ЛІТЕРАТУРА

1. Громов В.П. Кратные ряды полиномов Дирихле. - "Сибирский математический журнал", 1969, X, № 3.

2. Костовский А.Н., Цегелик Г.Г. О локализации решений системы двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными с помощью параметров. - "Вычислительная и прикладная математика", 1969, вып.7.

3. Цегелик Г.Г. Виділення смуг, в яких поліноми і ряди Діріхле не перетворюються в нуль. - "Вісник Львівського ун-ту, сер. механіко-математична", 1972, вип. 7.

4. Чулык И.И. Асимтотические свойства мажоранты и диаграммы Ньютона функций двух комплексных переменных и их приложения. Автореф. канд. дисс. Львов, 1972.

5. Artemiades Nicolas. Sur les séries de Dirichlet a deux variables. - "Bull. sci. math.", 1953, 77, mars-avril.

УДК 519.21

І.Д.КВІТ

## ПРИСКОРЕНА ЗМІНА ВІДБИТТЯ

1. Відбиття додатнозначної випадкової змінної. Нехай додатнозначна випадкова змінна $\xi$ має функцію розподілу

$$\mathcal{F}(t),\ t>0;\quad \mathcal{F}(0)=0;\quad \int_0^\infty d\mathcal{F}(t)=1. \qquad /1/$$

З обмеженості інтеграла /1/ випливає існування таких додатних сталих $\alpha$ та $\beta$, що меллінове інтегральне перетворення

$$\varphi(z)=\int_0^\infty t^{z-1}d\mathcal{F}(t),\ (z=x+iy,\ i=\sqrt{-1}), \qquad /2/$$

абсолютно збігається в смузі

$$1-\alpha<x<1+\beta,\quad (\alpha>0,\ \beta>0), \qquad /3/$$

паралельній до осі ординат. Перетворення /2/ назвемо відбитт я м додатнозначної випадкової змінної $\xi$ з функцією розподілу /1/. Відбиття /2/ є аналітичною функцією принаймні в смузі /3/. Наведемо декілька прикладів додатнозначних випадкових змінних та їх відбить:

| Додатнозначна випадкова змінна, $\xi$ | Функція розподілу, $F(t)$ | Відбиття, $\varphi(z)$ |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| Мономна | $\begin{cases} 0, & t<0, \\ t^{\alpha}, & 0\le t<1,\ \alpha>0, \\ 1, & t\ge 1 \end{cases}$ | $\dfrac{\alpha}{z+\alpha-1},\ 1-\alpha<\operatorname{Re} z$ /4/ |
| Модуль змінної Коші | $\begin{cases} 0, & t<0, \\ \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} t, & t\ge 0 \end{cases}$ | $\dfrac{1}{\sin\frac{\pi z}{2}},\ 0<\operatorname{Re} z<2$ /5/ |
| Експонентна | $\begin{cases} 0, & t<0, \\ 1-e^{-t}, & t\ge 0 \end{cases}$ | $\Gamma(z),\ 0<\operatorname{Re} z$ /6/ |
| Бета-один-/1, $\alpha$/ | $\begin{cases} 0, & t<0, \\ 1-(1-t)^{\alpha}, & 0\le t<1,\ \alpha>0, \\ 1, & t\ge 1 \end{cases}$ | $\alpha B(z,\alpha),\ 0<\operatorname{Re} z$ /7/ |
| Дискретний фактор бозонів | $\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1-\sum\limits_{j=1}^{k}\frac{1}{j^{\alpha+1}\zeta(\alpha+1)},\ \alpha>0, & \frac{1}{k+1}\le t<\frac{1}{k},\ (k=1,2,\ldots), \\ 1, & t\ge 1 \end{cases}$ | $\dfrac{\zeta(z+\alpha)}{\zeta(\alpha+1)},\ 1-\alpha<\operatorname{Re} z$ /8/ |

2. П р и с к о р е н о з м і н н і ф у н к ц і ї . Нехай функція $f(x)$ буде задана та неперервна на інтервалі $(a, b)$. Для кожних двох точок $x_1, x_2$ цього інтервалу $a<x_1<x_2<b$ знайдемо добуток значень функції у цих точках $f(x_1)\,f(x_2)$ та квадрат функції в середньому з цих точок $f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$. Будемо вважати, що функція $f(x)$ п р и с к о р е н о з м і н ю є т ь с я на

$(a, b)$ , якщо виконується функціональна нерівність

$$f^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < f(x_1) f(x_2), \quad a < x_1 < x_2 < b. \qquad /9/$$

Коли заходить протилежна нерівність, то $f(x)$ с п о в і л ь н е н о з м і н ю є т ь с я ; при знакові рівності $f(x)$ р і в н о м і р н о з м і н ю є т ь с я . Наприклад, функція $f(x) = x^{-\alpha}$, $(\alpha > 0)$ , прискорено змінюється на додатній півосі $x > 0$ ; функція $f(x) = a^x$ , $(a > 0)$ рівномірно змінюється на всій осі $-\infty < x < \infty$ ; функція $f(x) = x^{\alpha}$, $(\alpha > 0)$ сповільнено змінюється на додатній півосі $x > 0$ .

З означення /9/ випливають настуині властивості:

1. Сума та добуток прискорено змінних функцій є прискорено змінна функція.

2. Прискорено змінна в деякому інтервалі функція після лінійного перетворення її аргументу залишається прискорено змінною у відповідному інтервалі.

3. Т е о р е м а . Для того щоб неперервна в смузі $1-\alpha < x < 1+\beta$ , $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$ функція $\varphi(z)$ комплексної змінної $z = x + iy$ , для якої $\varphi(1) = 1$ , була відбиттям додатнозначної випадкової змінної $\xi$ , необхідно та досить, щоб $\varphi(x)$ прискорено змінювалася на інтервалі $(1-\alpha,\ 1+\beta)$.

Н е о б х і д н і с т ь . Нехай додатнозначна випадкова змінна $\xi$ має функцію розподілу /1/ та відбиття /2/ в смузі /3/. Очевидно, що відбиття /2/ в смузі /3/ є неперервна функція та при $z = 1$ приймає значення $1, \varphi(1) = 1$ . Покажемо, що $\varphi(x)$ прискорено змінюється на інтервалі $(1-\alpha,\ 1+\beta)$ .

Справді, при довільних дійсних $u$ та $v$ , які неодночасно дорівнюють нулю, для функції розподілу /1/ маємо строгу нерівність

$$\int_0^{\infty} \left\{ u t^{\frac{x_1-1}{2}} + v t^{\frac{x_2-1}{2}} \right\}^2 dF(t) > 0, \quad 1-\alpha < x_1 < x_2 < 1+\beta. \qquad /10/$$

У термінах відбиття /2/ нерівність /10/ набуває вигляду

$$u^2\varphi(x_1)+2uv\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+v^2\varphi(x_2)>0,\quad 1-\alpha<x_1<x_2<1+\beta. \qquad /11/$$

Із додатної означеності останньої квадратичної форми випливає нерівність

$$\varphi^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\varphi(x_1)\varphi(x_2),\quad 1-\alpha<x_1<x_2<1+\beta, \qquad /12/$$

що за означенням /9/ характеризує прискорену зміну функції $\varphi(x)$ на інтервалі $(1-\alpha,\ 1+\beta)$.

Достатність. Нехай неперервна в смузі $1-\alpha<Re\,z<1+\beta$ функція $\varphi(z)$, для якої $\varphi(1)=1$, задовольняє функціональну нерівність /12/. Тоді $\varphi(z)$ є відбиттям деякої додатнозначної випадкової змінної $\xi$.

Дійсно, нерівності /12/ відповідає додатно означена квадратична форма /11/, де $u$ та $v$ довільні дійсні числа, які неодночасно дорівнюють нулю. Хай у квадратичній формі /11/ $u=0, v=1, x_2=x$, де $1-\alpha<x<1+\beta$. Тоді одержимо нерівність

$$\varphi(x)>0.$$

Отже, функція $\varphi(x)$ неперервна та додатна на інтервалі $1-\alpha<x<1+\beta$. Можемо вважати, що $\varphi(x)$ представляє момент маси порядку $x-1$ при кожному $x$ з інтервалу $(1-\alpha,\ 1+\beta)$. Такий момент можна зобразити за допомогою інтеграла Стільт"єса у вигляді /порівн. [1] /

$$\varphi(x)=\int_0^\infty t^{x-1}\,d\mathcal{F}(t),$$

де $\mathcal{F}(t)$ - функція розподілу маси /неспадна функція, неперервна справа та $\mathcal{F}(0)=0$ /. Оскільки за умовою $\varphi(1)=1$, то $\int_0^\infty d\mathcal{F}(t)=1$. Таким чином, $\mathcal{F}(t)$ - функція розподілу ймовірностей деякої додатнозначної випадкової змінної $\xi$ і отже, $\varphi(z)$ її відбиття.

Доводена теорема свідчить про те, що множина відбить додатнозначних випадкових змінних еквівалентна класові функцій, що прискорено змінюються в околі одиниці та набувають значення один у точці один. Функціональна нерівність /12/ переходить для кожного відбиття /2/ у конкретну нерівність. Наприклад, відбиття /5/, /7/ і /8/ та функціональна нерівність /12/ дають змогу записати такі нерівності:

для функції синус

$$\sin\frac{\pi x_1}{2}\sin\frac{\pi x_2}{2}<\sin^2\frac{\pi(x_1+x_2)}{4},\quad 0<x_1<x_2<2\,;$$

для функції бета, як функції першого аргументу

$$B^2\left(\frac{x_1+x_2}{2},\alpha\right)<B(x_1,\alpha)B(x_2,\alpha),\quad 0<x_1<x_2\,;$$

для дзета-функції Рімана

$$\zeta^2\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\alpha\right)<\zeta(x_1+\alpha)\,\zeta(x_2+\alpha),\quad 1-\alpha<x_1<x_2.$$

Отже, всі ці функції прискорено змінюються на вказаних інтервалах.

4. Н а с л і д к и . 1/ Якщо додатнозначна випадкова змінна має початкові моменти

$$m_j=\int_0^\infty t^j\,d\mathcal{F}(t),\ (j=1,2,\dots), \tag{13}$$

то вони задовольняють нерівність

$$m_1<m_2^{\frac12}<m_3^{\frac13}<m_4^{\frac14}<\dots \tag{14}$$

Справді, хай у нерівності /12/ $x_1=j,\ x_2=j+2$. Тоді дістаємо нерівність

$$\varphi^2(j+1)<\varphi(j)\varphi(j+2).$$

Піднесемо останню нерівність до $j$-го степеня,

$$\varphi^{2j}(j+1)<\varphi^j(j)\,\varphi^j(j+2),$$

і приймемо в результаті послідовно $j=1,2,\dots j$. Перемножимо сторонами всі так одержані $j$ нерівностей. Одержимо нерівність

$$\varphi^{2j}(j+1)<\varphi^{j-1}(j+1)\varphi^j(j+2),$$

або остаточно

$$\varphi^{\frac{1}{j}}(j+1) < \varphi^{\frac{1}{j+1}}(j+2), \quad (j=1,2,\dots). \qquad /15/$$

Оскільки з порівняння /13/ і /2/ маємо

$$m_j = \varphi(j+1), \quad (j=1,2,\dots),$$

то нерівність /15/ переходить у нерівність

$$m_j^{\frac{1}{j}} < m_{j+1}^{\frac{1}{j+1}}, \quad (j=1,2,\dots), \qquad /16/$$

тобто, в нерівність /14/. Наприклад, для експонентного розподілу /6/ властивість початкових моментів /16/ набуває вигляду

$$\sqrt[j]{j!} < \sqrt[j+1]{(j+1)!}, \quad (j=1,2,\dots).$$

Із прискореної зміни /12/ відбиття /2/ на інтервалі /3/ випливає логарифмічна випуклість функції $\varphi(x)$ на інтервалі /3/.

Дійсно, хай у /12/ $x_1 = x$, $x_2 = x+2\Delta$, $\Delta > 0$. Тоді одержуємо нерівність

$$\varphi^2(x+\Delta) < \varphi(x)\varphi(x+2\Delta).$$

Додамо до обидвох сторін останньої нерівності вираз

$$-2\varphi(x+\Delta)\varphi(x) + \varphi^2(x)$$

і результат поділимо на $\Delta^2$. Дістаємо нерівність

$$\left[\frac{\varphi(x+\Delta)-\varphi(x)}{\Delta}\right]^2 < \varphi(x)\frac{\varphi(x+2\Delta)-2\varphi(x+\Delta)+\varphi(x)}{\Delta^2}.$$

Звідси при $\Delta \to 0$ формально маємо нерівність

$$[\varphi'(x)]^2 \leqslant \varphi(x)\varphi''(x), \qquad /17/$$

яка разом з нерівністю $\varphi(x) > 0$ характеризує логарифмічну випуклість відбиття /2/ на інтервалі /3/. Існування похідних, що виступають у нерівності /17/, випливає з аналітичності відбиття /2/ в смузі /3/. Відбиття /6/, /7/ і /8/ та функціональна нерівність /17/ дають змогу записати відповідні нерівності для гама-, бета- і дзета- функції.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Квіт І.Д. Характеристичні функції. Вид-во Львів.ун-ту, 1972.