ЛІТЕРАТУРА

1. Буймола Г.Л. Дослідження первинних помилок геометричних побудов.-Ученые записки Львовского госуниверситета им.Ив. Франко, серия механико-математическая, 1954, т.XX1X, вып.1/6/.

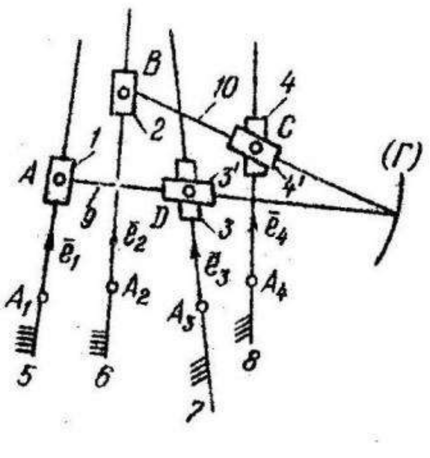
2. Пентковский М.В. Номография. М.-Л.,Техиздат, 1949.

УДК 513

С.В.ДЕНИСКО

МЕХАНІЗМИ ДЛЯ УТВОРЕННЯ ПАРАБОЛ

Зображений на рисунку плоский механізм має таку будову. Повзуни 1, 2, 3, 4 переміщаються відповідно вздовж напрямних 5, 6, 7, 8 так, що $\overline{A_1A} = \lambda \bar{e}_1$, $\overline{A_2B} = k_2 \lambda \bar{e}_2$, $\overline{A_3D} = k_3 \lambda \bar{e}_3$, $\overline{A_4C} = k_4 \lambda \bar{e}_4$ / A_1, A_2, A_3, A_4 – зафіксовані точки; k_2, k_3, k_4 – сталі; λ – змінна; $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$, $\bar{e}_4$ – орти. Таке переміщення повзунів 1, 2, 3, 4 можна здійснити за допомогою складного зубчастого механізму [1] , у якого вказані повзуни є



зубчастими рейками. Повзуни 3, $3'$ утворюють обертальну пару $\mathcal{D}$, а повзуни 4, $4'$ – обертальну пару C . Кривошип 9 є напрямною для повзуна 3, а кривошип 10 – повзуна 4 . Точка перетину прямих AD , BC описує криву Γ .

Крива Γ належить параболі тоді і тільки тоді, коли розглянутий механізм задовольняє умови

$$\begin{gathered}\mathcal{G}_2=0,\ \mathcal{G}_1\mathcal{F}=0,\ \mathcal{F}_2^2-2\rho(\mathcal{F}\mathcal{F}_1+\mathcal{G}_1\mathcal{E})=0,\\ \mathcal{E}_2^2+2\mathcal{D}_2\mathcal{F}_2-2\rho(\mathcal{E}\mathcal{E}_1+\mathcal{F}_1\mathcal{D}+\mathcal{D}_1\mathcal{F})=0,\\ \mathcal{E}_2\mathcal{F}_2-\rho(\mathcal{G}_1\mathcal{D}+\mathcal{F}_1\mathcal{E}+\mathcal{E}_1\mathcal{F})=0,\ \mathcal{D}_2\mathcal{E}_2-\rho(\mathcal{D}_1\mathcal{E}+\mathcal{E}_1\mathcal{D})=0,\\ \mathcal{D}_2^2-2\rho\mathcal{D}_1\mathcal{D}=0.\end{gathered} \qquad /1/$$

У рівностях /1/

$$\mathcal{D}=(x_3^1-x_1^1)(x_4^2-x_2^2)-(x_3^2-x_1^2)(x_4^1-x_2^1),$$

$$\mathcal{D}_1=(x_1^2x_3^1-x_1^1x_3^2)(x_4^1-x_2^1)-(x_2^2x_4^1-x_2^1x_4^2)(x_3^1-x_1^1),$$

$$\mathcal{D}_2=(x_1^2x_3^1-x_1^1x_3^2)(x_4^2-x_2^2)-(x_2^2x_4^1-x_2^1x_4^2)(x_3^1-x_1^1),$$

$$\mathcal{E}=(k_3e_3^1-e_1^1)(x_4^2-x_2^2)+(k_4e_4^2-k_2e_2^2)(x_3^1-x_1^1)-$$
$$-(k_3e_3^2-e_1^2)(x_4^1-x_2^1)-(k_4e_4^1-k_2e_2^1)(x_3^2-x_1^2),$$

$$\mathcal{E}_1=(x_3^1e_1^2+x_1^2k_3e_3^1-x_3^2e_1^1-x_1^1k_3e_3^2)(x_4^1-x_2^1)+$$
$$+(x_1^2x_3^1-x_1^1x_3^2)(k_4e_4^1-k_2e_2^1)-(x_4^1k_2e_2^2+$$
$$+x_2^2k_4e_4^1-x_4^2k_2e_2^1-x_2^1k_4e_4^2)(x_3^1-x_1^1)-(x_2^2x_4^1-$$
$$-x_2^1x_4^2)(k_3e_3^1-e_1^1),\quad \mathcal{E}_2=-(x_4^1k_2e_2^2+x_2^2k_4e_4^1-x_4^2k_2e_2^1-$$
$$-x_2^1k_4e_4^2)(x_3^2-x_1^2)-(x_2^2x_4^1-x_2^1x_4^2)(k_3e_3^2-e_1^2)+(x_3^1e_1^2+$$
$$+x_1^2k_3e_3^1-x_3^2e_1^1-x_1^1k_3e_3^2)(x_4^2-x_2^2)+(x_1^2x_3^1-x_1^1x_3^2)(k_4e_4^2-$$
$$-k_2e_2^2),\quad \mathcal{F}=(k_4e_4^2-k_2e_2^2)(k_3e_3^1-e_1^1)-(k_3e_3^2-e_1^2)(k_4e_4^1-$$
$$-k_2e_2^1),\quad \mathcal{F}_1=k_3(e_1^2e_3^1-e_1^1e_3^2)(x_4^1-x_2^1)+(x_3^1e_1^2+x_1^2k_3e_3^1-$$

$$-x_3^2e_1^1-x_1^1k_3e_3^2)(k_4e_4^1-k_2e_2^1)-k_2k_4(e_2^2e_4^1-$$

$$-e_2^1e_4^2)(x_3^1-x_1^1)-(x_4^1k_2e_2^2+x_2^2k_4e_4^1-x_4^2k_2e_2^1-$$

$$-x_2^1k_4e_4^2)(k_3e_3^1-e_1^1),\quad \mathcal{F}_2=(x_3^1e_1^2+x_1^2k_3e_3^1-$$

$$-x_3^2e_1^1-x_1^1k_3e_3^2)(k_4e_4^2-k_2e_2^2)+k_3(e_1^2e_3^1-$$

$$-e_1^1e_3^2)(x_4^2-x_2^2)-(x_4^1k_2e_2^2+x_2^2k_4e_4^1-$$

$$-x_4^2k_2e_2^1-x_2^1k_4e_4^2)(k_3e_3^2-e_1^2)-$$

$$-k_2k_4(e_2^2e_4^1-e_2^1e_4^2)(x_3^2-x_1^2),$$

$$\mathcal{G}_1=k_3(e_1^2e_3^1-e_1^1e_3^2)(k_4e_4^1-k_2e_2^1)-$$

$$-k_2k_4(e_2^2e_4^1-e_2^1e_4^2)(k_3e_3^1-e_1^1),$$

$$\mathcal{G}_2=k_3(e_1^2e_3^1-e_1^1e_3^2)(k_4e_4^2-k_2e_2^2)-$$

$$-k_2k_4(e_2^2e_4^1-e_2^1e_4^2)(k_3e_3^2-e_1^2),$$

причому x_m^i - координати точки A_m, а e_m^i - координати вектора $\bar{e}_m$ відносно прямокутної декартової системи координат x^1, x^2, яка вибрана так, що рівняння параболи у цій системі координат має вигляд $(x^2)^2=2px^1$.

З умов /1/ випливають такі твердження.

1. Якщо точка A_1 сумішається з точкою A_3, а точка A_2 з точкою A_4, то крива Γ не належить параболі.

Д о в е д е н н я . Нехай крива Γ належить параболі. Тоді з перших двох рівностей системи /1/ матимемо

$$k_3(e_1^2e_3^1-e_1^1e_3^2)(k_4e_4^2-k_2e_2^2)-k_2k_4(e_2^2e_4^1-e_2^1e_4^2)(k_3e_3^2-e_1^2)=0,$$

$$k_3(e_1^2e_3^1-e_1^1e_3^2)(k_4e_4^1-k_2e_2^1)-k_2k_4(e_2^2e_4^1-e_2^1e_4^2)(k_3e_3^1-e_1^1)=0$$

або

$$k_3(e_1^2e_3^1-e_1^1e_3^2)(k_4e_4^2-k_2e_2^2)-k_2k_4(e_2^2e_4^1-$$

$$-e_2^1 e_4^2)(k_3 e_3^2 - e_1^2) = 0, \quad (k_4 e_4^2 - k_2 e_2^2)(k_3 e_3^1 - e_1^1) -$$

$$-(k_3 e_3^2 - e_1^2)(k_4 e_4^1 - k_2 e_2^1) = 0.$$

Згідно з умовами твердження $e_1^2 e_3^1 - e_1^1 e_3^2 \neq 0, e_2^2 e_4^1 - e_2^1 e_4^2 \neq 0$. Тому в першому випадку приходимо до висновку, що вектори $k_3\bar{e}_3 - \bar{e}_1$, $k_4\bar{e}_4 - k_2\bar{e}_2$ колінеарні. Очевидно, це буде і в другому випадку. Отже, в обох випадках для будь-яких значонь λ вектори $\overline{AD} = \lambda(k_3\bar{e}_3 - \bar{e}_1)$, $\overline{BC} = \lambda(k_4\bar{e}_4 - k_2\bar{e}_2)$ колінеарні. Це неможливо, так як прямі AD, BC перетинаються.

Суперечність доводить наше твердження.

2. Якщо $k_3 = k_4$, $k_2 = 1$, а напрямні 7, 8 паралельні напрямній 5, що збігається з напрямною 6, то крива Γ не належить параболі.

Д о в е д е н н я . Нехай крива Γ належить параболі. Тоді згідно з умовами твердження з третьої рівності системи /1/ матимемо $e_1^2 = 0$ або $(x_4^2 - x_3^2)e_1^1 + (x_3^1 - x_4^1)e_1^2 = 0$ і тільки ці випадки.

У першому випадку з п"ятої рівності системи /1/ випливає, що $x_3^2 = x_4^2$. Тому шоста рівність системи /1/ зважаючи на сьому рівність цієї системи набуває вигляду $x_4^1 - x_3^1 = k_3(x_2^1 - x_1^1)$. А це означає, що механізм відтворює одну й тільки одну точку.

У другому випадку четверта рівність системи /1/ матиме вигляд $x_4^1 - x_3^1 = k_3(x_2^1 - x_1^1)$. Отже, знову механізм відтворює всього лиш одну точку.

Таким чином, кожен з можливих випадків приводить до суперечності, що і доводить наше твердження.

3. Нехай $k_2 = 1$, $k_3 = k_4$. Нехай напрямна 5, якій паралельні напрямні 6, 7, 8 збігається з віссю параболи $(x^2)^2 = 2px^1$, а

точки A_1, A_2, A_3, A_4 – на дотичній до цієї параболи в її вершині. Крива збігатиметься з вказаною параболою тоді й тільки тоді, коли $x_3^1 = -\frac{(k-1)(x_2^2)^2}{2p}$, $x_3^2 = (k-1)x_2^2$, $x_4^2 = kx_2^2$.

Д о в е д е н н я . Зважаючи на умови твердження, перша, друга, третя і сьома рівності системи /1/ є тотожності.

З шостої та п"ятої рівностей системи /1/ маємо відповідно $x_4^2 = kx_2^2$, $x_3^2 = (k-1)x_2^2$. Враховуючи це з четвертої рівності системи /1/ знаходимо $x_3^1 = -\frac{(k-1)(x_2^2)^2}{2p}$.

Твердження доведено.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. А р т о б о л е в с к и й И.И. Теория механизмов. М., "Наука", 1967.

УДК 517.946

Л.С.ПАРАСЮК, Є.М.ПАРАСЮК

ОДНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЗМІШАНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

Розглядаємо еліптичне диференціальне рівняння другого порядку з виродженням в циліндричних координатах (r, z) з деяким параметром, μ $(0<\mu<1)$ вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad /1/$$

при крайових умовах на площині виродження $z = 0$

$$\lim_{z \to 0} u(r,z) = 0, \qquad r > a, \qquad /2/$$

$$\lim_{z \to 0} z^{\mu}\frac{\partial u}{\partial z} = -f(r) \qquad r < a. \qquad /3/$$