ЛІТЕРАТУРА

1. Канторович Л.В. О методе Ньютона. - "Труды Института математики АНСССР", 1949, вип.28.

2. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М., "Наука", 1969.

3. Курчатов В.А. Об одном методе линейной интерполяции решения функциональных уравнений. - ДАН СССР, 1971, 198, № 3.

4. Поляк Б.Т. Градиентные методы решения уравнений и неравенств. - "Журнал вычислительной математики и математической физики", 1964, 4, № 6.

УДК 517.9

Г.Т.ДУДИКЕВИЧ

РОЗРАХУНОК ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ПОЛЯ СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОДІВ БЛОЧНИМ МЕТОДОМ ВЕРХНЬОЇ РЕЛАКСАЦІЇ

Для розрахунку полів системи просторових електродів з осьовою симетрією чисельними методами знаходження розв"язку зводиться до системи лінійних алгебраїчних рівнянь високого порядку, що утруднює застосування точних методів. У цьому випадку використовуються наближені ітераційні методи, які грунтуються на повторному застосуванні простого алгоритму, і початкове наближення уточнюється на кожному наступному кроці.

1. Нехай потрібно знайти розв"язок рівняння Лапласа в циліндричній системі координат

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \qquad /1/$$

в осесиметричній області із заданими значеннями потенціалів на електродах електронно-оптичних систем.

На осі Oz /при $r = 0$/ рівняння /1/ набуває вигляду

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad /2/$$

Апроксимуючи рівняння /1/, /2/ кінцеворізницевими аналогами з точністю $O(h^2)$, де h – крок сітки, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{1}{h^2}\left[U_{i+1,j}+U_{i-1,j}+\left(1+\frac{h}{2r_j}\right)U_{i,j+1}+\left(1-\frac{h}{2r_j}\right)U_{i,j-1}-4U_{i,j}\right]=0, \qquad /3/$$

$$\frac{1}{h^2}\left[U_{i+1,1}+U_{i-1,1}+4U_{i,2}-6U_{i,1}\right]=0. \qquad /4/$$

2. Для розв"язування цієї системи рівнянь високого порядку застосовується метод верхньої релаксації по лініях. Спочатку на /к+1/-й ітерації /к=0,1,2.../ методом прогонки 2 визначають проміжні значення $U^{(k+\frac{1}{2})}$ із системи

$$U_{i+1,j}^{(k+\frac{1}{2})}-4U_{i,j}^{(k+\frac{1}{2})}+U_{i-1,j}^{(k+\frac{1}{2})}+\left(1+\frac{h}{2r_j}\right)U_{i,j+1}^{(k)}+\left(1-\frac{h}{2r_j}\right)U_{i,j-1}^{(k+1)}=0,$$

$$U_{i+1,1}^{(k+\frac{1}{2})}-6U_{i,1}^{(k+\frac{1}{2})}+U_{i-1,1}^{(k+\frac{1}{2})}+4U_{i,2}^{(k)}=0 \quad (i=1,2,\dots,M;\ j=1,2,\dots,N),$$

а потім обчислюють значення $U_{i,j}^{(k+1)}$ за формулою

$$U_{i,j}^{(k+1)}=U_{i,j}^{(k)}+\omega\left(U_{i,j}^{(k+\frac{1}{2})}-U_{i,j}^{(k)}\right). \qquad /5/$$

Причому цикл по вузлах ведеться послідовно вздовж стрічок зліва направо від нижньої стрічки до верхньої, а ω – оптимальний параметр релаксації, який обчислюється за формулою

$$\omega_0=1 \quad \text{при} \quad K<N_1,$$

$$\omega_{K+1}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{(\lambda_{N_1}+\omega_K-1)^2}{\lambda_{N_1}\cdot\omega_K^2}}}, \qquad /6/$$

де λ_{N_1} – максимальне власне число матриці ітераційного процесу. Для визначення λ_{N_1} спочатку перші ітерації проводяться зі значенням $\omega_0 = 1$, а потім обчислюються величини

$$\lambda_1^{(k)}=\frac{\sum\limits_{i,j}\left|U_{i,j}^{(k+1)}-U_{i,j}^{(k)}\right|}{\sum\limits_{i,j}\left|U_{i,j}^{(k)}-U_{i,j}^{(k-1)}\right|}$$

до задоволення нерівності

$$\left|\frac{\lambda_1^{(k)}}{\lambda_1^{(k-1)}}-1\right| < \varepsilon_1 ,$$

де ε_1 – мала задана величина /приблизно 10^{-2} – 10^{-3}/. Приймаючи $\lambda_{M_1} = \lambda_1^{(k)}$, за /6/ визначається наближене значення оптимального параметра релаксації $\omega_k = \omega_{опт}$. Дана методика дає змогу визначити $\omega_{опт}$ із заданою точністю ε_1 в 4-6 раз швидше, ніж методом підбору.

Далі за формулою /5/ обчислюються значення $u_{i,j}^{(k)}$ аж до задоволення нерівності

$$\frac{\left| u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)} \right|}{max\left\{\left|u_{i,j}^{(k+1)}\right|,\left|u_{i,j}^{(k)}\right|\right\}} < \varepsilon ,$$

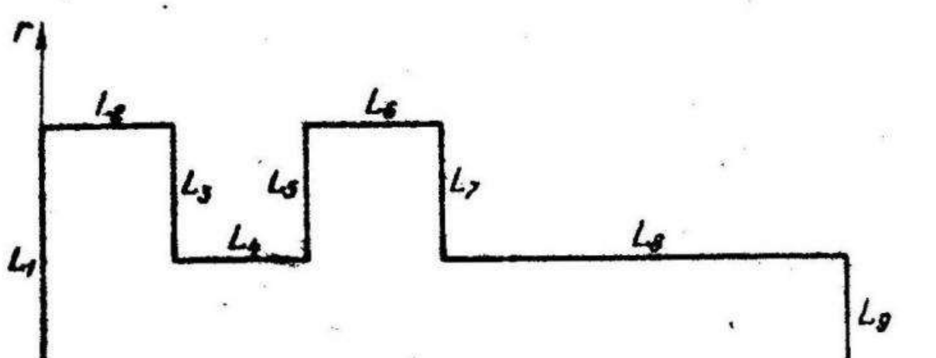
де ε – мала задана величина порядку 10^{-7} – 10^{-8}.

3. Даною методикою розв"язувались три контрольні задачі:

1/ прямокутник розмірами 8 х 3,5 з кроком h = 0,5 і з граничними умовами: на лівій стороні потенціал дорівнює 1, на правій – 0, на верхній потенціал змінюється за лінійним законом від 1 до 0;

2/ ця ж область і граничні умови, тільки h = 0,25;

3/ тріод /див. рисунок/ із відповідними значеннями потенціалів



на границі:

на $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 - 0$,

на L_7, L_8, L_9 - 1, на L_6- лінійний розподіл від 0 до 1.

У таблиці наведено результати розрахунків цих трьох задач блочним методом верхньої релаксації, методом верхньої релаксації по точках [1] і методом змінних напрямків [1] , які підтверджують ефективність блочного методу.

Результати розрахунків контрольних задач.

Задача	Метод	Кількість ітерацій	Час рахунку й ітерації, с	Загальний час рахунку, с
1	МВР по лініях	18	0,8	15
	МВР по точках	53	0,4	21,2
	Метод змінних напрямків	57	1,5	85,5
2	МВР по лініях	40	2,5	100
	МВР по точках	78	1,6	124
	Метод змінних напрямків	31	6,2	192
3	МВР по лініях	29	8	232
	МВР по точках	134	5,5	737
	Метод змінних напрямків	230	8	1840

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. И л ь и н В.П. Разностные методы решения эллиптических уравнений. Новосибирск, 1970.

2. Ш а м а н с к и й В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч.П, Киев, „Наукова думка", 1966.

УДК 518:517:948

Ю.М.ЩЕРБИНА

ЗБУРЕНИЙ АНАЛОГ МЕТОДУ ДОТИЧНИХ ГІПЕРБОЛ

При практичній реалізації чисельних методів аналізу [2] та теорії оптимального керування [6] нерідко зустрічається задача розв"язування системи нелінійних рівнянь

$$P(x) = 0, \qquad /1/$$

де $P(x)$ - достатньо гладка вектор-функція векторного аргументу x з N компонентами $p_i(x)$ / $i = 1, 2, \dots, N$ /.

Для розв"язування задачі /1/ можна використати один із методів типу Ньютона [1, 3, 8] , наприклад, метод дотичних гіпербол [8] . При дослідженні цих методів доведені теореми про умови збіжності й одержані оцінки швидкості збіжності. Останні, по суті, є оцінками похибки методів при умові, що всі необхідні обчислення виконуються точно.

Проте при вивченні вказаних алгоритмів недостатня увага приділялась обчислювальним аспектам. Зокрема, не враховувались похибки, які супроводжують на кожному кроці процес розв"язування однієї чи декількох лінійних систем [7] , не розглядалось питання стійкості /в певному розумінні/ цих методів, а також не досліджувалась ефективність застосування алгоритмів типу Ньютона при грубих початкових наближеннях.