2. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1959.

3. Лободзинская И.Г. Решение краевых задач для полигармонических уравнений в n – мерном пространстве методом потенциалов. Автореф. канд. дис., Львов, 1961.

УДК 517.946

Г.-В.С.ГУПАЛО

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА

Розглядаємо задачу Діріхле для рівняння Пуссона, коли граничні значення і права частина рівняння є узагальненими функціями.

1. Нехай Ω – обмежена область в n – вимірному евклідовому просторі E^n, S – її $n-1$ – вимірна безмежно гладка границя. Введемо такі позначення: через $\nu(x)$ позначимо орт внутрішньої нормалі n_x до поверхні S у точці x ; через $\mathcal{D}(\bar\Omega)$ – простір безмежно диференційовних /основних/ функцій $\varphi(x)$ в $\bar\Omega = \Omega \cup S$; $\mathcal{D}'(\bar\Omega)$ – простір лінійних неперервних функціоналів /узагальнених функцій/ на $\mathcal{D}(\bar\Omega)$; $\mathcal{D}_0(\bar\Omega)$ – простір безмежно диференційовних функцій з компактними носіями в $\bar\Omega$; $\mathcal{D}_0'(\bar\Omega)$ – простір лінійних неперервних функціоналів на $\mathcal{D}_0(\bar\Omega)$, очевидно, що $\mathcal{D}'(\bar\Omega) \subset \mathcal{D}_0'(\bar\Omega)$; $\mathcal{D}(S)$ – простір безмежно диференційовних /основних/ функцій $\varphi(x)$ на поверхні S ; $\mathcal{D}'(S)$ – простір лінійних неперервних функціоналів /узагальнених функцій/ на $\mathcal{D}(S)$. Дію узагальненої функції $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_0'(\bar\Omega)$ /$\mathcal{F} \in \mathcal{D}'(\bar\Omega)$/ на основну функцію $\varphi \in \mathcal{D}_0(\bar\Omega)$/$\varphi \in \mathcal{D}(\bar\Omega)$/ позначаємо так: $(\mathcal{F}, \varphi)$, а дію узагальненої функції $A \in \mathcal{D}'(S)$ на основну функцію $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ – так: $\langle A, \varphi \rangle$.

2. Постановка задачі. Нехай $\mathcal{F} \in \mathcal{D}_0'(\bar\Omega)$ і $G \in \mathcal{D}'(S)$, треба знайти розв"язок рівняння

$$\Delta U = \mathcal{F} \qquad /1/$$

в обмеженій області $\Omega \subset E^n$, який задовольняє граничну умову

$$U = G \qquad /2/$$

на поверхні S .

Будемо вважати, що $U \in \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$ є розв"язком задачі /1/-/2/, якщо для будь-якої функції $\Psi \in \mathcal{D}_0(\bar{\Omega})$ виконується рівність

$$(U, \Delta\Psi) - (\mathcal{F}, \Psi) = -\langle G, \frac{d\Psi}{dn} \rangle . \qquad /3/$$

Л е м а 1. Розв"язок задачі /1/-/2/ в розумінні /3/ єдиний.

Справді, нехай існують два розв"язки U_1 і U_2 задачі /1/-/2/. Різницю їх позначимо через U , тоді з /3/ одержимо, що $(U, \Delta\Psi) = 0$ для будь-якої функції $\Psi \in \mathcal{D}_0(\bar{\Omega})$. Отже, $U \equiv 0$ в розумінні $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$.

Нехай $G \in \mathcal{D}'(S)$, вважатимемо [3], [1] , що функція $U(x)$ визначена в обмеженій області $\Omega \subset E^n$ набуває на S узагальнені граничні значення G , коли

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} U(x_\varepsilon)\varphi(x_\varepsilon)\,dS_\varepsilon = \langle G, \varphi \rangle \quad \text{для кожної } \varphi \in \mathcal{D}(S), \qquad /4/$$

де S_ε - поверхня паралельна до поверхні S , $\varphi(x_\varepsilon) = \varphi(x)$, коли $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)$, $x_\varepsilon \in S_\varepsilon$, $x \in S$.

Л е м а 2. Нехай $\mathcal{F} = 0$. Якщо $U = G \in \mathcal{D}'(S)$ на поверхні S в розумінні /4/, то U є розв"язком задачі /1/-/2/ в розумінні /3/.

Д о в е д е н н я. Коли $\mathcal{F} = 0$ і $U = G$ на поверхні S в розумінні /4/, то маємо узагальнену задачу Діріхле для рівняння Лапласа, яка розглянута в [1] . Її розв"язок, згідно теореми 2 з [1] можна зобразити у вигляді

$$U(x) = \langle A, \frac{\partial\omega(x,y)}{\partial n_y} \rangle , \quad x \in \Omega . \qquad /5/$$

де $<\Lambda,g> = <G,\varphi_g>$; φ_g – розв"язок інтегрального рівняння

$$g(y) = p\varphi(y) + \int_S \frac{\partial\omega(x,y)}{\partial n_y}\varphi(x)\,d_xS, \quad y\in S; \qquad /6/$$

$p=\frac{\omega_n}{2}$, ω_n – площа поверхні одиничної сфери в E^n; $\omega(x,y)$ – фундаментальний розв"язок рівняння Лапласа в E^n.

Для доведення леми досить показати, що

$$\int_\Omega <\Lambda, \frac{\partial\omega(x,y)}{\partial n_y}> \Delta\Psi(x)\,dx =$$

$$= -<\Lambda, p\frac{d\Psi}{dn} + \int_S \frac{\partial\omega(x,y)}{\partial n_y}\frac{d\Psi}{dn}d_xS> \quad \text{для кожної } \Psi\in\mathcal{D}_0(\bar\Omega). \qquad /7/$$

Дійсно,

$$\int_\Omega <\Lambda, \frac{\partial\omega(x,y)}{\partial n_y}> \Delta\Psi(x)\,dx = <\Lambda, \int_\Omega \frac{\partial\omega(x,y)}{\partial n_y}\Delta\Psi(x)\,dx>. \qquad /8/$$

Розглянемо $\displaystyle\int_\Omega \omega(x,z)\Delta\Psi(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Omega\setminus K_\varepsilon}\omega(x,z)\Delta\Psi(x)\,dx,$

де K_ε – шар радіуса ε з центром у точці z і поверхнею Σ_ε. Застосувавши формулу Гріна до області $\Omega\setminus K_\varepsilon$ і зробивши граничний перехід при $\varepsilon\to 0$, та врахувавши, що $\Psi\in\mathcal{D}_0(\bar\Omega)$, одержимо

$$\int_\Omega \omega(x,z)\Delta\Psi(x)\,dx = -\int_S \omega(x,z)\frac{d\Psi}{dn}d_xS - \omega_n\Psi(z). \qquad /9/$$

Згідно з /9/ і формулою стрибка нормальної похідної потенціалу простого шару [2]

$$\int_\Omega \frac{\partial\omega(x,y)}{\partial n_y}\Delta\Psi(x)\,dx = -\int_S \frac{\partial\omega(x,y)}{\partial n_y}\frac{d\Psi}{dn}d_xS - \frac{\omega_n}{2}\frac{d\Psi}{dn} \qquad /10/$$

Підставивши /10/ в /8/, остаточно маємо

$$\int_\Omega <\Lambda, \frac{\partial\omega(x,y)}{\partial n_y}> \Delta\Psi(x)\,dx =$$

$$= -<\Lambda, p\frac{d\Psi}{dn} + \int_S \frac{\partial\omega(x,y)}{\partial n_y}\frac{d\Psi}{dn}> \quad \text{для кожної } \Psi\in\mathcal{D}_0(\bar\Omega).$$

Лема доведена.

Нехай $\Gamma(x,y)$ - функція Гріна задачі Діріхле для області Ω.

Визначимо узагальнену функцію U_G за правилом

$$(U_G,\Psi)=\langle G,\frac{\partial}{\partial n_y}\int_\Omega \Gamma(x,y)\Psi(x)dx\rangle \quad \text{для кожної } \Psi\in\mathcal{D}(\bar\Omega) \qquad /11/$$

а узагальнену функцію $U_\mathcal{F}$ за правилом

$$(U_\mathcal{F},\Psi)=(\mathcal{F},\int_\Omega \Gamma(x,y)\Psi(y)dy) \quad \text{для кожної } \Psi\in\mathcal{D}(\bar\Omega). \qquad /12/$$

Легко показати, що U_G , $U_\mathcal{F}$ - елементи простору $\mathcal{D}'(\Omega)$. Має місце наступна лема, яка дає представлення розв"язку задачі /1/-/2/.

Л е м а 3. Узагальнена функція

$$U=U_G+U_\mathcal{F} \qquad /13/$$

є розв"язком задачі /1/-/2/ в розумінні /3/.

Д о в е д е н н я . Треба показати, що має місце рівність

$$(U_G,\Delta\Psi)+(U_\mathcal{F},\Delta\Psi)-(\mathcal{F},\Psi)=-\langle G,\frac{d\Psi}{dn}\rangle \quad \text{для кожної } \Psi\in\mathcal{D}_0(\bar\Omega). \qquad /14/$$

Згідно /11/ і /12/ маємо

$$(U_G,\Delta\Psi)=-\langle G,\frac{d\Psi}{dn}\rangle,\quad \Psi\in\mathcal{D}_0(\bar\Omega). \qquad /15/$$

$$(U_\mathcal{F},\Delta\Psi)=(\mathcal{F},\Psi),\quad \Psi\in\mathcal{D}_0(\bar\Omega). \qquad /16/$$

Підставивши /15/ і /16/ в /14/, переконуємось, що лема доведена.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле.-ДАН УРСР, 1966, 843-846.

2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М., "Мир", 1964.

3. Szmydt Z. Sui problemi di Dirichlet e di Neumann con dati al contorno generalizzatto. -„Atti della Accadem." Naz. dei Lincei, 32, 867 (1962).

УДК 513.011.3

І.С.КРУК

ТОЧНІСТЬ ОБЧИСЛЕННЯ ЗА НОМОГРАМАМИ ТА СПОСОБИ ЇЇ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Поряд з електронно-обчислювальною технікою ще довго для полегшення праці будуть використовуватись різні обчислювальні прилади і в першу чергу номограми, виготовлені на звичайному креслярському папері.

Звичайно, обчислення за номограмами носить наближений характер. Відповідь, що знаходиться за номограмою, містить в собі деяку помилку. Оцінка цієї помилки при будь-якому обчисленні, звичайно, бажана, а в деяких випадках просто необхідна.

У цій роботі ставимо за мету вказати: 1/ джерела виникнення помилок при обчисленні за номограмами; 2/ способи оцінки точності обчислення за допомогою номограм, коли розглядати номограми як певний рисунок, накреслений у графічній площині.

Розглядаємо номограму, накреслену в графічній площині, де графічні точки розглядаються як кола достатньо малого радіуса ω, а графічні прямі, як смужки шириною 2ω [2].