Л І Т Е Р А Т У Р А

1. И л ь и н В.П. Разностные методы решения эллиптических уравнений. Новосибирск, 1970.

2. Ш а м а н с к и й В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч.П, Киев, „Наукова думка", 1966.

УДК 518:517:948

Ю.М. ЩЕРБИНА

ЗБУРЕНИЙ АНАЛОГ МЕТОДУ ДОТИЧНИХ ГІПЕРБОЛ

При практичній реалізації чисельних методів аналізу [2] та теорії оптимального керування [6] нерідко зустрічається задача розв"язування системи нелінійних рівнянь

$$P(x) = 0, \qquad /1/$$

де $P(x)$ - достатньо гладка вектор-функція векторного аргументу x з N компонентами $p_i(x)$ / $i = 1,2,\ldots, N$ /.

Для розв"язування задачі /1/ можна використати один із методів типу Ньютона [1, 3, 8] , наприклад, метод дотичних гіпербол [8] . При дослідженні цих методів доведені теореми про умови збіжності й одержані оцінки швидкості збіжності. Останні, по суті, є оцінками похибки методів при умові, що всі необхідні обчислення виконуються точно.

Проте при вивченні вказаних алгоритмів недостатня увага приділялась обчислювальним аспектам. Зокрема, не враховувались похибки, які супроводжують на кожному кроці процес розв"язування однієї чи декількох лінійних систем [7] , не розглядалось питання стійкості /в певному розумінні/ цих методів, а також не досліджувалась ефективність застосування алгоритмів типу Ньютона при грубих початкових наближеннях.

Метод дотичних гіпербол визначається послідовністю рекурентних співвідношень

$$x_{n+1}=x_n-\left[P'(x_n)-\frac{1}{2}P''(x_n)\Gamma_n P(x_n)\right]^{-1}P(x_n), \qquad /2/$$

де $\Gamma_n=[P'(x_n)]^{-1}$, $n=0,1,2,\ldots$

При розв"язуванні на ЕОМ лінійних систем, що випливають з /2/, одержуємо розв"язок з деякою похибкою. Тому що наближений розв"язок лінійної системи є еквівалентним точному розв"язку цієї ж системи з дещо зміненою матрицею [7] , процес /2/ можна записати у вигляді

$$x_{n+1}=x_n-\left\{P'(x_n)-\frac{1}{2}P''(x_n)\left[P'(x_n)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\tilde{V}_n\right]^{-1}P(x_n)-V_n\right\}^{-1}P(x_n), \qquad /3/$$

де $\{\tilde{V}_n\}$ і $\{V_n\}$ - послідовності квадратних матриць порядку N з достатньо малою нормою.

Алгоритм /3/ називатимемо збуреним аналогом методу дотичних гіпербол. Перейдемо до обгрунтування його збіжності. Теорему сформулюємо для випадку, коли P - двічі диференційовний за Фреше оператор, що діє із банахового простору X у банахів простір Y , а $\{\tilde{V}_n\}$ і $\{V_n\}$ - послідовності операторів, що належать простору $\mathcal{L}(X,Y)$, тобто розглянемо більш широкий клас задач.

Т е о р е м а . Нехай виконуються умови:

1/ для початкового наближення x_0 існує оператор $\Gamma_0=[P'(x_0)]^{-1}$, причому $\|\Gamma_0\|\leq B_0$;

2/ $\|\Gamma_0 P(x_0)\|\leq\eta_0$;

3/ в області $\Omega_0=\{x:\|x-x_0\|\leq\eta_0/[(1-q_0)(1-S_0^{1+\frac{\alpha}{2}})]\}$

$\|P''(x)\|\leq M$ і $P''(x)$ задовольняє умову Гельдера

$$\|P''(x'')-P''(x')\|\leq L\|x''-x'\|^{\alpha};$$

а/ $h_0 = r_0\eta_0 < 1$, де $r_0^{1+t} = \max\left\{1, \frac{B_0^2M^2}{(1-q_0)^2}\right\}$;

б/ $q_0 = \frac{B_0M}{2(1-B_0\tilde{C}_0)}\eta_0 + B_0C_0 < 1$,

де $B_0\tilde{C}_0 < 1$, $\tilde{C}_{n+1} \le (1-h_n)\tilde{C}_n$, $C_{n+1} \le (1-h_n)C_n$,

$\|\tilde{V}_n\| \le \tilde{C}_n$, $\|V_n\| \le C_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$;

в/ $S_0^{1+t} = l_0^{1+t} h_0^{1+t}/(1-h_0)^2 < 1$,

де $l_0^{1+t} = \max\{1, m_0\}$,

$$m_0 = \frac{1}{(1-h_0)(1-q_0)}\left[\frac{L}{6B_0M^2(1-q_0)^{1+t}} + \frac{\tilde{K}}{2M(1-B_0\tilde{C}_0)} + \right.$$

$$\left. + \frac{K}{B_0M^2} + \frac{1}{4(1-q_0)}\left(1 + \frac{B_0\tilde{K}}{1-B_0\tilde{C}_0}\eta_0^t + \frac{2K}{M}\eta_0\right)\right],$$

$\tilde{K} \ge \|\tilde{V}_n\|\eta_n^{-\gamma(n)}$, $K \ge \|V_n\|\eta_n^{-1-\beta(n)}$,

$0 < t \le \alpha$, $\beta(n), \gamma(n) \le 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Тоді рівняння /1/ має в області Ω_0 розв"язок x^*, до якого збігається послідовність наближень процесу /3/, причому

$$\|x^* - x_n\| \le (1-h_0)^{2n} S_0^{f(n)-1}\frac{\eta_0}{(1-q_0)(1-S_0^{1+t})},$$

де $f(n) = \begin{cases} 1 \text{ при } n=0 \\ \prod_{i=0}^{n-1}(2+\min\{\alpha, \beta(i), \gamma(i)\}) \text{ при } n \ge 1. \end{cases}$

Д о в е д е н н я . здійснюється за схемою Л.В.Канторовича [2] .

Відзначимо, що аналогічну теорему можна сформулювати і для інших методів типу Ньютона [1, 3, 8] .

Метод дотичних гіпербол є стійким в тому розумінні, що похибки, якщо вони не дуже великі, не можуть порушити його збіжності. Більше того, вони навіть не змінять порядку збіжності, якщо виконуються умови $\|\tilde{V}_n\| \le \tilde{K}\eta_n$, $\|V_n\| \le K\eta_n^2$.

При грубих початкових наближеннях декілька перших ітерацій доцільно зробити за методом Ньютона, а потім перейти до алгоритму більш високого порядку збіжності, наприклад, до методу дотичних гіпербол.

Приймемо у /3/ $\tilde{V}_n = 0$, $V_n = \frac{1}{2}P'(x_n, x_{n-1})\Gamma_n P(x_n) - \frac{1}{2}P'(x_n)\Gamma_n P(x_n)$, де $P'(x, y)$ – перша поділена різниця оператора $P'(x)$ [5] . Тоді $\|V_n\| = O(\eta_n \eta_{n-1})$ і порядок збіжності одержаного алгоритму дорівнює $1 + \sqrt{2}$. При розв"язуванні одного нелінійного алгебраїчного або трансцендентного рівняння індекс ефективності [4] в цьому випадку дорівнює $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$, що вище, ніж у методів Ньютона $(\sqrt{2})$, дотичних гіпербол і Чебишова [8] $(\sqrt[3]{3})$.

Л І Т Е Р А Т У Р А

1. Б а р т и ш М.Я. О некоторых итерационных методах решения функциональных уравнений. – "Сибирский математический журнал", 1969, т. 10, № 3.

2. Б а х в а л о в Н.С. Численные методы. М., "Наука", 1973.

3. К а н т о р о в и ч Л.В. О методе Ньютона. – "Труды Математического ин-та АН СССР", 1949, т.28.

4. О с т р о в с к и й А. Решение уравнений и систем уравнений. М., ИЛ, 1963.

5. С е р г е е в А.С. О методе хорд. – "Сибирский математический журнал", 1961, т. 2, № 2.

6. Уьльм С.Ю. О решении краевых задач, вытекающих из принципа максимума. - "Известия АН Эст.ССР, серия физика, математика", 1967, т. 16, № 1.

7. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М., "Мир", 1969.

8. Шафиев Р.А. О некоторых итерационных процессах. - "Журнал вычислительной математики и математической физики", 1964, т. 4, № 1.

УДК 519.34 : 681.3.057

Г.А.ШИНКАРЕНКО

ІНТЕРПОЛЮВАННЯ НА ТРИКУТНИКАХ У МЕТОДІ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

У роботах [1-3] розглядались питання інтерполювання функцій у тріангульованих областях. Ми пропонуємо спосіб побудови інтерполяційних поліномів на трикутниках, що дає змогу одержувати їх у замкненому вигляді, та має певні переваги при чисельній реалізації методу скінченних елементів.

Нехай у тріангульованій області Ω необхідно зінтерполювати функцію $u(x,y)$, яка володіє всіма частинними похідними до певного порядку. Довільний елемент тріангуляції визначається своїми вершинами $P_i(x_i, y_i), i=1,2,3$; позначимо його центр ваги через $P_0(x_0,y_0)$. На кожному такому трикутнику інтерполяційний поліном Ерміта H_n степеня n однозначно визначається умовами

$$D^j H_n(P_i) = D^j u(P_i), \quad |j|\leq S, \quad i\neq 0; \qquad /1/$$

$$D^k H_n(P_0) = D^k u(P_0), \quad |k|\leq S+(-1)^n,$$

де S - ціла частина числа $(n-1)/2$;

$$D^{z} f = \frac{\partial^{z} f}{\partial x^{l}\partial y^{m}}, \quad |z| = l+m.$$