УДК 624.04

Л.Й.ОШИПКО, К.С.ІВАНКІВ

ЗАСТОСУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДО ОПТИМІЗАЦІЇ ПО ВАЗІ ТОНКОСТІННИХ КОНСТРУКЦІЙ

Задачі оптимального проектування тонкостінних конструкцій, що складаються з пластин і оболонок, зводяться до задач математичного програмування, загальні методи якого розроблені ще недостатньо [3]. Методи математичного програмування дають змогу знайти вектор регульованих параметрів $\bar{t}^{\circ}(t_1^{\circ}, t_2^{\circ}, \dots, t_m^{\circ})$, який дає екстремум цільової функції

$$g_0(\bar{t}^{\circ}) = \max_{\min\limits_{\bar{t}\in T}} g_0(\bar{t}), \qquad /1/$$

$$\bar{t} \in T = \{\bar{t} \mid g_k(\bar{t}) \geq c\},$$

де T - множина допустимих розв"язків, яка утворюється функціями обмежень $g_k(\bar{t})$ $(k = 1, 2, \dots, p)$.

У цій роботі пропонується застосувати апарат геометричного програмування до розв"язування певного класу екстремальних задач. Для цього довільні, неперервні та диференційовані функції $g_k(\bar{t})$ зображаються позіномами виду [1]

$$g_k(\bar{t}) \cong C_k t_1^{a_{k1}} t_2^{a_{k2}} \dots t_m^{a_{km}}, \qquad /2/$$

де

$$a_{kj} = \left(\frac{t_j}{g_k} \cdot \frac{\partial g_k}{\partial t_j}\right)_{\bar{t}^*}, \quad C_k = g_k(\bar{t}^*) / \prod_{j=1}^{m} (t_j^{*\,a_{kj}}),$$

$\bar{t}^*$ - вихідна точка.

Тоді задача /1/ стає задачею геометричного програмування.

1. Розглянемо задачу пружної рівноваги конструкції, що складається з циліндричної оболонки /довжини ℓ, радіуса R і товщини $h_1 = const$ /, з"єднаної з плоским дном /товщини $h_2 = const$ /. Конструкція шарнірно оперта і перебуває під рівномірним зовнішнім тиском $q = const$.

Розв"язок рівняння Софі Жермен при дії по контуру пластинки згинних моментів $m_1 = q h_2^2 M_2$ і рівномірного тиску q має вигляд [4]

$$W_1 = \frac{q R^4}{64 D_1 (1+\nu_1)} \cdot \left[5 + \nu_1 + \frac{32 h_2^2}{R^2} M_2 - (1+\nu_1) \frac{r^2}{R^2} \right] \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \qquad /3/$$

де M_2 – безрозмірна величина момента; D_1 – циліндрична жорсткість.

Розв"язок рівняння осесиметричного згину циліндричних оболонок записується у вигляді [4]

$$W_2 = e^{-kx}(C_1 \cos kx + C_2 \sin kx) + e^{kx}(C_3 \cos kx + \qquad /4/$$

$$+ C_4 \sin kx) + \frac{q R^2 (2-\nu_2)}{2 E_2 h_2},$$

де $\gamma = \sqrt[4]{3(1-\nu_2^2)}$, $k = \frac{\gamma}{\sqrt{R h_2}}$

Постійні інтегрування визначаємо з умов спряження пластинки з оболонкою та умов шарнірного опирання конструкції, які в нашому випадку зводяться до системи шести лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв"язавши ці рівняння, одержуємо:

$$\begin{aligned} & M_2 = -\frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad Q_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \\ & C_1 = B_{14} - \frac{A_1}{2} + B_{11} M_2 + (B_{12} - B_{13}) Q_2; \\ & C_2 = -B_{14} + (B_{21} - B_{11}) M_2 - B_{13} Q_2; \\ & C_3 = -\left(B_{14} + \frac{A_1}{2}\right) - B_{11} M_2 + (B_{12} + B_{13}) Q_2; \\ & C_4 = -B_{14} - (B_{11} + B_{21}) M_2 - B_{13} Q_2. \end{aligned} \qquad /5/$$

Тут введено такі позначення:

$$B_{11} = \frac{q(1-\nu_1) R R_1^6}{E_1 \gamma \rho_2^5}; \quad B_{12} = \frac{q(1-\nu_1) R}{2E_1} \cdot \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}; \quad B_{13} = \frac{q \cdot 3R(1-\nu_2^2)\rho_2}{2E_2 \gamma^3};$$

$$B_{14} = \frac{3}{8} \frac{qR(1-\nu_1)}{\gamma E_1} \cdot \frac{\rho_1^6}{\rho_2}; \quad B_{21} = \frac{q R \gamma^2}{E_2}; \quad A_1 = \frac{qR(2-\nu_2)}{2E_2} \rho_2^2;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -B_{11}(A+1) + B_{21} & B_{12} B + B_{13}(A-1) \\ -B_{11}(A-1) - B_{21} B & -B_{13}(A+1) + B_{12} \end{vmatrix};$$

$$
\Delta_1 = \begin{vmatrix} B_{14}(A+1) - \frac{A_1}{2}\left(\frac{e^{kl}}{\sin kl} - B\right) & B_{12}B + B_{13}(A-1) \\ B_{14}(A-1) - \frac{A_1}{2}\left(\frac{e^{kl}}{\cos kl} - 1\right) & -B_{13}(A+1) + B_{12} \end{vmatrix};
$$

$$
\Delta_2 = \begin{vmatrix} -B_{11}(A+1) + B_{21} & B_{14}(A+1) - \frac{A_1}{2}\left(\frac{e^{kl}}{\sin kl} - B\right) \\ -B_{11}(A-1) - B_{21}B & B_{14}(A-1) - \frac{A_1}{2}\left(\frac{e^{kl}}{\cos kl} - 1\right) \end{vmatrix};
$$

$$
A = \frac{e^{2kl}}{\sin 2kl} - ctg\, 2kl; \quad B = \frac{e^{2kl}}{\sin 2kl} + ctg\, 2kl;
$$

$$
\rho_1 = \sqrt{\frac{R}{h_1}}; \qquad \rho_2 = \sqrt{\frac{R}{h_2}}.
$$

Аналіз напруженого стану даної конструкції показує, що максимальні розтягуючі напруження виникають у точці спряження пластинки з оболонкою.

2. Ставиться задача знаходження мінімуму об"єму /ваги/ конструкції

$$
v = \pi R^3\left[\rho_1^{-2} + \frac{2l}{R}\rho_2^{-2}\right], \qquad /7/
$$

при таких обмеженнях

$$
\begin{aligned}
\sigma_z^{max} &= -q\left[\frac{\rho_1^4}{\rho_2^4}M_2 + \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2}Q_2\right] \leq [\sigma], \\
\sigma_x^{max} &= -q\left[6M_2 - \frac{\rho_2^2}{2}\right] \leq [\sigma].
\end{aligned} \qquad /8/
$$

Апроксимуючи функції, що входять в обмеження /8/, одночленними позіномами, одержуємо таку пряму програму геометричного програмування:

знайти мінімум $\quad g_0(\rho_1, \rho_2) = C_1\rho_1^{-2} + C_2\rho_2^{-2}$;

при обмеженнях $\quad C_3\rho_1^{a_{11}}\rho_2^{a_{12}} \leq 1; \quad C_4\rho_1^{a_{21}}\rho_2^{a_{22}} \leq 1.$

Ступінь трудності задачі дорівнює одиниці. Відповідна двоїста програма полягає в знаходженні максимуму функції

$$V(\bar{\delta}) = \left[\prod_{i=1}^{4} C_i^{\delta_i}\right] \delta_1^{-\delta_1} \delta_2^{-\delta_2}$$

при умовах нормалізації, ортогоналізації та невід"ємності двоїстих змінних δ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Розв"язок двоїстих обмежень для нашого випадку такий

$$\bar{\delta} = \bar{b}^{(0)} + r\bar{b}^{(1)}, \qquad /9/$$

де $\bar{b}^{(0)}$ - вектор нормалізації; $\bar{b}^{(1)}$ - вектор нев"язки; r - базисна змінна.

Вектори $\bar{b}^{(0)}$, $\bar{b}^{(1)}$ визначаються з матриці експонент прямої задачі. Величину r визначаємо з рівняння

$$\prod_{i=1}^{4} C_i^{b_i^{(1)}} = \left[\prod_{i=1}^{4} \left(b_i^{(0)} + r b_i^{(1)}\right)^{b_i^{(1)}}\right] \left(b_3^{(0)} + r b_3^{(1)}\right)^{-b_3^{(1)}} \left(b_4^{(0)} + r b_4^{(1)}\right)^{-b_4^{(1)}}. \qquad /10/$$

Задача доведена до числа на ЕОМ М-222 при таких значеннях нерегульованих параметрів:

$R = 19{,}45\,мм;\ l = 25\,мм;\ \nu_1 = \nu_2 = 0{,}2;\ q = 0{,}01\,\frac{кГ}{мм^2},\ [\sigma] = 0{,}9\,\frac{кГ}{мм^2}.$

Розв"язок трансцендентного рівняння /10/ дає r = 0,1127. На основі першої теореми двоїстості знаходимо h_1 = 1,6201, h_2 =1,6316.

Оскільки функції σ_r, σ_t апроксимуються поліномами /2/ наближено, то для уточнення розв"язку використовувався ітераційний метод [2] .

ЛІТЕРАТУРА

1. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. М., "Мир", 1972.

2. Зенер К. Геометрическое программирование и техническое проектирование. М., "Мир", 1973.

3. Сергеев Н.Д., Богатырев А.И. Проблемы оптимального проектирования конструкций. Л., Госстройиздат, 1971.

4. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.