$ і проітеруємо цю нерівність. Тоді, враховуючи умови теореми, маємо

$$\operatorname*{vrai\,max}_{K_r\setminus\mathcal{D}}\bar{u}\leq C\big(1+M(2r)P(2r)\big)^{\frac{1}{q_0}\frac{m}{m-1}\frac{1}{\beta}}\Big(r^{-n}\int\limits_{K_{2r}\setminus\mathcal{D}}\bar{u}^{s'\beta q_0}\,dx\Big)^{\frac{1}{s'\beta q_0}}=$$

$$=C\Big(r^{-n}\int\limits_{K_{2r}\setminus\mathcal{D}}\bar{u}^{\frac{\beta-1}{1-\frac{1}{s}}(1+\delta)}\,dx\Big)^{\frac{1-\frac{1}{s}}{(\beta-1)(1+\delta)}}\leq C\Big(r^{-n}\int\limits_{K_{2r}\setminus\mathcal{D}}\bar{u}^{\frac{(\beta-1)(1+\delta)}{(1-\frac{1}{s})(1-\frac{\beta}{\varkappa})}}\,dx\Big)^{\frac{(1-\frac{1}{s})(1-\frac{\beta}{\varkappa})}{(\beta-1)(1+\delta)}}.\qquad /7/$$

Отже, $\operatorname*{vrai\,max}\limits_{K_{2r}\setminus\mathcal{D}}\bar{u}\leq C$, тобто функції $u(x)$ і $\bar{u}(x)$ рівномірно обмежені в $K_r\setminus\mathcal{D}$.

Із нерівностей /6/, /7/ при $q=q_0$ записуємо

$$\int\limits_{K_r\setminus\mathcal{D}}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)\bar{u}^{\beta(q_0-1)}|\bar{u}_{x_i}|^{\beta}dx\leq C\Big(\int\limits_{K_{2r}}\bar{u}^{\beta q_0 s'}dx\Big)^{\frac{1}{s'}}.$$

Через те що функція $\bar{u}(x)$ обмежена в $K_r\setminus\mathcal{D}$ і $q_0<1$, то $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i(x)|\bar{u}_{x_i}|^{\beta}\in L_1(K_r\setminus\mathcal{D})$, тобто функції $\bar{u}(x)$ і $u(x)$ належать $W_\beta^1(\bar{\lambda},K_r\setminus\mathcal{D})$ і через те що міра $\mathcal{D}$ дорівнює нулю, то $u(x)\in W_\beta^1(\bar{\lambda},K_r)$.

Підставимо в інтегральну тотожність функцію $\varphi(x)=\eta\bar{\eta}^{(\nu)}$, де $\eta\in\overset{0}{W}{}_\beta^1(\bar{\lambda},K_r)$, а $\bar{\eta}^{(\nu)}$ – функція із леми роботи [3]. Тоді

$$\int\limits_{K_r}\big[(\eta\bar{\eta}^{(\nu)})_x A+(\eta\bar{\eta}^{(\nu)})B\big]dx=0.$$

Спрямувавши ν до ∞, одержимо $\int\limits_{K_r}(\eta_x A+\eta B)\,dx=0$ для довільної функції $\eta(x)\in \overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar\lambda, K_r)$, тобто $U(x)$ - узагальнений розв"язок в K_r.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. К о л о д и й И.М. О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений. - ДАН СССР, 1971, т.197, № 2.

2. К о л о д і й І.М. Оцінка максимума модуля узагальнених розв"язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9.

3. К о л о д і й І.М. Про ємність множин. У цьому ж віснику.

УДК 517.946

І.М.КОЛОДІЙ

ПРО ЄМНІСТЬ МНОЖИН

У цій роботі введено поняття / $\alpha^*, \bar\lambda$ / - ємності множини, що узагальнює поняття α - ємності множини, сформульоване в роботі [4]. Це поняття використовується при доведенні теорем про усувну особливість, аналогічних відповідним теоремам для гармонічних функцій. Результат статті анонсовано в [1].

Нехай Ω - обмежена область в n - мірному евклідовому просторі E^n, $x=(x_1,\dots,x_n)$; $K_r=(x:|x_i|<r,\ i=1,\dots,n)$ - куб.

О з н а ч е н н я 1. Нехай $\mathcal{D}$ компактна множина в Ω. Тоді $(\alpha^*, \bar\lambda)$ ємністю множини $\mathcal{D}$ називається число

$$\inf\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)|\psi_{x_i}|^{\alpha^*}dx,\quad 1\le\alpha^*<+\infty,\quad \lambda_i(x)\ge 0,\ \lambda_i\in L_1,$$

де $\inf$ береться по всіх неперервно-диференційованих, фінітних в Ω функціях, які не менші одиниці на $\mathcal{D}$.