ЛІТЕРАТУРА

1. Кратцер А., Френц В. Трансцендентные функции. М., ИЛ, 1963.
2. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложение. М-Л., Физматгиз, 1963.
3. Парасюк Л.С. Об одной граничной задаче для кругового отверстия, дифференциальное уравнение которой вырождается на границе области $z = 0$. - "Математическая физика", вып. 13, 1973.
4. Парасюк Л.С. О некоторых краевых задачах в полуплоскости для вырождающихся эллиптических уравнений с параметром. - "Математическая физика", вып. 18, 1975.
5. Снеддон И. Преобразование Фурье. М. ИЛ, 1955.

УДК 517.917

Б.В.КОВАЛЬЧУК, Л.М.ЛІСЕВИЧ

ТЕОРЕМИ ЄДИНОСТІ Й АПРОКСИМАЦІЇ ДЛЯ S^p - МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ МАТРИЦЬ

1. Поняття згортки і рівність Парсеваля для S^2 - майже періодичних матриць.

Відомо [1], якщо $f(x) \in S^2$ - майже періодична функція, то рівномірно по $x \in (-\infty, +\infty)$ існує функція

$$\varphi(x) = M_t\left\{f(x+t)\overline{f(t)}\right\} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x+t)\overline{f(t)}\,dt,$$

яка називається згорткою функції $f(x)$.

Означення. Згорткою S^2 - майже періодичної матриці $F(x) = [f_{jk}(x)]$ назвемо матрицю

$$\Phi(x) = [\varphi_{jk}(x)] = \left[M_t\left\{f_{jk}(x+t)\overline{f_{jk}(t)}\right\}\right]. \qquad /1.1/$$

Теорема 1.1. Для всякої S^2 - майже періодичної матриці $F(x) = [f_{jk}(x)]$ її згортка $\Phi(x) = [\varphi_{jk}(x)]$ є майже періодичною матрицею Бора, причому

$$M\{\Phi(x)\} = \left[|M\{f_{jk}(x)\}|^2\right]. \qquad /1.2/$$

Д о в е д е н н я . Те, що згортка /1.1/ є майже періодичною матрицею Бора, випливає з того, що всі функції

$$\varphi_{jk}(x) = M_t\left\{f_{jk}(x+t)\,\overline{f_{jk}(t)}\right\}$$

є майже періодичними функціями Бора [1] .
Далі, тому що функції $\varphi_{jk}(x)$ існують рівномірно відносно x , то можлива перестановка їх середніх значень по x і по t . А тому на основі властивостей середнього значення одержимо

$$M_x\{\Phi(x)\} = \left[M_x\{\varphi_{jk}(x)\}\right] = \left[M_x\left\{M_t\left\{f_{jk}(x+t)\overline{f_{jk}(t)}\right\}\right\}\right] =$$

$$= \left[M_t\left\{\overline{f_{jk}(t)}\cdot M_x\left\{f_{jk}(x+t)\right\}\right\}\right] = \left[M_t\left\{\overline{f_{jk}(t)}\,M_x\left\{f_{jk}(x)\right\}\right\}\right] =$$

$$= \left[M_x\left\{f_{jk}(x)\right\}\cdot\overline{M_t\left\{f_{jk}(t)\right\}}\right] = \left[\left|M_x\left\{f_{jk}(x)\right\}\right|^2\right].$$

Н а с л і д о к. Якщо $A(\lambda) = [a_{jk}(\lambda)]$ є матричні коефіцієнти Фур"є S^2 - майже періодичної матриці $F(x)$, то для її згортки $\Phi(x)$ матричні коефіцієнти Фур"є мають вигляд $A^*(\lambda) = [|a_{jk}(\lambda)|^2]$.

Т е о р е м а 1.2. Для будь-якої S^2 - майже періодичної матриці $F(x) = [f_{jk}(x)]$ з рядом Фур"є

$$F(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}$$

наявна рівність Парсеваля

$$\sum_n \|A_n\|^2 = \|F\|^2. \qquad /1.3/$$

Д о в е д е н н я . Тому що ряд із квадратів норм матриннх коефіцієнтів Фур"є $A_n = [a_{jk}(\lambda_n)]$ збіжний [2] і для кожної S^2 - майже періодичної функції $f_{jk}(x)$ наявна рівність Парсеваля

$$\sum_n |a_{jk}(\lambda_n)|^2 = \|f_{jk}\|^2,$$

то

$$\sum_n \|A_n\|^2 = \sum_n \Big(\sum_{j,k} |a_{jk}(\lambda_n)|^2\Big) =$$

$$= \sum_{j,k} \Big(\sum_n |a_{jk}(\lambda_n)|^2\Big) = \sum_{j,k} \|f_{jk}\|^2 = \|F\|^2.$$

2. Теорема єдиності для S^p - майже періодичних матриць.

Т е о р е м а 2.1. Якщо для S^p - майже періодичної матриці $F(x)=[f_{jk}(x)]$ її матричні коефіцієнти Фур"є $A(\lambda)=[a_{jk}(\lambda)]$ дорівнюють нулю, то така матриця дорівнює нулю майже всюди.

Д о в е д е н н я . Матричні коефіцієнти Фур"є S^p - майже періодичної матриці $F(x)$ мають вигляд

$$A(\lambda) = M\{F(x)e^{-i\lambda x}\} = [M\{f_{jk}(x)e^{-i\lambda x}\}].$$

З умови $A(\lambda)=0$ випливає

$$a_{jk}(\lambda) = M\{f_{jk}(x)e^{-i\lambda x}\} = 0 \quad (-\infty<\lambda<+\infty).$$

Тоді на основі теореми єдиності для S^p - майже періодичних функцій [3] одержимо, що $f_{jk}(x)=0$ майже всюди для всіх j, k.

А це означає, що $F(x)=0$ майже всюди.

Н а с л і д о к . Якщо дві S^p - майже періодичні матриці $F_1(x)$ і $F_2(x)$ мають однакові ряди Фур"є, то вони співпадають майже всюди.

Т е о р е м а 2.2. Якщо для S^p - майже періодичної матриці $F(x)$ її ряд Фур"є

$$F(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x} \qquad /2.1/$$

збігається рівномірно за S^p - нормою, то його сума дорівнює матриці $F(x)$ майже всюди, тобто

$$F(x)=\sum_n A_n e^{i\lambda_n x}. \qquad /2.2/$$

Д о в е д е н н я . Рівномірно збіжний за S^p - нормою тригонометричний ряд /2.1/ є рядом Фур"є своєї суми

$$S(x)=\sum_n A_n e^{i\lambda_n x},$$

причому $S(x)$ є S^p - майже періодичною матрицею [2] . Таким чином, дві S^p - майже періодичні матриці $F(x)$ і $S(x)$ мають однакові ряди Фур"є. А тому на основі теореми єдиності вони співпадають майже всюди. Отже, рівність /2.2/ справедлива.

Н а с л і д о к . Якщо матричні коефіцієнти ряду Фур"є /2.1/ задовольняють умову

$$\sum_n \| A_n \|_{S^p} < \infty, \qquad /2.3/$$

то наявна рівність /2.2/.

3. Теорема апроксимації для S^p - майже періодичних матриць.

Т е о р е м а 3.1. Якщо $F(x)$ є S^p - майже періодична матриця, то для кожного $\varepsilon>0$ можна вказати скінчений тригонометричний многочлен $P_\varepsilon(x)=\sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} C_n e^{i\lambda_n x}$, де $C_n=[C_{jk}^{(n)}]$, що виконується нерівність

$$\| F(x)-P_\varepsilon(x)\|_{S^p}<\varepsilon. \qquad /3.1/$$

Д о в е д е н н я . Нехай $F(x)=[f_{jk}(x)]$ і $P_\varepsilon(x)=[P_{jk}^\varepsilon(x)]$, де $P_{jk}^\varepsilon(x)=\sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} C_{jk}^{(n)} e^{i\lambda_n x}$, є матрицями виміру $r\times\ell$. Відомо [1], що за заданим $\varepsilon>0$ для сукупності S^p - майже періодичних функцій $f_{jk}(x)$ з відносно щільною множиною $\frac{\varepsilon}{r\ell}$, S^p - майже періодів можна вказати такий скінченний тригонометричний многочлен $P_{jk}^\varepsilon(x)$, що

$$\|f_{jk}(x)-P^{\varepsilon}_{jk}(x)\|_{S^p} < \frac{\varepsilon}{\tau l}$$

для всіх j, k.

А тому

$$\|F(x)-P_{\varepsilon}(x)\|_{S^p} \leq \sum_{j,k} \|f_{jk}(x)-P^{\varepsilon}_{jk}(x)\|_{S^p} < \varepsilon.$$

Нерівність /3.1/ виконана.

З а у в а ж е н н я . Апроксимуючий многочлен $P_{\varepsilon}(x)$, взагалі кажучи, може містити показники, відмінні від показників Фур"є матриці $F(x)$. Однак, як випливає з [1] , за λ_n можна брати показники Фур"є матриці $F(x)$.

Т е о р е м а 3.2. Якщо $F(x)=[f_{jk}(x)]$ є S^p - майже періодична матриця, то існує послідовність узагальнених тригонометричних многочленів Бохнера-Фейєра $\sigma^F_{B_n}(x)=[\sigma^{f_{jk}}_{B_n}(x)]$, де $\sigma^{f_{jk}}_{B_n}(x)$ послідовність тригонометричних многочленів Бохнера-Фейєра для кожної функції $f_{jk}(x)$, що

$$\lim_{n\to\infty} \|F(x)-\sigma^F_{B_n}(x)\|_{S^p} = 0. \qquad /3.2/$$

Це твердження доводиться також на основі аналогічної теореми для S^p - майже періодичної функції [1] .

ЛІТЕРАТУРА

1. Л е в и т а н Б.М. Почти периодические функции. М., ГИТТЛ, 1953.

2. Л і с е в и ч Л.М., К о в а л ь ч у к Б.В. Середнє значення і поняття ряду Фур"є для S^p - майже періодичних матриць. - "Вісник Львівського ун-ту, серія механіко-математична", вип.10. Теоретична та прикладна математика, 1975.

3. A. Besicovitch. Almost periodic functions Cambridge, 1932.