точки A_1, A_2, A_3, A_4 – на дотичній до цієї параболи в її вершині. Крива збігатиметься з вказаною параболою тоді й тільки тоді, коли $x_3^1 = -\frac{(k-1)(x_2^2)^2}{2p}$, $x_3^2 = (k-1)x_2^2$, $x_4^2 = kx_2^2$.

Доведення. Зважаючи на умови твердження, перша, друга, третя і сьома рівності системи /1/ є тотожності.

З шостої та п"ятої рівностей системи /1/ маємо відповідно $x_4^2 = kx_2^2$, $x_3^2 = (k-1)x_2^2$. Враховуючи це з четвертої рівності системи /1/ знаходимо $x_3^1 = -\frac{(k-1)(x_2^2)^2}{2p}$.

Твердження доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов. М., "Наука", 1967.

УДК 517.946

Л.С.ПАРАСЮК, Є.М.ПАРАСЮК

ОДНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ЗМІШАНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

Розглядаємо еліптичне диференціальне рівняння другого порядку з виродженням в циліндричних координатах (r, z) з деяким параметром μ $(0<\mu<1)$ вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad /1/$$

при крайових умовах на площині виродження $z=0$

$$\lim_{z\to 0} u(r,z) = 0, \qquad r>a, \qquad /2/$$

$$\lim_{z\to 0} z^{\mu}\frac{\partial u}{\partial z} = -f(r) \qquad r<a. \qquad /3/$$

Покажемо, що аналогічно як в [3] задача /1/, /2/, /3/ за допомогою перетворення Ханкеля зводиться до розв"язування парних інтегральних рівнянь.

Позначимо через

$$\bar{U}(\lambda,z)=\int_0^\infty r\,U(r,z)\,J_0(\lambda r)\,dr$$

трансформанту Ханкеля нульового порядку шуканого розв"язку задачі /1/, /2/, /3/. Тоді функція $\bar{U}(\lambda,z)$ повинна бути розв"язком рівняння

$$z\frac{d^2\bar{U}}{dz^2}+\mu\frac{d\bar{U}}{dz}-\lambda^2\bar{U}=0. \qquad /4/$$

Необхідний розв"язок рівняння /4/ можна зобразити у вигляді

$$\bar{U}(\lambda z)=C(\lambda)\,z^{\nu/2}K_\nu(2\lambda\sqrt{z}),$$

де $K_\nu(2\lambda\sqrt{z})$ – модифікована циліндрична функція або так звана функція Макдональда порядку $\nu=1-\mu$; $C(\lambda)$ – довільна стала, яка визначається за допомогою крайових умов /2/, /3/.

На основі оберненого перетворення Ханкеля розв"язок задачі /1/, /2/, /3/ можна записати у вигляді

$$U(r,z)=\int_0^\infty \lambda\,C(\lambda)\,z^{\frac{1-\mu}{2}}K_{1-\mu}(2\lambda\sqrt{z})\,J_0(\lambda r)\,d\lambda. \qquad /5/$$

При цьому матимемо

$$z^\mu\frac{\partial U}{\partial z}=-\int_0^\infty \lambda^2 C(\lambda)\,z^{\mu/2}K_\mu(2\lambda\sqrt{z})\,J_0(\lambda r)\,d\lambda. \qquad /6/$$

Використовуючи /5/, /6/, а також відому асимптотику функції $K_\nu(x)$

$$K_\nu(x)\approx\frac{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)}{x^\nu}, \qquad \nu>0,\ x\to 0 \qquad /7/$$

для визначення $C(\lambda)$ із умов /2/, /3/ одержуємо такі парні інтегральні рівняння:

$$\int_0^\infty u^\alpha A(u) J_0(u\rho)\,du = 0, \quad \rho > 1, \qquad /8/$$

$$\int_0^\infty u^\beta A(u) J_0(u\rho)\,du = g(\rho), \quad 0<\rho<1, \qquad /9/$$

де $A(u) = uC\left(\frac{u}{a}\right)$, $\rho = \frac{r}{a}$, $g(\rho) = \frac{2a^{3-\nu} f(r)}{\Gamma(\mu)}$, $\alpha = \mu - 1;\ \beta = 1-\mu.$

Розв"язавши рівняння /8/, /9/, одержимо значення $C(\lambda)$ у вигляді

$$C(\lambda) = \frac{2^{\mu+1} a^{3-\mu}}{\Gamma(1-\mu)\,\Gamma(\mu)} \int_0^1 \eta^{2-\mu} J_{1-\mu}(a\lambda\eta)\,d\eta \int_0^1 f(at\eta) \frac{t\,dt}{(1-t^2)^\mu} . \qquad /10/$$

У випадку, якщо $f(r) = C$, де $C = const$, стала $C(\lambda)$ знаходиться в явному вигляді

$$C(\lambda) = \frac{2^\mu a^{2-\mu} C}{\Gamma(2-\mu)\,\Gamma(\mu)\,\lambda} J_{2-\mu}(a\lambda), \qquad /11/$$

де $J_{(2-\mu)}(a\lambda)$ – функція Бесселя 1-го роду.

Підставивши /11/ в /5/, одержуємо розв"язок задачі /1/, /2/, /3/ в даному частинному випадку у вигляді

$$U(r,z) = \frac{2^\mu a^{2-\mu} z^{\frac{1-\mu}{2}} C}{\Gamma(2-\mu)\ \Gamma(\mu)} \int_0^\infty K_{1-\mu}(2\lambda\sqrt{z}) J_{2-\mu}(a\lambda) J_0(\lambda r)\,d\lambda. \qquad /12/$$

Як і в загальному випадку легко показати, що функція /12/ задовольняє рівняння /1/ і крайові умови /2/, /3/ при $f(r) \equiv C$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кратцер А., Френц В. Трансцендентные функции. М., ИЛ, 1963.
2. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложение, М-Л., Физматгиз, 1963.
3. Парасюк Л.С. Об одной граничной задаче для кругового отверстия, дифференциальное уравнение которой вырождается на границе области $Z = 0$. - "Математическая физика", вып. 13, 1973.
4. Парасюк Л.С. О некоторых краевых задачах в полуплоскости для вырождающихся эллиптических уравнений с параметром. - "Математическая физика", вып. 18, 1975.
5. Снеддон И. Преобразование Фурье. М. ИЛ, 1955.

УДК 517.917

Б.В.КОВАЛЬЧУК, Л.М.ЛІСЕВИЧ

ТЕОРЕМИ ЄДИНОСТІ Й АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ S^p - МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

1. Поняття згортки і рівність Парсеваля для S^2 - майже періодичних матриць.

Відомо [1], якщо $f(x) \in S^2$ - майже періодична функція, то рівномірно по $x \in (-\infty, +\infty)$ існує функція

$$\varphi(x) = M_t\left\{f(x+t)\overline{f(t)}\right\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x+t)\overline{f(t)}\,dt,$$

яка називається згорткою функції $f(x)$.

Означення. Згорткою S^2 - майже періодичної матриці $F(x) = [f_{jk}(x)]$ назвемо матрицю

$$\Phi(x) = [\varphi_{jk}(x)] = \left[M_t\left\{f_{jk}(x+t)\overline{f_{jk}(t)}\right\}\right]. \qquad /1.1/$$

Теорема 1.1. Для всякої S^2 - майже періодичної матриці $F(x) = [f_{jk}(x)]$ її згортка $\Phi(x) = [\varphi_{jk}(x)]$ є майже періодичною матрицею Бора, причому

$$M\{\Phi(x)\} = \left[\left|M\{f_{jk}(x)\}\right|^2\right]. \qquad /1.2/$$