6. У э л ь м С.Д. О решении краевых задач, вытекающих из принципа максимума. - "Известия АН Эст.ССР, серия физика, математика", 1967, т. 16, № 1.

7. Ф о р с а й т Дж., М о л е р К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М., "Мир", 1969.

8. Ш а ф и е в Р.А. О некоторых итерационных процессах. - "Журнал вычислительной математики и математической физики", 1964, т. 4, № 1.

УДК 519.34 : 681.3.057

Г.А.ШИНКАРЕНКО

ІНТЕРПОЛЮВАННЯ НА ТРИКУТНИКАХ У МЕТОДІ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

У роботах [1-3] розглядались питання інтерполювання функцій у триангульованих областях. Ми пропонуємо спосіб побудови інтерполяційних поліномів на трикутниках, що дає змогу одержувати їх у замкненому вигляді, та має певні переваги при чисельній реалізації методу скінченних елементів.

Нехай у триангульованій області Ω необхідно зінтерполювати функцію $u(x,y)$, яка володіє всіма частинними похідними до певного порядку. Довільний елемент триангуляції визначається своїми вершинами $P_i\,(x_i, y_i), i=1,2,3$; позначимо його центр ваги через $P_0\,(x_0, y_0)$. На кожному такому трикутнику інтерполяційний поліном Ерміта H_n степеня n однозначно визначається умовами

$$D^j H_n(P_i) = D^j u(P_i), \quad |j| \leq S, \quad i \neq 0; \qquad /1/$$
$$D^K H_n(P_0) = D^K u(P_0), \quad |K| \leq S + (-1)^n.$$

де S - ціла частина числа $(n-1)/2$;

$$D^{z} f = \frac{\partial^{z} f}{\partial x^{l} \partial y^{m}}, \quad |z| = l+m.$$

Не зупиняючись на оцінці похибки таких поліномів /з цього приводу див. [4]/, зауважимо, що визначена таким чином на кожному трикутнику кускова інтерполянта належить множині функцій $C(\Omega)$, і отже, її можна використати для розв"язування варіаційних задач першого порядку. Далі, розглядаючи поліноми H_{2n} і H_{2n+1}, бачимо, що при складанні системи рівнянь методу скінченних елементів, попередньо виключивши параметри з центрального вузла кожного трикутника [3], приходимо до одного і того ж порядку системи. Оскільки решта параметрів визначаються лише на вершинах елементів, то ширина ненульових елементів матриці буде мінімальною, якщо нумерація вершин вибрана належним чином. Тому що ці обчислювальні аспекти накладають особливо жорсткі вимоги до сучасних ЕОМ, то в цьому відношенні запропоновані поліноми переважають своїх попередників.

Під час побудови вищезгаданих поліномів зручно користуватись природними координатами на трикутнику

$$L_i = (a_i + b_i x + c_i y)/\Delta, \quad i = 1,2,3,$$

де Δ подвоєна площа трикутника з вершинами $P_i(x_i, y_i)$, $i=1,2,3$,

$$a_1 = x_3 y_2 - x_2 y_3, \quad b_1 = y_2 - y_3, \quad c_1 = x_3 - x_2 \qquad /2/$$

і решта коефіцієнтів одержується циклічною перестановкою індексів 1, 2, 3 .

Поліном, що задовольняє умови /1/, шукаємо у вигляді

$$H_n = S_0 Q_0 \delta_0 + \sum_{i=1}^{3} [S_i, S_0][Q_i, Q]^T \delta_i . \qquad /3/$$

Тут S_j, $j = 0,1,2,3$ матриці-стрічки, кожен елемент яких має вигляд

$$L_1^{n_1} L_2^{n_2} L_3^{n_3}, \qquad /4/$$

де показники степенів n_1, n_2, n_3 зв"язані співвідношеннями

$$n_1+n_2+n_3=n;$$

$$0\leq n_i\leq s \qquad \text{для} \quad S_0; \qquad /5/$$

$$0\leq n_j+n_k\leq n_i \qquad \text{для} \quad S_i,\ i\neq 0;$$

$\delta_i,\ i=0,1,2,3$ вектори виду

$$\delta_i=\left[u^i, u^i_x, u^i_y, u^i_{x^2}, u^i_{xy}, \dots\right]^T,\quad u^i_{x^\ell y^m}=\frac{\partial^{\ell+m} U(P_i)}{\partial x^\ell\, \partial y^m}. \qquad /6/$$

Матриці Q, Q_i в формулі /3/ підлягають визначенню таким чином, щоб забезпечити виконання умов /1/. Тому що із співвідношень /5/ випливає

$$D^K S_0(P_i)=0\,, \qquad |K|\leq s\,, \quad i\neq 0\,;$$

$$D^K S_i(P_j)=0\,, \qquad |K|\leq s\,,\ i\neq j,\ i,j\neq 0,$$

і крім цього матриці $S_i,\ i\neq 0$ одержуються одна з іншої циклічною перестановкою індексів 1,2,3 у виразах виду /4/, то для визначення матриць Q, Q_i достатньо задовольнити умови

$$D^K S_0(P_0)\,Q_0=E_0, \qquad |K|\leq s+(-1)^n;$$

$$D^j S_i(P_i)\,Q_i^T=E_i, \qquad |j|\leq s;$$

$$D^K S_0(P_0)\,Q^T=-D^K S_i(P_0)\,Q_i^T, \quad |K|\leq s+(-1)^n,$$

де E_j одиничні матриці відповідних розмірностей. Таким чином, задача зводиться до визначення матриць Q, Q_0 і, беручи до уваги відмічену циклічність матриць $S_i,\ i\neq 0$ і матриці Q_1.

Подальше спрощення цієї задачі полягає в тому, що вигляд цих матриць знаходиться для трикутника з вершинами $R_1(0,0), R_2(1,0), R_3(0,1)$ в площині змінних α, β і тоді за допомогою заміни змінних

$$x = x_1 + c_3\alpha - c_2\beta, \qquad\qquad /7/$$
$$y = y_1 - b_3\alpha + b_2\beta$$

здійснюється перехід до елемента з вершинами $P_i(x_i, y_i)$ /у виразах /7/ коофіцієнти c_j, b_j визначаються формулами /2//. Це еквівалентно тому, що кожен вектор δ_i для трикутника з вершинами R_i замінюється у виразі /3/ добутком $T_i\delta_i$, де матриці T_i визначаються перетворенням /7/, а вектори δ_i мають вигляд /6/ [1].

Для застосувань практичний інтерес становлять поліноми $H_{2k+1}, k=0,1,2$. Наведемо їх вигляд для трикутника з вершинами $R_1(0,0)$, $R_2(1,0)$, $R_3(0,1)$. Для $k=0$ вигляд поліному наведено в роботі [3]

$k=1.$

$$S_0 = [L_1 L_2 L_3], \qquad \delta_0 = [u^0],$$
$$S_1 = [L_1^3, L_1^2 L_2, L_1^2 L_3], \qquad \delta_0^T = [u^1, u_x^1, u_y^1],$$

$$Q_0 = [27], \quad Q^T = [-7, -1, -1], \quad Q_1^T = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ 3 & 1 & \cdot \\ 3 & \cdot & 1 \end{bmatrix}.$$

$k=2.$

$$S_0 = [L_1^2 L_2^2 L_3, L_1 L_2^2 L_3^2, L_1^2 L_2 L_3^2], \quad \delta_0^T = [u^0, u_x^0, u_y^0],$$
$$S_1 = [L_1^5, L_1^4 L_2, L_1^4 L_3, L_1^3 L_2^2, L_1^3 L_2 L_3, L_1^3 L_3^2],$$
$$\delta_1^T = [u^1, u_x^1, u_y^1, u_{x^2}^1, u_{xy}^1, u_{y^2}^1],$$

$$Q = 27 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad Q^T = \begin{bmatrix} -57 & -14 & -5 & -1 & -1 & \cdot \\ 63 & 10 & 10 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ -57 & -5 & -14 & \cdot & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$Q_1^T = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 10 & 4 & \cdot & 1/2 & \cdot & \cdot \\ 20 & 4 & 4 & \cdot & 1 & \cdot \\ 10 & \cdot & 4 & \cdot & \cdot & 1/2 \end{bmatrix}.$$

$K=3 \qquad S_0=[L_1^3L_2^3L_3,\ L_1L_2^3L_3^3,\ L_1^3L_2L_3^3,\ L_1^3L_2^2L_3^2,\ L_1^2L_2^3L_3^2,\ L_1^2L_2^2L_3^3],$

$\delta_0^T=[u^0, u_x^0, u_y^0, \dots, u_{y^2}^0],$

$S_1=[L_1^7, L_1^6L_2, L_1^6L_3, L_1^5L_2^2, L_1^5L_2L_3, L_1^5L_3^2, L_1^4L_2^3, L_1^4L_2^2L_3, L_1^4L_2L_3^2, L_1^4L_3^3],$

$\delta_1^T=[u^1, u_x^1, u_y^1, u_{x^2}^1, \dots, u_{y^2}^1],$

$$Q_0=27\begin{bmatrix} -22 & -9 & -9 & -2 & 5 & -2 \\ -27 & 18 & -9 & 1 & -1 & -2 \\ -27 & -9 & 18 & -2 & -1 & 1 \\ 54 & \cdot & \cdot & 1/2 & -2 & 2 \\ 54 & \cdot & \cdot & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 54 & \cdot & \cdot & 2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$Q^T=\begin{bmatrix} 1274/3 & -138 & -138 & -13/2 & 24 & -13/2 & \cdot & -1 & -1 & \cdot \\ 2479/3 & 189 & 102 & 3/2 & 19 & 7/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & \cdot \\ 2479/3 & 102 & 189 & 7/2 & 19 & 3/2 & \cdot & 1/2 & 1 & 1/2 \\ -1318/3 & -102 & -22 & -23/2 & -6 & \cdot & -1/2 & -1/2 & \cdot & \cdot \\ -1438/3 & -102 & -102 & -13/2 & -13 & -13/2 & -1/6 & -1/2 & -1/2 & -1/6 \\ -1318/3 & -22 & -102 & \cdot & -6 & -23/2 & \cdot & \cdot & -1/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

$$Q_1^T=\begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 7 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 7 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 21 & 6 & \cdot & 1/2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 42 & 6 & 6 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 21 & \cdot & 6 & \cdot & \cdot & 1/2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 35 & 15 & \cdot & 5/2 & \cdot & \cdot & 1/6 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 105 & 30 & 15 & 5/2 & 5 & \cdot & \cdot & 1/2 & \cdot & \cdot \\ 105 & 15 & 30 & \cdot & 5 & 5/2 & \cdot & \cdot & 1/2 & \cdot \\ 35 & \cdot & 15 & \cdot & \cdot & 5/2 & \cdot & \cdot & \cdot & 1/6 \end{bmatrix}$$

Зауважимо, що коли варіаційна задача вимагає високої гладкості розв"язку, то цього можна досягнути деяким переозначенням матриць Q_0, Q. Зокрема, прийнявши ці матриці нульовими, одержуємо за допомогою поліномів H_n кусково-визначену апроксимацію розв"язку з класу функцій $C^s(\Omega)$.

Автор висловлює щиру вдячність професору Флейшману Н.П. і кандидату фізико-математичних наук Савулі Я.Г. за увагу до роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Dupuis G., Goel J. J. Finite elements with high degree of regularity. „Int. J. Numer. Meth. Eng." 1970, 2, N 4.
2. Zenisek A. Interpolation polynomials on the triangle. „Numer. Math." 1970, 15, N 4.
3. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method in Engineering Science. London, McGraw-Hill, 1971.
4. Strang G., Fix G. J. An Analysis of the Finite Element Method. New-York, Prentice-Hall, Inc., 1973.