УДК 518;517.948

М.Я.БАРТІШ

ДЕЯКІ МЕТОДИ РОЗВ"ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо рівняння

$$P(x)=0, \qquad /1/$$

де P – оператор, що діє з банахового простору X в простір Y того ж типу. Для розв"язування рівняння /1/ розглянемо однокроковий метод, коли послідовність $\{x_n\}$ визначена за формулою

$$x_{n+1}=x_n-Q(x_n), \qquad n=0,1,2,\dots, \qquad /2/$$

де $Q(x)$ – деякий оператор, що діє з X в X.

Т е о р е м а 1. Нехай $x_0\in X$, $S=\{x: \|x-x_0\|\le\rho\}$ і на S виконуються умови

1. Оператор $P(x)$ диференційовний по Фреше;
2. Похідна $P'(x)$ задовольняє умову Гельдера
$$\|P'(x)-P'(y)\|\le L\|x-y\|^{\alpha}, \quad \alpha\le 1;$$
3. $\|P(x)-P'(x)Q(x)\|\le\gamma\|P(x)\|, \quad \gamma<1;$
4. $\|Q(x)\|\le\lambda\|P(x)\|;$
5. $\gamma+\frac{L\lambda^2}{1+\alpha}\|P(x_0)\|^{\alpha}<1.$

Тоді рівняння /1/ має в S $\left(\rho=\left(\sum_{i=1}^{m}\delta^{\frac{(\alpha+1)^i-1}{\alpha}}+\delta^{\frac{(1+\alpha)^m-1}{\alpha}}\frac{\delta_1}{1-\delta_1}\right)\lambda\|P(x_0)\|\right)$ розв"язок x^*, до якого збігається послідовність $\{x_n\}$, визначена за /2/, причому для $k\le m$, де m визначається в умови

$$\gamma_1\|P(x_m)\|^{\alpha}<\gamma\le\gamma_1\|P(x_{m-1})\|^{\alpha},$$

$$\|x_k-x^*\|\le\left(\sum_{i=k}^{m}\delta^{\frac{(1+\alpha)^i-1}{\alpha}}+\delta^{\frac{(1+\alpha)^m-1}{\alpha}}\frac{\delta_1}{1-\delta_1}\right)\lambda\|P(x_0)\|, \qquad /3/$$

а для $k>m$

$$\|x_k-x^*\|\le\lambda\frac{\delta_1^{k-m}}{1-\delta_1}\delta^{\frac{(1+\alpha)^m-1}{\alpha}}\|P(x_0)\|, \qquad /4/$$

де

$$\delta=\left(\gamma_1+\frac{L\lambda^2}{1+\alpha}\right)\|P(x_0)\|^{\alpha}, \qquad \delta_1=\gamma+\frac{L\lambda^2}{1+\alpha}\|P(x_m)\|^{\alpha}.$$

Д о в е д е н н я . Використавши формулу [2]

$$P(x_{n+1}) = P(x_n) + \int_0^1 P'(x_n + t(x_{n+1} - x_n))(x_{n+1} - x_n)\,dt$$

і умови теореми, одержимо

$$\|P(x_{n+1})\| \leq (\gamma + \frac{L\lambda^2}{1+\alpha}\|P(x_n)\|^{\alpha})\|P(x_n)\| \qquad /5/$$

або

$$\|P(x_{n+1})\| \leq \begin{cases} (\delta_1 + \frac{L\lambda^2}{1+\alpha})\|P(x_n)\|^{\alpha+1} & n < m, \\ (\gamma + \frac{L\lambda^2}{1+\alpha}\|P(x_n)\|^{\alpha})\|P(x_n)\| & n \geq m. \end{cases} \qquad /6/$$

З /2/, використовуючи умову 4 теореми 1 і оцінку /6/, одержуємо

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \begin{cases} \lambda\delta^{\frac{(1+\alpha)^n - 1}{\alpha}}\|P(x_0)\| & n < m, \\ \lambda\delta^{\frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha}}\delta_1^{\,n-m}\|P(x_0)\| & n \geq m, \end{cases} \qquad /7/$$

для $p > 0$, $n > m$ наявна оцінка

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leq \lambda\delta^{\frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha}}\delta_1^{\,n-m}(1 - \delta_1^{\,p}).\|P(x_0)\|.$$

Отже, послідовність $\{x_n\}$ фундаментальна, існує $x^* = \lim_{n\to\infty} x_n$, причому $P(x^*) = 0$. З /7/ можна показати справедливість оцінок /3/, /4/, а також умову, що всі $x_n \in S$ і $x^* \in S$.

Теорема доведена.

Введемо позначення $\sum_{i=n}^{\infty} \delta^{\frac{(1+\alpha)^i - 1}{\alpha}} = H_n^{\alpha}(\delta)$.

Т е о р е м а 2. Нехай $x_0 \in X$, $S = \{x : \|x - x_0\| \leq \rho\}$ і на S виконуються умови:

1. умови 1-2 теореми 1;
2. $\|P(x) - P'(x)Q(x)\| \leq \gamma\|P(x)\|^{1+\alpha}$;
3. $\|Q(x)\| \leq \lambda\|P(x)\|$;
4. $\delta = (\gamma + \frac{L\lambda^2}{1+\alpha})\|P(x_0)\|^{\alpha} < 1$.

Тоді рівняння /1/ має в S $(\rho = \lambda H_0^{\alpha}(\delta)\|P(x_0)\|)$ розв"язок x^*, до якого збігається послідовність $\{x_n\}$, визначена за формулою /2/, причому

$$\|x_n - x^*\| \leq \lambda H_n^{\alpha}(\delta)\, \|P(x_0)\|. \qquad /8/$$

Доведення аналогічне доведенню теореми .

П р и м і т к а 1. Доведені теореми є підсиленням раніше відомих результатів про збіжність методів типу /2/, а також теорема 1 підсилює теорему 1 з [4] .

П р и м і т к а 2. Теорем 1,2 можна розглядати як твердження про стійкість методу /2/. Дані теореми дають можливість визначити допустиму похибку обчислення $Q(x)$ на кожному кроці ітерації при умові збереження максимально можливого порядку збіжності.

Розглянемо збурений аналог методу /2/, який запишемо так:

$$x_{n+1} = x_n - Q(x_n) - \nu(x_n) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad /9/$$

Т е о р е м а 3. Нехай $x_0 \in X$, $S = \{x : \|x - x_0\| \leq \rho\}$ на S виконуються умови:

1. умови 1-3 теореми 2;
2. $\|\nu(x)\| \leq \gamma_2 \|P(x)\|$, $\|P'(x)\nu(x)\| \leq \gamma_1 \|P(x)\|^{1+\alpha}$;
3. $\delta = \left(\gamma + \gamma_1 + \frac{L(\lambda + \gamma_2)^2}{1+\alpha}\right) \|P(x_0)\|^{\alpha} < 1.$

Тоді рівняння /1/ має в S $(\rho = \lambda H_0^{\alpha}(\delta)\|P(x_0)\|)$ розв"язок x^* , до якого збігається послідовність $\{x_n\}$, одержана за /9/, причому

$$\|x_n - x^*\| \leq \lambda H_n^{\alpha}(\delta)\, \|P(x_0)\|.$$

П р и м і т к а 3. Теорема 3 дає можливість розглядати методи типу Ньютона-Канторовича /різницевий аналог, Стефенсена, запропонований В.А.Курчатовим [3] и інші/ другого та нижчого порядку збіжності як збурення методу Ньютона - Канторовича [1].

П р и м і т к а 4. Аналогічні теореми мають місце при виконанні умов

$$\|P(x) - P'(x)\,Q(x)\| \leq \gamma \|P(x)\| ,$$

$$\delta = \gamma_1 + \gamma + \frac{L(\lambda + \gamma_2)^2}{1+\alpha}\, \|P(x_0)\|^{\alpha} < 1.$$

При використанні методів /2/ можливі випадки, коли в точці x_0 умова 4 теореми 2 не виконується, тобто має місце нерівність $(\gamma+\frac{L\lambda^2}{1+\alpha})\|P(x_0)\|^{\alpha}\geq 1$. У таких випадках послідовність $\{x_n\}$ розбіжна. Розглянемо модифікацію формули /2/, а саме

$$x_{n+1}=x_n-\nu_n Q(x_n) \qquad n=0,1,2,\dots \tag{10}$$

і виберемо ν_n таким, щоб послідовність $\{x_n\}$, одержана за /10/, збігалася.

У нашому випадку ν_n залежить від номера ітерації і ми вибиратимемо його з умови

$$\nu_n=\begin{cases}\dfrac{1-\gamma\|P(x_n)\|^{\alpha}}{2L\lambda^2\|P(x_n)\|^{\alpha}}(1+\alpha) & \text{при } \dfrac{L\lambda^2\|P(x_n)\|^{\alpha}}{1+\alpha}+\gamma\|P(x_n)\|^{\alpha}\geq 1\\[2ex] 1 & \text{при } \dfrac{L\lambda^2\|P(x_n)\|^{\alpha}}{1+\alpha}+\gamma\|P(x_n)\|^{\alpha}<1.\end{cases} \tag{11}$$

Т е о р е м а 4. Нехай $x_0\in X$, $S=\{x:\|x-x_0\|\leq\rho\}$ і на S виконуються умови 1–3 теореми 2, $\gamma\|P(x_0)\|^{\alpha}<1$.
Тоді рівняння /1/ має в S $(\rho=(\sum_{i=0}^{p}\delta^i+\delta^p H_0^{\alpha}(\delta_1))\lambda\|P(x_0)\|)$ розв"язок x^*, до якого збігається послідовність $\{x_n\}$, одержана за формулою /10/, /11/, причому для $k\leq p$

$$\|x_k-x^*\|\leq(\sum_{i=k}^{p}\delta^i+\delta^p H_0^{\alpha}(\delta_1))\lambda\|P(x_0)\|,$$

а для $k>p$

$$\|x_k-x^*\|\leq\delta^p H_{k-p}^{\alpha}(\delta_1)\lambda\|P(x_0)\|,$$

де p визначається з умови

$$\nu_p<1,\quad \nu_{p+i}=1\quad i>0,$$

а

$$\delta=1-\frac{(1-\gamma\|P(x_0)\|^{\alpha})^2}{4L\lambda^2\|P(x_0)\|^{\alpha}}(1+\alpha),\qquad \delta_1=(\gamma+\frac{L\lambda^2}{1+\alpha})\|P(x_p)\|^{\alpha}.$$

П р и м і т к а 5. Теорема 4 дає практичні рекомендації для знаходження розв"язку /1/ у випадку поганого початкового наближення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В. О методе Ньютона. - "Труды Института математики АНСССР", 1949, вип.28.

2. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторних уравнений. М., "Наука", 1969.

3. Курчатов В.А. Об одном методе линейной интерполяции решения функциональных уравнений. - ДАН СССР, 1971, 198, № 3.

4. Поляк Б.Т. Градиентные методи решения уравнений и неравенств. - "Журнал вычислительной математики и математической физики", 1964, 4, № 6.

УДК 517.9

Г.Т.ДУДИКЕВИЧ

РОЗРАХУНОК ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ПОЛЯ СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОДІВ БЛОЧНИМ МЕТОДОМ ВЕРХНЬОЇ РЕЛАКСАЦІЇ

Для розрахунку полів системи просторових електродів з осьовою симетрією чисельними методами знаходження розв"язку зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь високого порядку, що утруднює застосування точних методів. У цьому випадку використовуються наближені ітераційні методи, які грунтуються на повторному застосуванні простого алгоритму, і початкове наближення уточнюється на кожному наступному кроці.

1. Нехай потрібно знайти розв"язок рівняння Лапласа в циліндричній системі координат

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \qquad /1/$$

в осесиметричній області із заданими значеннями потенціалів на електродах електронно-оптичних систем.

На осі Oz /при $r = 0$/ рівняння /1/ набуває вигляду

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad /2/$$