Спрямувавши ν до ∞, одержимо $\int\limits_{K_r}(\eta_x A+\eta B)dx=0$ для довільної функції $\eta(x)\in \overset{\circ}{W}{}^1_\beta(\bar\lambda,K_r)$, тобто $U(x)$ – узагальнений розв"язок в K_r.

ЛІТЕРАТУРА

1. Колодий И.М. О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений. – ДАН СССР, 1971, т.197, № 2.

2. Колодій І.М. Оцінка максимума модуля узагальнених розв"язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. – "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип. 9.

3. Колодій І.М. Про ємність множин. У цьому ж віснику.

УДК 517.946

І.М.КОЛОДІЙ

ПРО ЄМНІСТЬ МНОЖИН

У цій роботі введено поняття /$\alpha^*, \bar\lambda$/ – ємності множини, що узагальнює поняття α – ємності множини, сформульоване в роботі [4]. Це поняття використовується при доведенні теорем про усувну особливість, аналогічних відповідним теоремам для гармонічних функцій. Результат статті анонсовано в [1].

Нехай Ω – обмежена область в n – мірному евклідовому просторі E^n, $x=(x_1,\dots,x_n)$; $K_r=(x:|x_i|<r,\ i=1,\dots,n)$ – куб.

Означення 1. Нехай $\mathcal{D}$ компактна множина в Ω. Тоді $(\alpha^*,\bar\lambda)$ ємністю множини $\mathcal{D}$ називається число

$$\inf\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)|\Psi_{x_i}|^{\alpha^*}dx,\quad 1\le\alpha^*<+\infty,\quad \lambda_i(x)\ge 0,\ \lambda_i\in L_1,$$

де $\inf$ береться по всіх неперервно-диференційованих, фінітних в Ω функціях, які не менші одиниці на $\mathcal{D}$.

Означення 2. /див. [4] /. Нехай Q обмежена множина в E^n. Тоді α - ємністю множини Q називається число

$$\inf \int_{E^n} |\Phi_x|^\alpha dx, \quad 1 \leq \alpha < +\infty,$$

де $\inf$ береться по всіх неперервно-диференційованих функціях, які не менші одиниці на Q і фінітні в E^n при $\alpha < n$ або фінітні в деякому фіксованому кубі $K_{R_0} \supset Q$ при $\alpha \geq n$.

Зауваження 1. Якщо Q - компактна множина в Ω і α - ємність Q дорівнює нулю, то в означенні 2 можна обмежитись неперервно-диференційованими функціями, фінітними в Ω.

Щоб довести це твердження, достатньо показати, що існує послідовність неперервно-диференційованих функцій $\tilde{\Phi}_\nu(x)$, фінітних в Ω, така, що $\int_\Omega |\tilde{\Phi}_{\nu x}|^\alpha dx \to 0$ при $\nu \to \infty$. Якщо α - ємність Q дорівнює нулю, то існує послідовність неперервно-диференційованих функцій $\Phi_{\nu x}$, фінітних в E^n, така, що $\int_{E^n} |\Phi_{\nu x}|^\alpha dx \to 0$ при $\nu \to \infty$. Нехай $\eta = \eta(x)$ - гладка, фінітна в Ω, функція; побудуємо функцію $\tilde{\Phi}_\nu = \eta \Phi_\nu$. Тоді

$$\int_\Omega |\tilde{\Phi}_{\nu x}|^\alpha dx = \int_\Omega |(\eta \Phi_\nu)_x|^\alpha dx \leq C(\alpha, n) \left[\int_\Omega \eta^\alpha |\Phi_{\nu x}|^\alpha dx + \int_\Omega |\eta_x|^\alpha |\Phi_\nu|^\alpha dx \right] \leq$$

$$\leq C(\alpha, n) \left[\int_{E^n} |\Phi_{\nu x}|^\alpha dx + \int_{E^n} |\eta_x|^\alpha |\Phi_\nu|^\alpha dx \right] \equiv C(\alpha, n)(\mathcal{J}_{1,\nu} + \mathcal{J}_{2,\nu}).$$

За умовою $\mathcal{J}_{1,\nu} \to 0$ при $\nu \to \infty$; оцінимо $\mathcal{J}_{2,\nu}$ при $\alpha < n$, використовуючи нерівність Гельдера і теорему С.Л.Соболєва [3]

$$\mathcal{J}_{2,\nu} \leq C(\alpha, n, \Omega) \left(\int_{E^n} |\Phi_\nu|^{\frac{n\alpha}{n-\alpha}} dx \right)^{\frac{n-\alpha}{n}} \leq C(\alpha, n, \Omega) \int_{E^n} |\Phi_{\nu x}|^\alpha dx,$$

причому зауважимо, що $C(\alpha, n, \Omega)$ не залежить від носіїв функції Φ_ν, тобто не залежить від ν і тому $\mathcal{J}_{2,\nu} \to 0$ при $\alpha < n$.

Якщо ж $\alpha = n$, то $C(\alpha, n, \Omega)$ в останній нерівності залежить і від міри носіїв функції Φ_ν, які містяться в фіксованому кубі $K_{R_0} \supset \Omega \supset Q$. Тому $J_{2,\nu} \to 0$ при $\nu \to \infty$ і в випадку $\alpha = n$.

Якщо розглядаємо множини α - ємності нуль, то тим самим накладаємо обмеження $\alpha \le n$, тому що при $\alpha > n$ будь-яка обмежена множина має ненулеву α - ємність /справді, будь-яка обмежена множина містить точку і тому α - ємність цієї множини не менша α - ємності точки, а α -ємність точки при $\alpha > n$ не дорівнює нулю; див. [4] /.

Отже, ми довели, що існує послідовність функцій $\tilde{\Phi}_\nu(x)$, фінітних в Ω, на яких досягається inf, тобто для множин нульової α - ємності достатньо розглядати функції $\Phi(x)$ фінітні лише в Ω. Якщо ж α -ємність дорівнює нулю по функціях, фінітних в Ω, то вона, очевидно, дорівнює нулю і по функціях, фінітних в E^n. Таким чином для множин нульової α - ємності inf на гладких функціях, фінітних в E^n, дорівнює inf по функціях, фінітних в Ω. Тому, оперуючи множиною α -ємності нуль, вважатимемо, що функції $\Phi(x)$ в означенні 2 фінітні в Ω.

З а у в а ж е н н я 2. Якщо α -ємність компактної множини Q дорівнює нулю і $\alpha^* = \frac{\alpha}{S}(S-1)$, $\lambda_i(x) \in L_S$, $S > 1$, то $(\alpha^*, \bar{\lambda})$ - ємність Q дорівнює нулю.

Справедливість цього твердження випливає з зауваження 1 і оцінки

$$\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) |\Psi_{x_i}|^{\alpha^*} dx \le C \left(\int\limits_\Omega |\Psi_x|^{\alpha} dx \right)^{\frac{\alpha^*}{\alpha}}.$$

З а у в а ж е н н я 3. Якщо $\alpha^* > n(1 + \max_i T_i^{-1})$, де T_i - верхня межа чисел t_i таких, що $\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}(\Omega)$, то $(\alpha^*, \bar{\lambda})$ - ємність компактної множини $\mathcal{D}$ не дорівнює нулю.

Справді, коли $\alpha^* > n(1 + \max_i T_i^{-1})$, то існує таке $\alpha > n$, що $\alpha^* > \alpha(1 + \max T_i^{-1})$, або $(\alpha^* - \alpha)\alpha^{-1} > \max_i T_i^{-1}$. Тобто

$\frac{\alpha^*-\alpha}{\alpha} > \frac{1}{T_i}$. Отже, існує таке число t_i , що $\frac{\alpha^*-\alpha}{\alpha} > \frac{1}{t_i}$, або $\frac{\alpha}{\alpha^*-\alpha} < T_i$. Тоді, використавши нерівність Гельдера маємо

$$\int_\Omega |\Psi_x|^\alpha dx \leq C \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega \lambda_i(x) |\Psi_{x_i}|^{\alpha^*} dx\right)^{\frac{\alpha}{\alpha^*}} \left(\int_\Omega (\lambda_i^{-1}(x))^{\frac{\alpha}{\alpha^*-\alpha}} dx\right)^{\frac{\alpha^*-\alpha}{\alpha}} \leq$$

$$\leq C\left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega \lambda_i(x) |\Psi_{x_i}|^{\alpha^*} dx\right)^{\frac{\alpha}{\alpha^*}}.$$

Таким чином,

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\Psi_{x_i}|^{\alpha^*} dx \geq C\left(\inf \int_\Omega |\Psi_x|^\alpha dx\right)^{\frac{\alpha^*}{\alpha}}.$$

Звідси випливає наше твердження.

Отже, можна зробити такий висновок, коли говоримо, що $(\alpha^*, \bar{\lambda})$ -ємність компактної множини дорівнює нулю, то тим самим накладаємо обмеження $\alpha^* \leq n(1+\max_i T_i^{-1})$.

Позначимо через $U(\mathcal{D})$ множину функцій $\bar{\eta}(x)$, $0 \leq \bar{\eta}(x) \leq 1$ що задовольняють умову Ліпшіца і перетворюються в нуль в околі множини $\mathcal{D}$.

Л е м а 1. Нехай $\mathcal{D} \subset \Omega$ компактна множина $(\alpha^*, \bar{\lambda})$ -ємності нуль, $1 \leq \alpha^* \leq n(1+\max_i T_i^{-1})$. Тоді існує послідовність функцій $\bar{\eta}^{(\nu)}(x) \in U(\mathcal{D})$ така, що $\bar{\eta}^{(\nu)}(x) \to 1$ майже всюди і $\int_\Omega \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\bar{\eta}^{(\nu)}_{x_i}(x)|^{\alpha^*} dx \to 0$, де $\lambda_i(x) \in L_S$, $\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}$, причому числа S та t_i задовольняють умови роботи [2] .

Д о в е д е н н я . За означенням існує послідовність $\Psi^{(\nu)}(x)$ неперервно-диференційованих, фінітних в Ω функцій, які не менші від одиниці в $\mathcal{D}$, а

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \lambda_i(x) |\Psi^{(\nu)}_{x_i}|^{\alpha^*} dx \leq \frac{1}{\nu}$$

Функції $2\Psi^{(\nu)}(x) > 1$ в деякому околі $\mathcal{D}$. Розглянемо функцію

$$\bar{\Psi}^{(\nu)}(x) = \begin{cases} 0 \text{, коли } \Psi^{(\nu)} < 0, \\ 2\Psi^{(\nu)} \text{, коли } 0 < 2\Psi^{(\nu)} < 1, \\ 1 \text{, коли } 2\Psi^{(\nu)} > 1. \end{cases}$$

Очевидно, що $\bar{\psi}^{(\nu)}(x)$ яка задовольняє умову Ліпшіца, дорівнює одиниці в околі $\mathcal{D}$ і задовольняє нерівність

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) |\bar{\psi}^{(\nu)}_{x_i}|^{\alpha^*} dx \leq C \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) |\psi^{(\nu)}_{x_i}|^{\alpha^*} dx \leq \frac{C}{\nu}.$$

Функція $\bar{\psi}^{(\nu)}(x)$ фінітна в Ω і тому за лемою роботи [4]

$$\left(\int_\Omega |\bar{\psi}^{(\nu)}(x)|^{k\alpha^*} dx \right)^{\frac{1}{k}} \leq \frac{C}{\nu}, \qquad k > 1.$$

З останньої нерівності випливає, що існує підпослідовність, ми знову позначимо її $\bar{\psi}^{(\nu)}(x)$, така що $\bar{\psi}^{(\nu)}(x) \to 0$ майже всюди. Тому функція $\bar{\eta}^{(\nu)}(x) = 1 - \bar{\psi}^{(\nu)}(x)$ задовольняє умови леми 1.

Н а с л і д о к . Якщо $\mathcal{D}$ компактна множина $(\alpha^*, \bar{\lambda})$ -ємності нуль $1 \leq \alpha^* \leq n(1 + \max_i \tau_i^{-1})$, то міра $\mathcal{D}$ дорівнює нулю.

Дійсно функції $\bar{\psi}^{(\nu)}(x) = 1$ на $\mathcal{D}$ для кожного ν. З другого боку $\bar{\psi}^{(\nu)} \to 0$ майже всюди. Отже, міра $\mathcal{D}$ дорівнює нулю.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. К о л о д и й И.М. О некоторых свойствах обобщенных решений вырождающихся эллиптических уравнений. - ДАН СССР, 1971, т.197.

2. К о л о д і й І.М. Оцінка максимуму модуля узагальнених розв"язків еліптичних диференціальних рівнянь з виродженням. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", 1974, вип.9.

3. С о б о л е в С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во Ленинградского ун-та, 1950.

4. J. Serrin. Local behavior of solutions of quasilinear equations - "Acta Math", 1964, 111, № 3-4.