УДК 517.946

Г.П.БОЙКО

УЗАГАЛЬНЕНА ОСНОВНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ $\Delta^3 u = 0$

Нехай $\mathcal{D}$ – обмежена область в R^3 з границею S класу C^∞; $\nu(y)$ – одиничний вектор внутрішньої нормалі до S у точці y. У [3] побудовано потенціали v_1, v_2, v_3, за допомогою яких крайова задача

$$\begin{aligned} &\Delta^3 u(x) = 0, \quad x \in \mathcal{D}, \\ &u|_S = f_1, \\ &\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_S = f_2, \\ &\Delta u|_S = f_3, \end{aligned} \qquad /1/$$

де f_1, f_2, f_3 – досить гладкі функції на S, зводиться до системи інтегро-диференціальних рівнянь, еквівалентної системі інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Ці потенціали мають вигляд

$$v_1(x,\mu_1) = \frac{1}{\pi}\int_S \Big\{\mu_1(y)\Psi_{11}(x,y) + \Big(\frac{\partial}{\partial s_1}\Big)^2 \mu_1(y)\Psi_{12}(x,y) + \Big(\frac{\partial}{\partial s_2}\Big)^2 \mu_1(y)\Psi_{13}(x,y)\Big\} dS_y,$$

$$v_2(x,\mu_2) = \frac{1}{\pi}\int_S \Big\{\mu_2(y)\Psi_{21}(x,y) + \Big(\frac{\partial}{\partial s_1}\Big)^2 \mu_2(y)\Psi_{22}(x,y) + \Big(\frac{\partial}{\partial s_2}\Big)^2 \mu_2(y)\Psi_{23}(x,y)\Big\} dS_y,$$

$$v_3(x,\mu_3) = \frac{1}{\pi}\int_S \mu_3(y)\Psi_{31}(x,y)\, dS_y,$$

де s_1, s_2 – головні напрями поверхні S в точці y, ядра $\Psi_{11}(x,y)$, $\Psi_{12}(x,y), \ldots, \Psi_{31}(x,y)$ виражаються лінійно через фундаментальні розв"язки рівняння /1/ та похідні від них.

Тут ми розглядаємо, використовуючи побудовані в [3] ядра потенціалів v_1, v_2, v_3, узагальнену / в сенсі [1] / основну крайову задачу для рівняння /1/.

Позначимо через S_ε паралельну до S поверхню, розміщену на відстані ε , $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, по напрямку нормалі $\nu(y)$ від поверхні S /припускаємо існування такого додатного числа ε_0 , що для всіх $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ поверхні S_ε не мають точок самоперетину/. Нехай $\mathcal{D}(S)$ - простір нескінченно диференційованих на S /основних/ функцій, $\mathcal{D}'(S)$ - простір лінійних неперервних функціоналів над $\mathcal{D}(S)$ / простір узагальнених функцій/. Під $<\varphi, F>$ розуміємо дію узагальненої функції F на основну φ . Якщо $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_K \end{pmatrix}$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_K)$, то $<\varphi, F> = \sum_{i=1}^{K} <\varphi_i, F_i>$ [2]. Далі простір основних вектор-функцій розмірності K позначаємо через $[\mathcal{D}(S)]^K$, простір узагальнених вектор-функцій розмірності K - через $[\mathcal{D}'(S)]^K$. Функції $\varphi \in [\mathcal{D}(S)]^K$ продовжимо до функцій із $[\mathcal{D}(S_\varepsilon)]^K$ таким чином: $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(y)$, якщо $x_\varepsilon = y + \varepsilon\nu(y)$.

П о с т а н о в к а з а д а ч і . Нехай F_1 , F_2 , $F_3 \in \mathcal{D}'(S)$. В області $\mathcal{D}$ знайти розв"язок рівняння /1/, що задовольняє умови

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon)\, u(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = <\varphi, F_1>, \qquad /2/$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) \frac{\partial u(x_\varepsilon)}{\partial \nu x_\varepsilon}\, dS_\varepsilon = <\varphi, F_2>, \qquad /3/$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon)\, \Delta u(x_\varepsilon)\, dS_\varepsilon = <\varphi, F_3> \qquad /4/$$

для кожної $\varphi \in \mathcal{D}(S)$.

Нехай

$$\Psi(x,y)=\begin{pmatrix} \Psi_{11}(x,y) & \Psi_{12}(x,y) & \Psi_{13}(x,y) & \Psi_{21}(x,y) & \Psi_{22}(x,y) & \Psi_{23}(x,y) & \Psi_{31}(x,y) \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_{1x}}\right)^2 \Psi_{11}(x,y) & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\left(\frac{\partial}{\partial s_{1x}}\right)^2 \Psi_{31}(x,y) \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_{2x}}\right)^2 \Psi_{11}(x,y) & \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot\left(\frac{\partial}{\partial s_{2x}}\right)^2 \Psi_{31}(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial \nu_x} \Psi_{11}(x,y) & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\frac{\partial}{\partial \nu_x} \Psi_{31}(x,y) \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_{1x}}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \nu_x} \Psi_{11}(x,y) & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \left(\frac{\partial}{\partial s_{1x}}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \nu_x} \Psi_{31}(x,y) \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_{2x}}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \nu_x} \Psi_{11}(x,y) & & & \cdot & & \cdot & \left(\frac{\partial}{\partial s_{2x}}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \nu_x} \Psi_{31}(x,y) \\ \Delta_x \Psi_{11}(x,y) & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\Delta_x \Psi_{31}(x,y) \end{pmatrix},$$

$$C(y)=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \lambda_1(y) & \lambda_2(y) & \lambda_3(y) & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad F=\begin{pmatrix} F_1 \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_1}\right)^2 F_1 \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_2}\right) F_1 \\ F_2 \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_1}\right)^2 F_2 \\ \left(\frac{\partial}{\partial s_2}\right)^2 F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \\ A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \\ A_{31} \end{pmatrix},$$

$\lambda_1(y), \lambda_2(y), \lambda_3(y)$ визначені в [3] . Тут під $\left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)^2 F_j$ розуміємо узагальнену функцію, визначену формулою

$$< g, \left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)^2 F_j > = < \left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)^{2^*} g\ , \ F_j > , \quad i,j = 1,2$$

для кожної $g \in \mathcal{D}(S)$, де $\left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)^{2^*}$ $/ i = 1,2 /$ - спряжений оператор до оператора $\left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)^2$, тобто такий, що

$$\int_S \left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)^2 u \cdot v \, dS = \int_S u \cdot \left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)^{2^*} v \, dS$$

для довільних досить гладких u, v . Існування спряжених в такому сенсі операторів доведено, наприклад, в [1] .

При наших припущеннях наявні такі справедливі твердження:

Л е м а 1. Оператор $(K\varphi)(y) \equiv \int\limits_S \varphi(x)\Psi(x,y)\,dS_x$ діє в просторі $[\mathcal{D}(S)]^7$.

Л е м а 2. Перетворення $< g, A > = < \varphi_g, F >$, /5/

де $g = (g_1, \dots, g_7) \in [\mathcal{D}(S)]^7$, $\varphi_g = (\varphi_{g_1}, \dots, \varphi_{g_7})$ – розв"язок системи інтегральних рівнянь

$$\varphi(y)C(y) + \frac{1}{\pi}\int\limits_S \varphi(x)\Psi(x,y)\,dS_x = g(y), \qquad /6/$$

встановлює ізоморфізм простору $[\mathcal{D}(S)]^7$ на себе. Формула обертання має вигляд

$$< \varphi, F > = < \varphi(y)C(y) + \frac{1}{\pi}\int\limits_S \varphi(x)\Psi(x,y)\,dS_x , A >$$

для кожної $\varphi \in [\mathcal{D}(S)]^7$.

Твердження леми 2 випливає з єдиності розв"язку системи /6/ як транспонованої до відповідної системи інтегральних рівнянь в [3] і леми 1.

Із вигляду матриць $\Psi(x,y)$ і $C(y)$ та властивостей розв"язків системи /6/ випливає, що

$$\begin{aligned} A_{12} &= \left(\frac{\partial}{\partial S_1}\right)^2 A_{11}, & A_{13} &= \left(\frac{\partial}{\partial S_2}\right)^2 A_{11}, \\ A_{22} &= \left(\frac{\partial}{\partial S_1}\right)^2 A_{21}, & A_{23} &= \left(\frac{\partial}{\partial S_2}\right)^2 A_{21}. \end{aligned} \qquad /7/$$

Т е о р е м а . Нехай $F_1, F_2, F_3 \in \mathcal{D}'(S)$, узагальнені функції A_{11}, A_{21}, A_{31} визначені згідно з /5/ і /6/, тоді функція

$$\begin{aligned} u(x) = {} & < \Psi_{11}(x,y) + \left(\frac{\partial}{\partial S_{1y}}\right)^{2*} \Psi_{12}(x,y) + \left(\frac{\partial}{\partial S_{2y}}\right)^{2*} \Psi_{13}(x,y), A_{11} > + \\ & + < \Psi_{21}(x,y) + \left(\frac{\partial}{\partial S_{1y}}\right)^{2*} \Psi_{22}(x,y) + \left(\frac{\partial}{\partial S_{2y}}\right)^{2*} \Psi_{23}(x,y), A_{21} > + \qquad /8/ \\ & + < \Psi_{31}(x,y), A_{31} >, \qquad x \in \mathcal{D},\ y \in S \end{aligned}$$

є розв"язком задачі /1/-/4/.

Д о в е д е н н я . Легко бачити, що коли функція $u(x)$ задовольняє умови /2/ і /3/, то вона також задовольняє умови

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) \left(\frac{\partial}{\partial s_{i,\varepsilon}}\right)^2 u(x_\varepsilon) ds_\varepsilon = < \left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)^{2*} \varphi, F_1 >, \qquad /2'/$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi(x_\varepsilon) \left(\frac{\partial}{\partial s_{i,\varepsilon}}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \nu_{x_\varepsilon}} u(x_\varepsilon) ds_\varepsilon = < \left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)^{2*} \varphi, F_2 >, \quad i = 1,2 \qquad /3'/$$

для кожної $\varphi \in \mathcal{D}(S)$. Визначимо узагальнені функції A_{12}, A_{13}, A_{22}, A_{23} за формулою /7/, тоді функцію /8/ можна зобразити у вигляді

$$u(x) = < \Psi_{11}(x,y), A_{11} > + < \Psi_{12}(x,y), A_{12} > + < \Psi_{13}(x,y), A_{13} > + \qquad /9/$$
$$+ < \Psi_{21}(x,y), A_{21} > + < \Psi_{22}(x,y), A_{22} > + < \Psi_{23}(x,y), A_{23} > + < \Psi_{31}(x,y), A_{31} >,$$
$$x \in \mathcal{D}, \ y \in S.$$

Підставляємо /9/ послідовно в умови /2/, /2'/, /3/, /3'/, /4/ з основними функціями $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_7$, а потім додаємо одержані рівності. Використовуючи аналог теореми Фубіні [1], формули стрибків відповідних потенціалів [3], /7/ і лему 2, переконуємось, що функція /9/ задовольняє умови /2/–/4/. Оскільки функції $\Psi_{ij}(x,y)$ / $i, j = 1,2,3$ / виражаються лінійно через фундаментальні розв"язки рівняння /1/ і похідні від них, то за властивостями узагальнених функцій функція /8/ задовольняє також рівняння /1/ в області $\mathcal{D}$.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Г у п а л о А. - В.С. Обобщенные граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа. Автореф. канд. дис., Львов, 1968.

2. Г е л ь ф а н д И.М., Ш и л о в Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1959.

3. Л о б о д з и н с к а я И.Г. Решение краевых задач для полигармонических уравнений в п – мерном пространстве методом потенциалов. Автореф. канд. дис., Львов, 1961.

УДК 517.946

Г.-В.С.ГУПАЛО

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА

Розглядаємо задачу Діріхле для рівняння Пуссона, коли граничні значення і права частина рівняння є узагальненими функціями.

1. Нехай Ω – обмежена область в n – вимірному евклідовому просторі E^n, S – її $n-1$ – вимірна безмежно гладка границя. Введемо такі позначення: через $\nu(x)$ позначимо орт внутрішньої нормалі n_x до поверхні S у точці x ; через $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ – простір безмежно диференційовних /основних/ функцій $\varphi(x)$ в $\bar{\Omega}=\Omega\cup S$; $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ – простір лінійних неперервних функціоналів /узагальнених функцій/ на $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$; $\mathcal{D}_0(\bar{\Omega})$ – простір безмежно диференційовних функцій з компактними носіями в $\bar{\Omega}$; $\mathcal{D}_0'(\bar{\Omega})$ – простір лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{D}_0(\bar{\Omega})$, очевидно, що $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})\subset\mathcal{D}_0'(\bar{\Omega})$; $\mathcal{D}(S)$ – простір безмежно диференційовних /основних/ функцій $\varphi(x)$ на поверхні S ; $\mathcal{D}'(S)$ – простір лінійних неперервних функціоналів /узагальнених функцій/ на $\mathcal{D}(S)$. Дію узагальненої функції $\mathcal{F}\in\mathcal{D}_0'(\bar{\Omega})$ /$\mathcal{F}\in\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$/ на основну функцію $\varphi\in\mathcal{D}_0(\bar{\Omega})$/$\varphi\in\mathcal{D}(\bar{\Omega})$/ позначаємо так: $(\mathcal{F},\varphi)$, а дію узагальненої функції $A\in\mathcal{D}'(S)$ на основну функцію $\varphi\in\mathcal{D}(S)$ – так: $\langle A,\varphi\rangle$.

2. П о с т а н о в к а з а д а ч і . Нехай $\mathcal{F}\in\mathcal{D}_0'(\bar{\Omega})$ і $G\in\mathcal{D}'(S)$, треба знайти розв"язок рівняння

$$\Delta U=\mathcal{F} \qquad /1/$$