ЛІТЕРАТУРА

1. Гупало Г.С. Про узагальнену задачу Діріхле.-ДАН УРСР, 1966, 843-846.

2. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.,"Мир", 1964.

3. Szmydt Z. Sui problemi di Dirichlet e di Neumann con dati al contorno generalizzatto. -"Atti della Accadem." Naz. dei Lincei, 32, 867 (1962).

УДК 513.011.3

І.С.КРУК

ТОЧНІСТЬ ОБЧИСЛЕННЯ ЗА НОМОГРАМАМИ ТА СПОСОБИ ЇЇ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Поряд з електронно-обчислювальною технікою ще довго для полегшення праці будуть використовуватись різні обчислювальні прилади і в першу чергу номограми, виготовлені на звичайному креслярському папері.

Звичайно, обчислення за номограмами носить наближений характер. Відповідь, що знаходиться за номограмою, містить в собі деяку помилку. Оцінка цієї помилки при будь-якому обчисленні, звичайно, бажана, а в деяких випадках просто необхідна.

У цій роботі ставимо за мету вказати: 1/ джерела виникнення помилок при обчисленні за номограмами; 2/ способи оцінки точності обчислення за допомогою номограм, коли розглядати номограми як певний рисунок, накреслений у графічній площині.

Розглядаємо номограму, накреслену в графічній площині, де графічні точки розглядаються як кола достатньо малого радіуса ω, а графічні прямі, як смужки шириною 2ω [2].

На основі лабораторних досліджень Д.І.Каргін [1] виявив, що величина ω перебуває в межах між 0,08 і 0,13 мм. Помилка відповіді буде визначатися в основному помилками операцій на номограмі при її знаходженні.

Під час побудови номограм, як і при їх читанні, маємо справу з помилками, які вносяться в результат з огляду на розміри реальних /графічних/ точок і прямих, якими оперуємо при цьому. Одним з істотних джерел виникнення помилок в обчисленні є існування у графічній площині графічно-інцидентних елементів /точок і прямих/.

Дві графічні точки $A(A')$ і $B(B')$ називаються графічно-інцидентними, якщо відстань між відповідними їм евклідовими точками менша або рівна 2ω, тобто, коли $A'B' \leq 2\omega$. Якщо ж $\omega = 0$, тобто $A' \equiv B'$, то такі точки звуться абсолютно інцидентними /рис.1/.

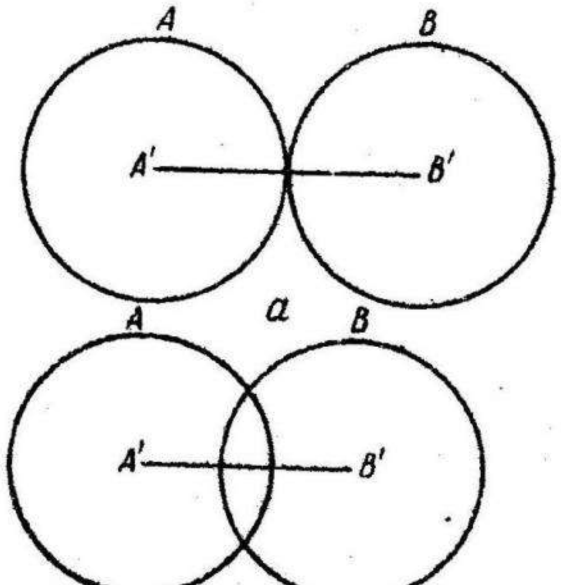

Рис. 1.

Дві графічно-інцидентні точки визначають коло радіуса 2ω з центром в середині евклідового відрізка $A'B'$. Це коло можна назвати первинною помилкою інцидентності двох графічних точок.

Графічна точка $A(A')$ і пряма $a(a')$ називаються графічно інцидентними, якщо відстань від евклідової точки A' до евклідової прямої a' не перевищує 2ω, тобто $A'O' \leq 2\omega$. Коли $A' \equiv O'$, то точка A і пряма a звуться абсолютно інцидентними.

Те ж саме можна сказати і про дві графічні прямі або про графічну точку і графічне коло.

Дві графічні прямі $a(a')$ і $b(b')$ вважаються графічно інцидентними, якщо $a' \parallel b'$ і відстань між ними не перевищує 2ω, тобто $O_1'O' \leq 2\omega$. Коли $O' \equiv O_1'$, то прямі звуться абсолютно інцидентними.

Графічне коло $K(K')$ і точка $A(A')$ графічно інцидентні, якщо $A'O' \leq 2\omega$ /рис. 2/.

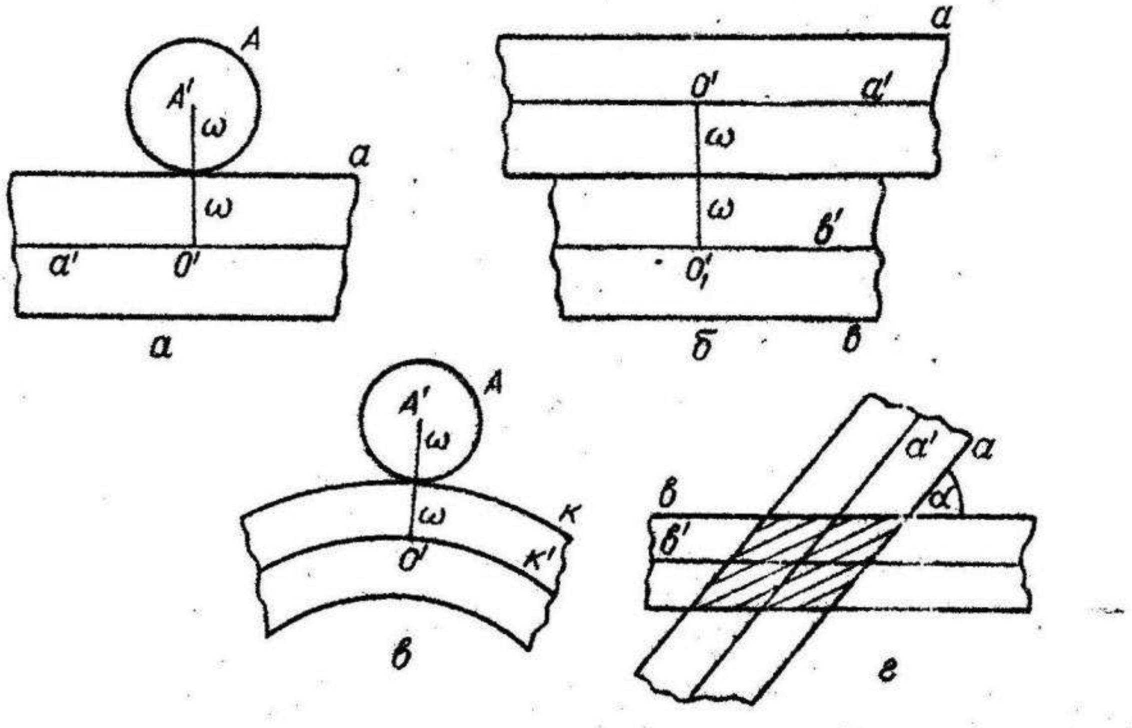

Рис. 2.

При побудовах і користуванні номограмами зустрічаємось не тільки з первинними помилками, що виникають внаслідок графічної інцидентності елементів, але і з такими, які виникають внаслідок перетину двох графічних прямих, графічної прямої і графічного кола, двох графічних кіл і т.д.

Якщо дві графічні прямі перетинаються, то вони визначають точку, точність позначення якої характеризується площею помилок, форма і величина якої залежить в основному від кута α, під яким перетинаються ці прямі /рис.2/.

Якщо позначити площу помилок через S, то

$$S = \frac{4\omega^2}{\sin\alpha}.$$

Користуючись даними попереднього розділу, можемо тепер перейти до розгляду питання про точність обчислень за номограмами.

Розглянемо номограму квадратного рівняння $z^2+pz+q=0$, що складається з трьох шкал, рівняння яких мають вигляд:

$x_1=0,\ y_1=mp$ – рівняння шкали p,

$x_2=H,\ y_2=nq$ – рівняння шкали q,

$x_3=\frac{H}{1+\frac{n}{m}z},\ y_3=\frac{-nz^2}{1+\frac{n}{m}z}$ – рівняння шкали z,

де m і n – масштабні множники; H – відстань між шкалами. Перші дві шкали прямолінійні, третя – криволінійна. Схематично ця номограма зображена на рис. 3.

Процес знаходження коренів квадратного рівняння за цією номограмою можна розбити на такі етапи: 1/ за даними значеннями p і q на відповідних шкалах позначити точки; 2/ через ці точки провести пряму; 3/ визначити точку перетину цієї прямої з шкалою z; 4/ прочитати помітки знайдених точок перетину, які й будуть коренями квадратного рівняння.

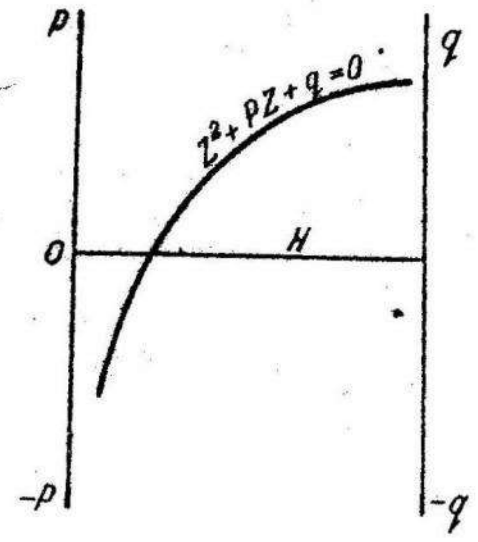

Рис. 3.

Очевидно, що ні один з цих етапів не можна виконати точно. Всі вони виконуються з певними похибками /наближено/.

Розглянемо кожну з цих операцій окремо і проаналізуємо, як впливає кожна з її похибок на похибку відповіді. На першому етапі виникають такі похибки. При знаходженні точок на шкалах p і q за їх позначками доводиться проводити графічну інтерполяцію. Це треба робити особливо тоді, коли необхідно знайти корені загального квадратного рівняння вигляду $az^2+bz+c=0$. Щоб скористатися побудованою номограмою для знаходження його коренів, його необхідно звести до виду:

$$Z^2+\frac{b}{a}Z+\frac{c}{a}=0,$$

тобто $\frac{b}{a}$ і $\frac{c}{a}$ здебільшого дробові числа. Розбиття на око поділок між двома штрихами на два, три і так далі частин приводить до геометричної похибки в нанесенні точок поділу, яка дорівнює $(0{,}2\pm\omega)$ мм /рис.4/. Ця помилка має напрям вздовж шкали. Наявна також помилка в напрямку нормалі до шкали l. Взагалі у графічній пло-

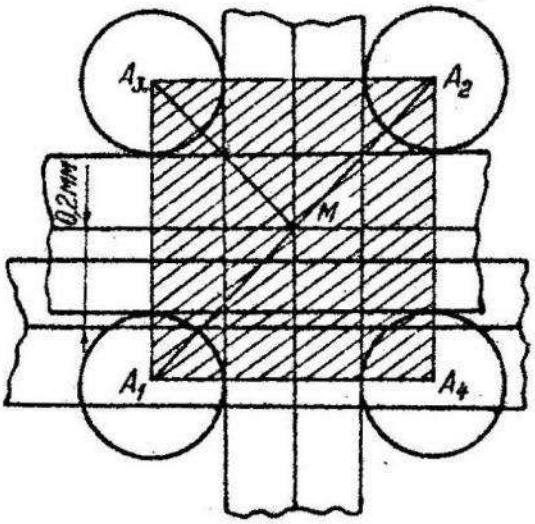

Рис. 4.

щині точність визначення точки на шкалі визначається площею помилок, величина якої дорівнює $2(0{,}2 \pm \omega) \cdot 4\omega = 8\omega(0{,}2 \pm \omega)$. Якщо врахувати, що ω змінюється від 0,8 до 0,13 мм, то максимальне значення цієї площі – 0,3 мм.

Розглянемо другий етап нашої задачі – проведення прямої через дві точки. Ця операція тісно пов"язана з попередньою. Від того, як точно вибрана точка на шкалі, залежить точність проведення прямої. Взагалі, всі можливі прямі, які можна одержати тут, розмістяться у смузі шириною $A_1' A_2' + 6\omega$ і довжиною AB, де $A_1' A_2'$ – сума проекцій помилок Δ і Δ_1 відповідно вздовж прямої і вздовж нормалі на діагональ прямокутника з площею помилок, який ми розглядали в першому етапі; AB – відстань між точками. Розглянемо рис.5. На ньому показані крайні можливі положення прямої відповідей залежно від помибки, яку ми допустили в першому етапі. У $\Delta C_1 D_1 D_2$ висота h є проекцією всіх помилок, допущених у перших двох етапах, на напрямок, перпендикулярний до одного з положень прямої AB. З рис. 5 видно, що

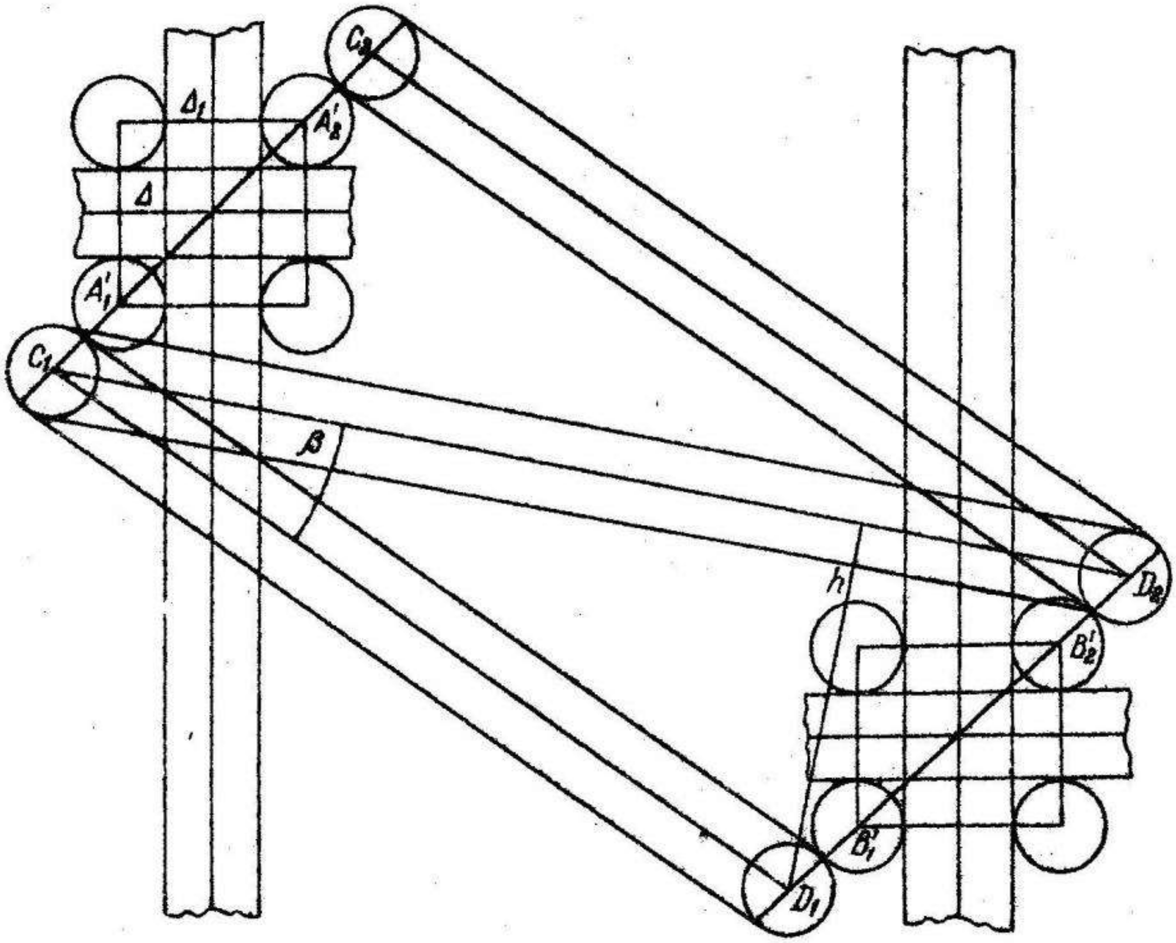

Рис. 5.

$$\frac{h}{l} = \sin\beta \qquad \text{або} \qquad h = l\sin\beta.$$

Звідси висновок: помилка проведення прямої через дві точки прямо пропорціональна відстані між точками, тобто відстані між шкалами номограми. Чим менша величина h , тим менший кут β , тобто тим більша точність проведення прямої через дві точки.

Розглянемо третій етап - знаходження перетину прямої відповідей з шкалою відповідей. Тут розглядається перетин прямої з кривою. Перетинаючись, вони утворюють фігуру, обмежену двома паралельними прямолінійними відрізками і двома криволінійними. Оскільки це перетин у безмежно малому проміжку, то цю фігуру можемо розглядати як звичайний паралелограм, площа якого

$$S = \frac{4\omega^2}{\sin\alpha},$$

де α - кут між прямою і прямолінійною шкалою. Точність визначення точки перетину прямої відповідей з шкалою відповідей визначатиметься цією площею. З формули видно, що коли пряма нормальна до шкали відповідей, то точність визначення точки перетину найбільша, оскільки S має мінімальне значення. Чим менший кут α, тим точність визначення точки перетину менша. Отже, точність побудови точки перетину прямої відповідей з шкалою відповідей перебуває в обернено пропорціональній залежності з кутом їх перетину.

І, нарешті, останній етап - похибка прочитання відповіді на шкалі відповідей приблизно того ж порядку, що й похибка нанесення точки за її поміткою на шкалі, тобто ця похибка, як було доведено вище, приблизно дорівнює 0,3 мм.

Кінцева похибка, яку можна прийняти за суму всіх похибок, що були допущені в процесі відшукання відповіді, дорівнює довжині поділки між дійсною точкою перетину прямої з шкалою відповідей і знайденою точкою. Ціна цієї поділки дає нам похибку відповіді, що одержана за номограмою. Величина такої похибки залежатиме від виду номограми, виду шкал, і для однієї і тієї ж номограми в різних місцях вона може набирати різних значень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Буймола Г.Л. Дослідження первинних помилок геометричних побудов.-Ученые записки Львовского госуниверситета им.Ив. Франко, серия механико-математическая, 1954, т.XXIX, вып.1/6/.

2. Пентковский М.В. Номография. М.-Л.,Техиздат, 1949.

УДК 513

С.В.ДЕНИСКО

МЕХАНІЗМИ ДЛЯ УТВОРЕННЯ ПАРАБОЛ

Зображений на рисунку плоский механізм має таку будову. Повзуни 1, 2, 3, 4 переміщаються відповідно вздовж напрямних 5, 6, 7, 8 так, що $\overline{A_1A} = \lambda \bar{e}_1$, $\overline{A_2B} = k_2 \lambda \bar{e}_2$, $\overline{A_3D} = k_3 \lambda \bar{e}_3$, $\overline{A_4C} = k_4 \lambda \bar{e}_4$ / A_1, A_2, A_3, A_4 – зафіксовані точки; k_2, k_3, k_4 – сталі; λ – змінна; $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ – орти. Таке переміщення повзунів 1, 2, 3, 4 можна здійснити за допомогою складного зубчастого механізму [1], у якого вказані повзуни є