УДК 517.913

К.С.КОСТЕНКО

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА РОЗВ"ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Для рівняння

$$y^{(IV)} + P_1(x)y'' + (P_2(x) + \tau(x))y' + P_3(x)y = 0 \qquad /1/$$

наявна така теорема.

Т е о р е м а . Нехай у рівнянні /1/ $P_3(x)$ неперервна, а $\tau(x)$, $P_1(x)$ і $P_2(x) = \lambda q^{-3}(x) \neq 0$ неперервно диференційовні функції відповідно один, два і три рази на інтервалі $x_0 \leq x < \infty$. Нехай також

$$A(x) = q^{-2}(x)\left(\mu - 5q''(x)\,q(x) + \frac{5}{2}q'^2(x)\right), \quad B(x) = \lambda q^{-3}(x) + A'(x),$$

$$C(x) = \left(\nu - \frac{3}{2}\lambda q'(x)\right)q^{-4}(x) + 0{,}3A''(x) + (0{,}3A(x))^2,$$

$\pm\beta_1$ – дійсні корені рівняння $\beta^6 + 2\mu\beta^4 + (\mu^2 - 4\nu)\beta^2 - \lambda^2 = 0$, де μ, λ, ν – довільні сталі, причому $-\alpha_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^2}{2} + \mu + \frac{\lambda}{\beta_1}\right) < 0$, $\alpha_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1^2}{2} + \mu - \frac{\lambda}{\beta_1}\right) > 0$.

Тоді за умови

$$q(x) > 0, \lim_{x\to\infty}\varphi(x, x_0) = \lim_{x\to\infty}\int_{x_0}^{x} q^{-1}(t)\,dt = \infty, \int_{x_0}^{\infty} b(t)\,dt < \infty, \lim_{x\to\infty}\Phi_i(x)q^2(x) = 0 \ (i = 2,3,4)$$

або $$q(x) < 0, \lim_{x\to\infty}\varphi(x, x_0) = -\infty, \int_{x_0}^{\infty} b(t)\,dt < 0, \lim_{x\to\infty}\Phi_i(x)q^2(x) = 0 \quad (i = 1,2),$$

$$\Phi_1(x, a_1, a_2) = \Phi_2(x, -a_1, -a_2) = -a_2\left[(\beta_1 - a_1)^2 + a_2^2\right]\Big[\Big(\frac{3}{2}q''q + \frac{3}{4}q'^2 - (\beta_1 + 2a_1)q' + \left(\frac{\beta_1}{2} + \alpha_1\right)^2\Big)(A(x) - P_1(x)) + q(3q' - \beta_1 - 2a_1)\left(\frac{A'(x) + \tau(x)}{2} - P_1'(x)\right) + q^2(C(x) + \tau'(x) - P_3(x) - P_1''(x))\Big]W^{-1};$$

$$\Phi_3(x) = -2a_1\Big\{\Big[\frac{3}{2}\left(\beta_1^2 + \frac{\lambda}{\beta_1}\right)\left(q''q + \frac{1}{2}q'^2\right) + \beta_1\left(2\beta_1^2 + 2\mu - \frac{\lambda}{\beta_1}\right)q' + \frac{1}{2}\left(\beta_1^4 + \mu\beta_1^2 - \lambda\beta_1 - \frac{\lambda\mu}{\beta_1} + \frac{\lambda^2}{\beta_1^2}\right)\Big](A(x) - f_1(x)) + q\Big[3\left(\beta_1^2 + \frac{\lambda}{\beta_1}\right)q' + \beta_1\left(2\beta_1^2 + 2\mu - \frac{\lambda}{\beta_1}\right)\Big]\left(\frac{A'(x) + \tau(x)}{2} - P_1'(x)\right) + \left(\beta_1^2 + \frac{\lambda}{\beta_1}\right)q^2\left(C(x) + \tau'(x) - P_3(x) - P_1''(x)\right)\Big\}W^{-1}; \quad \Phi_4(x) = -2a_1a_2\Big\{\Big[3\beta_1\left(q''q + \frac{1}{2}q'^2\right) - \frac{2\lambda}{\beta_1}q' - \beta_1(\beta_1^2 + \mu)\Big](A(x) - P_1(x)) + 2q\left(3\beta_1 q' - \frac{\lambda}{\beta_1}\right)\left(\frac{A'(x) + \tau(x)}{2} - P_1'(x)\right) + 2\beta_1 q^2\left(C(x) + \tau'(x) - P_3(x) - P_1''(x)\right)\Big\}W^{-1};$$

$$b(x) = 4/\xi(x)| \max_x [|\Phi_1(x)|, |\Phi_2(x)|, |\Phi_3(x)|, |\Phi_4(x)|], \; W = 2\alpha_1\alpha_2 \left(2\beta_1^4 + 2\mu\beta_1^2 + \frac{\lambda^2}{\beta_1^2}\right),$$

рівняння /1/ має фундаментальну систему розв"язків, асимптотичне зображення яких за $x \to \infty$ дають формули

$$y_1(x, x_0) = \xi^{\frac{3}{2}}(x) \exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2} + \alpha_1\right) \varphi(x, x_0)\right] (1 + o(1)), \quad x \to \infty; \qquad /2/$$

$$y_2(x, x_0) = \xi^{\frac{3}{2}}(x) \exp\left[\left(\frac{\beta_1}{2} - \alpha_1\right) \varphi(x, x_0)\right] (1 + o(1)), \quad x \to \infty; \qquad /3/$$

$$y_3(x, x_0) = \xi^{\frac{3}{2}}(x) \exp\left[-\frac{\beta_1}{2} \varphi(x, x_0)\right] (\cos\alpha_2 \varphi(x, x_0) + o(1)), \quad x \to \infty; \qquad /4/$$

$$y_4(x, x_0) = \xi^{\frac{3}{2}}(x) \exp\left[-\frac{\beta_1}{2} \varphi(x, x_0)\right] (\sin\alpha_2 \varphi(x, x_0) + o(1)), \quad x \to \infty. \qquad /5/$$

За тих же умов головні частини асимптотичних формул для перших похідних цієї фундаментальної системи розв"язків одержуються формальними диференціюваннями головних частин формул /2/ - /5/.

Те ж саме наявне для похідних другого і третього порядку цих розв"язків за додаткових умов

$$\lim_{x \to \infty} (A(x) - P_1(x)) \xi^2(x) = 0$$

і

$$\lim_{x \to \infty} (P_1'(x) - r(x)) \xi^3(x) = 0.$$

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. К о с т е н к о Е.С. Интегрирование в замкнутой форме и асимптотическое поведение решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. - "Дифференциальные уравнения", 1974, т.10, № 10.

2. П а в л ю к І.А. Асимптотичні властивості розв"язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. Вид-во Київ. ун-ту, 1970.